

Approximation et identification des interfaces de diffusion par modèle fractionnaire

Jean-Claude TRIGEASSOU, Amel BENCHELLAL, Thierry POINOT

Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle

Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers

40, Av. du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex - FRANCE

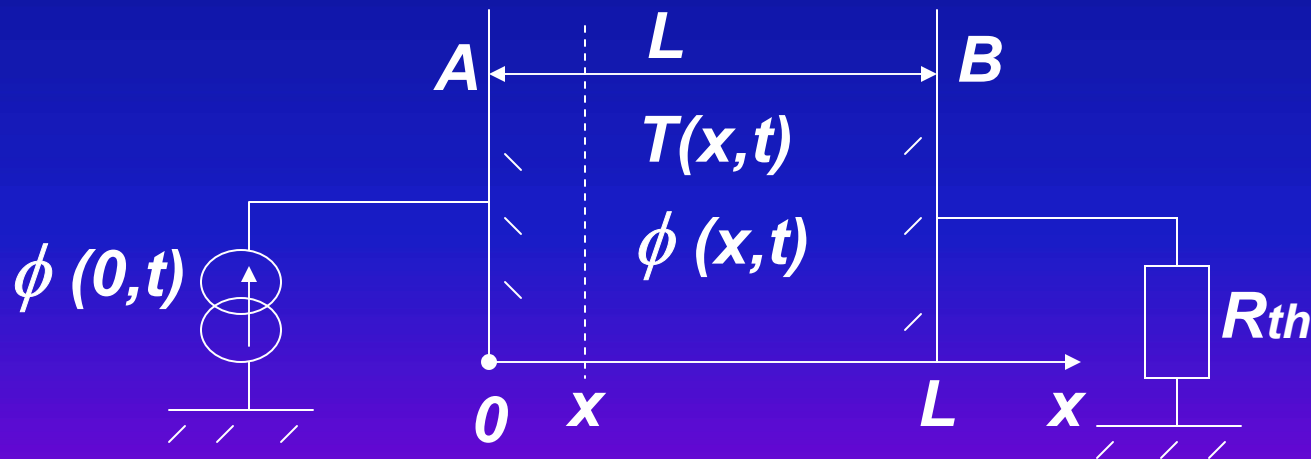
Université de Poitiers

Objectif

Amélioration de l'approximation des interfaces de diffusion

Position du problème

Le système de diffusion de chaleur traité est celui d'un mur, représenté selon le schéma bloc suivant:



Tel que :

ϕ : le flux de chaleur

T(0,t) : la température à l'extrémité A

R_{th} : résistance thermique *entre le mur et l'air*

La relation entre T(x,t) et $\phi(x,t)$ est gérée par l'équation suivante:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\phi(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Avec

α : coefficient de diffusivité thermique

λ : conductivité thermique

ρ : masse volumique

c : chaleur massique

En appliquant la transformée de Laplace, le transfert s s'écrit alors :

$$H(s) = \frac{\lambda \cdot R_{th} \cdot \sqrt{\frac{s}{\alpha}} + 1 + (\lambda \cdot R_{th} \cdot \sqrt{\frac{s}{\alpha}} - 1) e^{-\frac{s}{\alpha} L^2}}{\lambda \cdot \sqrt{\frac{s}{\alpha}} (\lambda \cdot R_{th} \cdot \sqrt{\frac{s}{\alpha}} + 1 - (\lambda \cdot R_{th} \cdot \sqrt{\frac{s}{\alpha}} - 1) e^{-\frac{s}{\alpha} L^2})}$$

lorsque ω tend vers l'infini,

$$H(s) \approx \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda s^{0.5}}$$

Différentes approches ont été proposées pour modéliser ce type de système . En ce qui concerne les travaux du LAll, un premier modèle a été proposé, son transfert est donné par:

$$H_n(s) = \frac{b_0}{a_0 + s^n}$$

Où $G = \frac{b_0}{a_0}$ (prise en compte de R_{th})

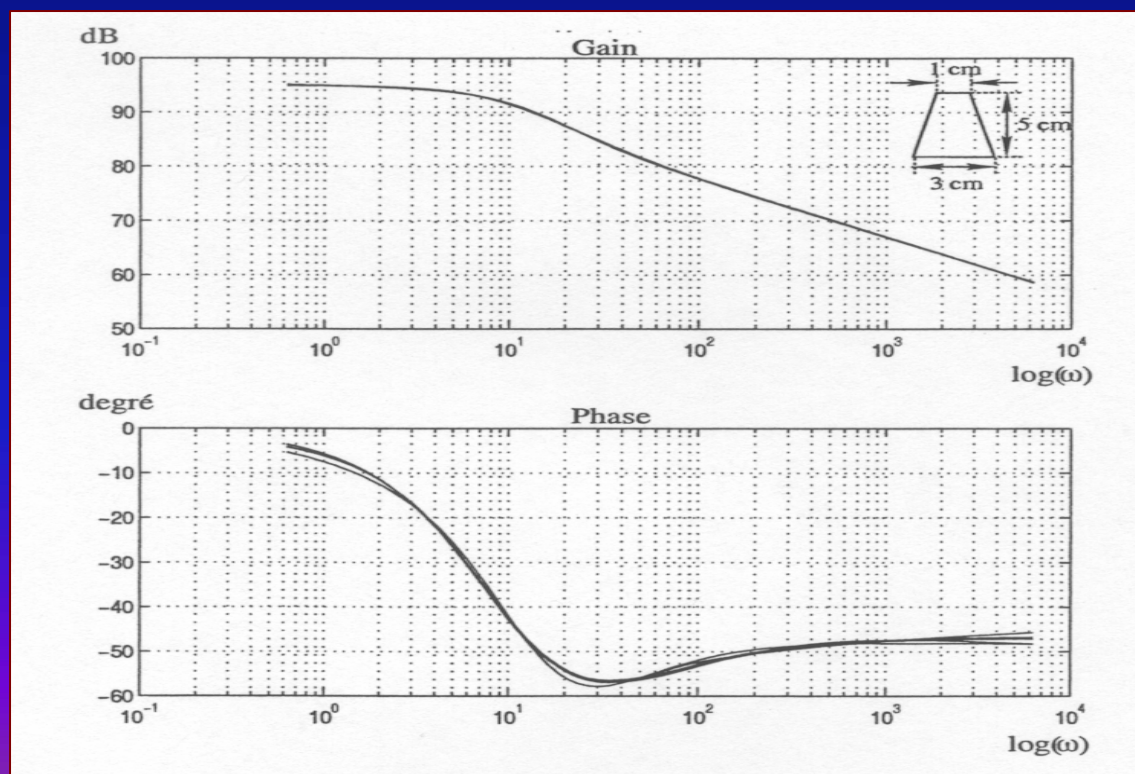
$0 < n < 1$ s'adapte au système

Défaut de cette approximation

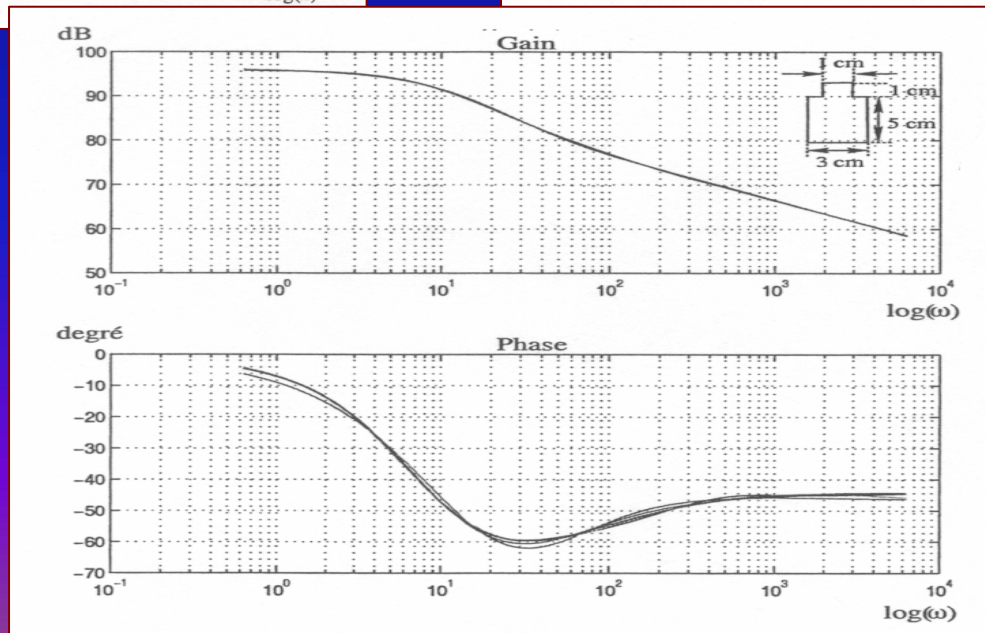
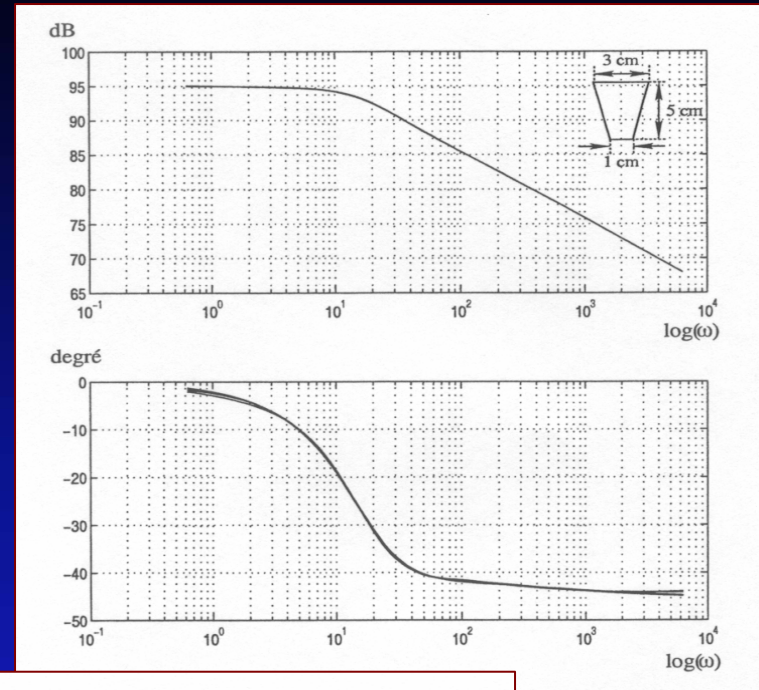
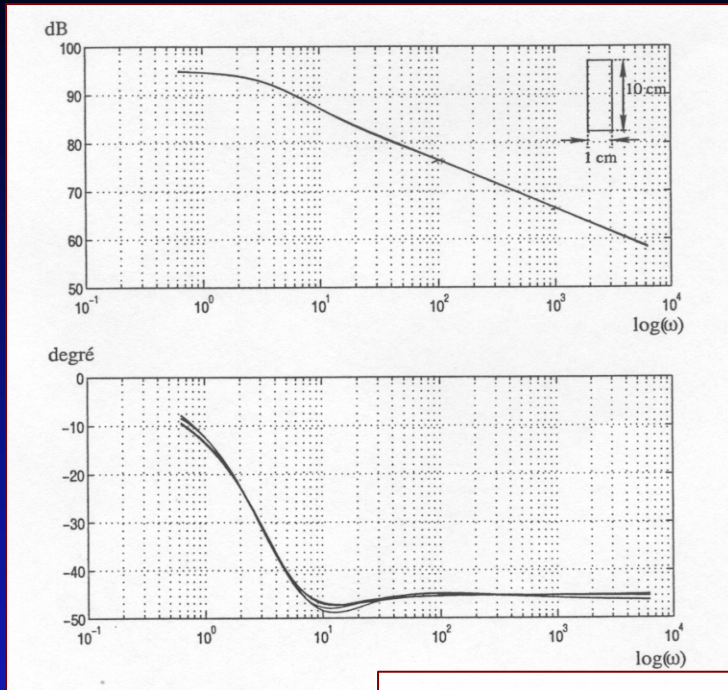
lorsque ω tend vers l'infini, n vaut toujours 0.5

Elle ne prend pas compte la géométrie du système.

Exemples



Introduction



Il faut donc améliorer l'approximation à fréquence finie, pour cela une deuxième approche est proposée, qui permettra d'approcher le système de diffusion de chaleur à fréquence moyenne en respectant $n \rightarrow 0.5$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$

Soit

$$H_{n_1, n_2}(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{n_1}}{a_0 + a_1 s^{n_1} + s^{n_1 + n_2}} \quad \text{avec} \quad n_2 = 0.5$$

Autres approches

- **LAP Olivier COIS (2002)**, le modèle est :

$$H_N(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{0.5} + \dots + b_{N-1} (s^{0.5})^{N-1}}{a_0 + a_1 s^{0.5} + \dots + a_{N-1} (s^{0.5})^{N-1} + (s^{0.5})^N}$$

$s^{0.5}$ Décomposé en un modèle discret (approximation numérique du dérivateur)

$H_N(s)$ est un modèle linéaire par rapport aux paramètres, donc estimation des a_n et b_n par moindres carrés.

- LAP R-MALTI (2003)

Utilisation de bases orthogonales fractionnaires:

$$H_N(s) = \sum_1^N \alpha_i G_i(s)$$

où

$$G_i(s) = \frac{b_0 + b_1 s^n + b_2 (s^n)^2 + \dots}{a_0 + a_1 s^n + a_2 (s^n)^2 + \dots}$$

N : déterminé par connaissance a priori

α_i : estimé par moindres carrés

- **G-MONTSENY et AL.1998**

Utilisation d'une représentation diffusive:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial t} = -\xi x(\xi, t) + u(t) \\ y(t) = \int_0^{\infty} \mu(\xi) x(\xi, t) d\xi \end{array} \right.$$

Qui donne par discrétisation

$$H_N(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s + \xi_k}$$

ξ_k : choisi a priori

c_k : estimé par moindres carrés


Remarques:

- nécessité de choix a priori
- nombre élevé de paramètres pour obtenir une estimation satisfaisante
- lien avec la physique (?)

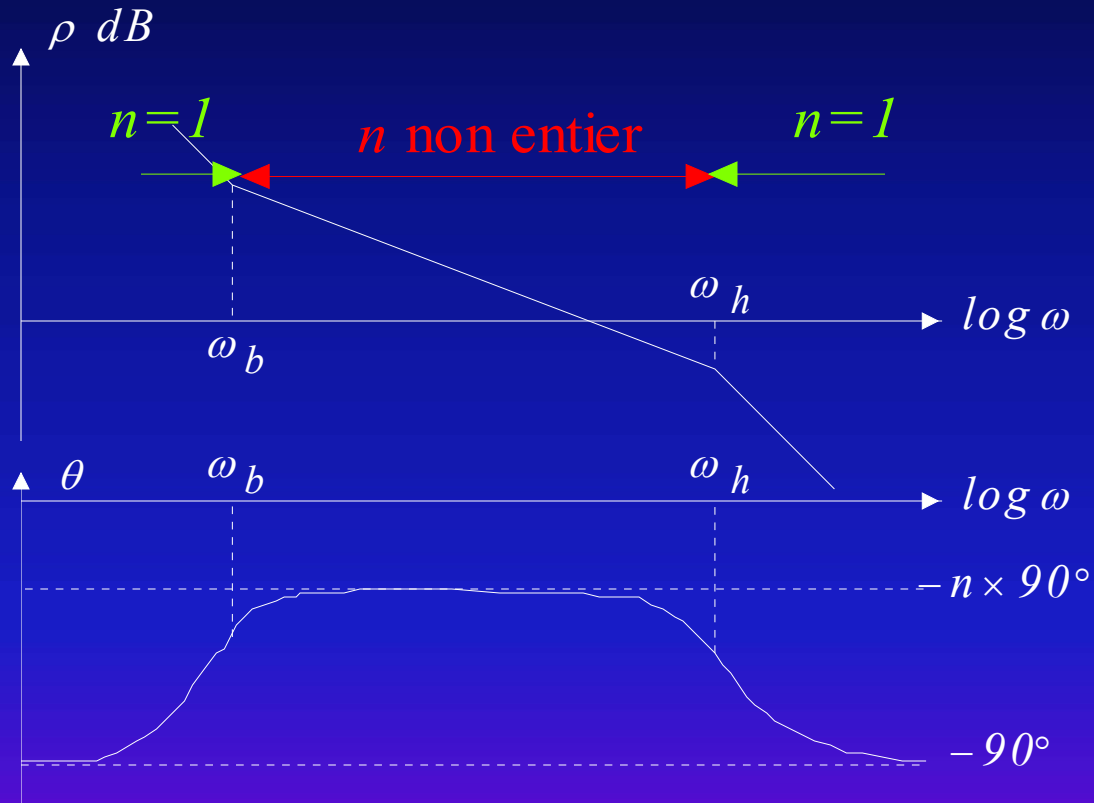
Plan de l'exposé

- 1 - Rappel sur les intégrateurs fractionnaires**
- 2 - Méthode d'identification**
- 3 - Etude en simulation numérique**
- 4 - Exemple sur système réel**
- 5 - Conclusions**

Plan de l'exposé

-  **1 - Rappel sur les intégrateurs fractionnaires**
- 2 - Méthode d'identification**
- 3 - Etude en simulation numérique**
- 4 - Exemple sur système réel**
- 5 - Conclusions**

Le diagramme de Bode de l'intégrateur :



Système non entier

Intégrateur d'ordre non entier :

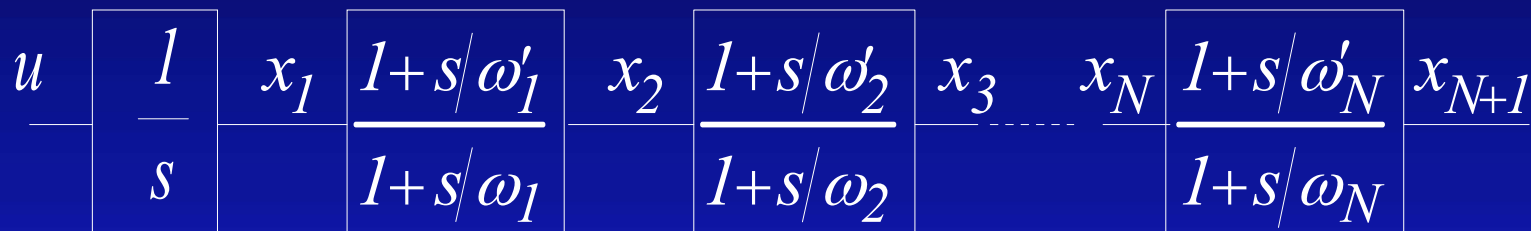


Schéma bloc de $I_n(s)$

$$A_v(j\omega) = \prod_{i=1}^N \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega'_i}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_i}} \quad \text{filtre à avance et retard de phase}$$

Représentation analytique de l'intégrateur d'ordre non entier

$$I_n(s) = \frac{G_n}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^n \equiv \frac{G_n}{s} \prod_{i=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega'_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}}$$

$$\begin{cases} \omega_i = \alpha \omega'_i & \text{avec } \alpha > 1 \\ \omega'_{i+1} = \eta \omega_i & \text{avec } \eta > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad n = 1 - \frac{\log \alpha}{\log \alpha \eta}$$

Représentation d'état de l'opérateur

On obtient

$$M_I \dot{\underline{x}}_I = A_I \underline{x}_I + \underline{B}_I u$$

$$M_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \omega_1 & -\omega_1 & & & \vdots \\ 0 & \omega_2 & -\omega_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_N & -\omega_N \end{bmatrix}$$

$$B_I = \begin{bmatrix} G_n \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou de manière équivalente :

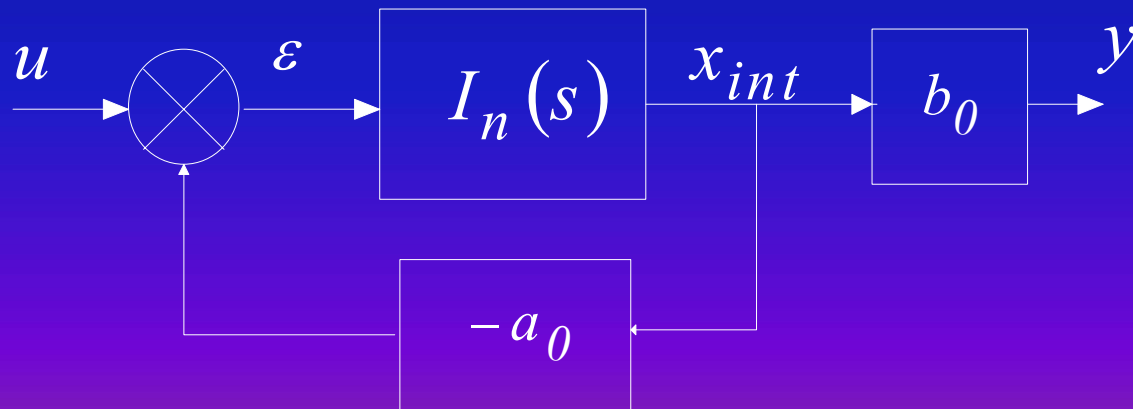
avec

$$\dot{\underline{x}}_I = \underline{A}_I^* \underline{x}_I + \underline{B}_I^* u$$

$$\begin{cases} \underline{A}_I^* = \underline{M}_I^{-1} \underline{A}_I \\ \underline{B}_I^* = \underline{M}_I^{-1} \underline{B}_I \end{cases}$$

Système d'ordre non entier :

Soit le système $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + s^n}$ (où $0 < n < 1$)



Représentation d'état d'un système non entier

On obtient la représentation d'état globale :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u \\ y = \underline{C}^T \underline{x} \end{cases}$$

avec

$$\underline{A} = \underline{A}_I^* + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \underline{B}_I^*, \quad \underline{C}^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad b_0]$$

Plan de l'exposé

1 - Rappel sur les intégrateurs fractionnaires

 2 - **Méthode d'identification**

3 - Etude en simulation numérique

4 - Exemple sur système réel

5 - Conclusions

Identification par erreur de sortie

Considérons le modèle d'état global du système :

$$\underline{\dot{x}} = A(\underline{\theta}) \underline{x} + B(\underline{\theta}) u$$

$$y = \underline{C}^T(\underline{\theta}) \underline{x} + D(\underline{\theta}) u$$

On définit l'erreur de prédiction de sortie

$$\varepsilon_k = y_k^* - \hat{y}_k(u, \hat{\underline{\theta}})$$

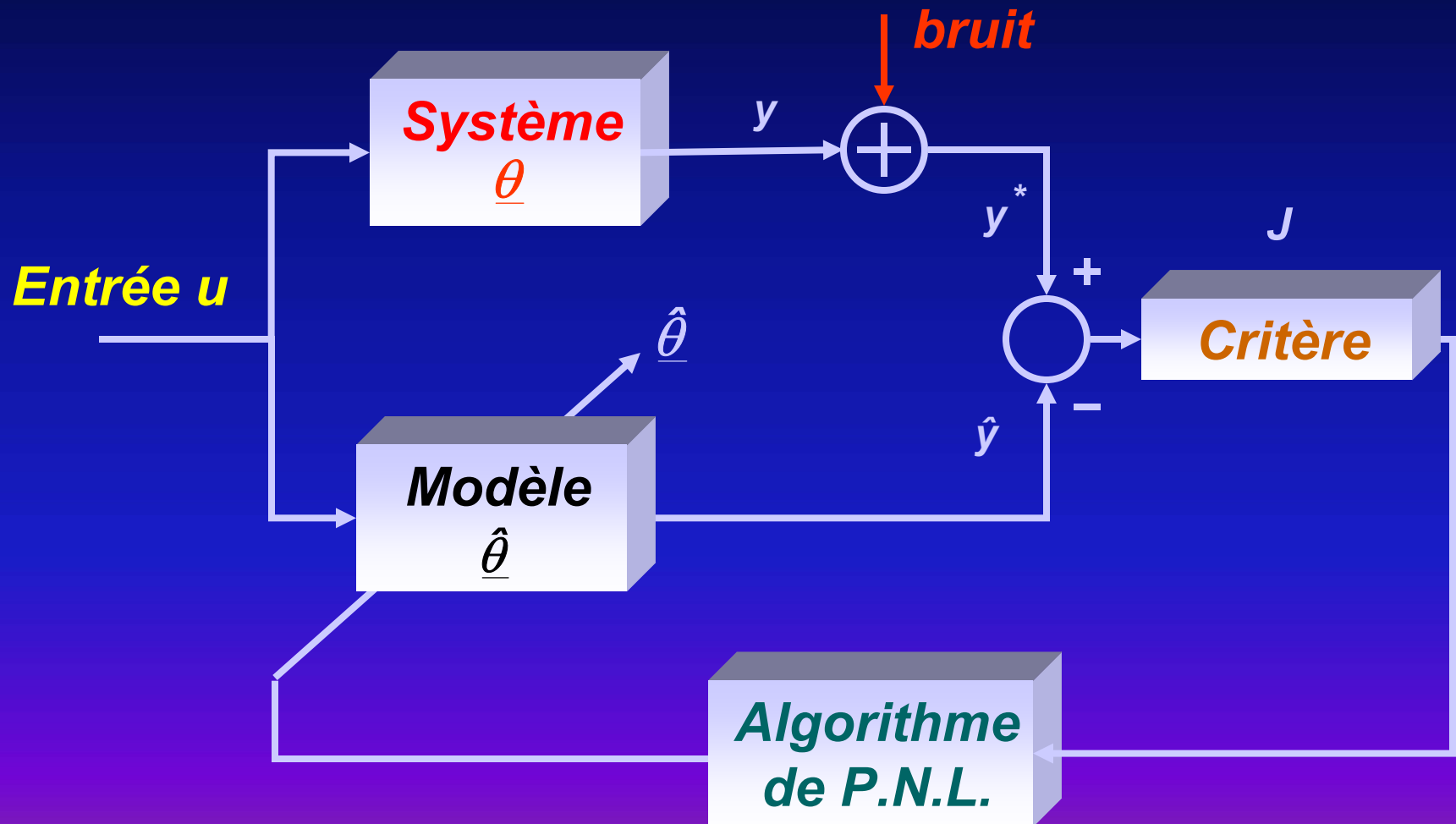
mesure : $y_k^* = y_k + b_k$

modèle

On cherche $\hat{\underline{\theta}}$ qui minimise :

$$J = \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^2$$

Principe des algorithmes à erreur de sortie



Identification par erreur de sortie

Algorithme d'identification

$$\underline{\theta}_{i+1} = \underline{\theta}_i - \left\{ [J''_{\theta\theta} + \lambda I]^{-1} \underline{J}'_{\theta} \right\}_{\hat{\theta}=\underline{\theta}_i}$$

avec

$$\underline{J}'_{\theta} = -2 \sum_{k=1}^K \varepsilon_k \underline{\sigma}_{k,\underline{\theta}_i} \quad : \text{gradient}$$

$$J''_{\theta\theta} \approx 2 \sum_{k=1}^K \underline{\sigma}_{k,\underline{\theta}_i} \underline{\sigma}_{k,\underline{\theta}_i}^T \quad : \text{hessien}$$

$$\underline{\sigma}_{k,\underline{\theta}_i} = \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \underline{\theta}_i} \quad : \text{fonction de sensibilité}$$

λ : paramètre de contrôle

Plan de l'exposé

1 - Rappel sur les intégrateurs fractionnaires

2 - Méthode d'identification

 3 - Etude en simulation numérique

4 - Exemple sur système réel

5 - Conclusions

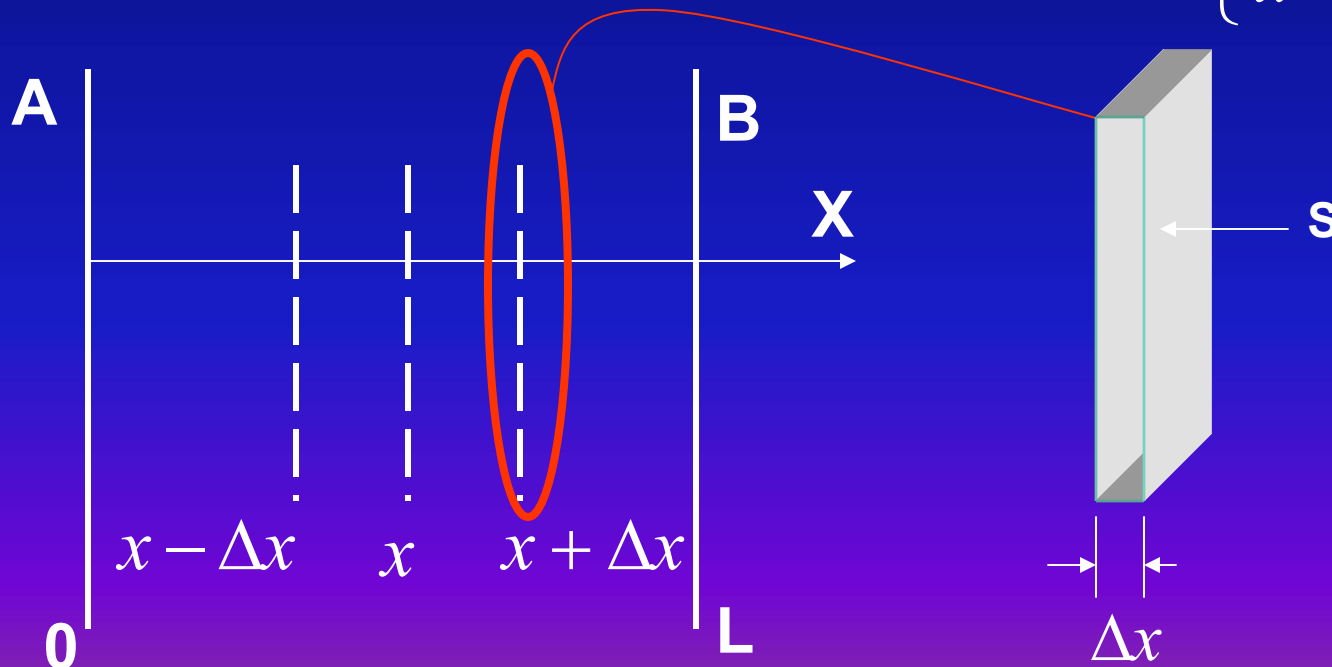
Simulation numérique du mur par différences finies

Pour résoudre numériquement l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

On discrétise spatialement le mur avec

$$\begin{cases} L = I \Delta x \\ x = i \Delta x \end{cases}$$



Chaque tranche, de section S , possède :

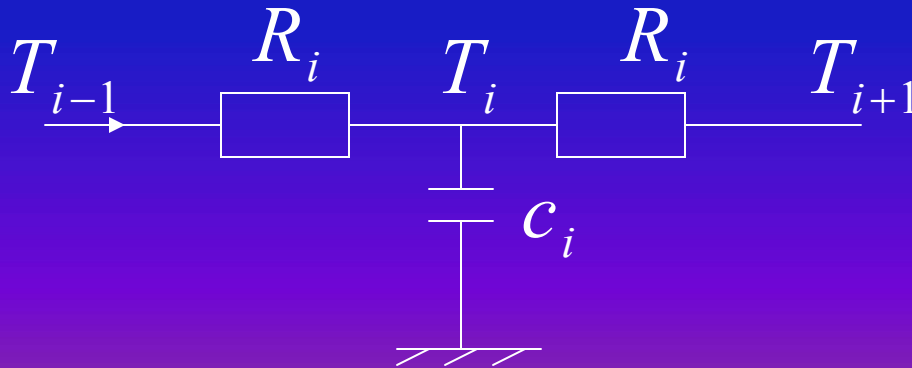
- une résistance thermique

$$R_i = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{s}$$

- une capacité thermique

$$C_i = \rho c s \Delta x$$

Ce qui conduit pour l'abscisse $x = i\Delta x$:



$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{R_i C_i} (T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1})$$

avec

$$R_i C_i = \frac{\rho c}{\lambda} \Delta x^2$$

Conditions aux limites:

en A : on impose $\phi(0,t)$

en B : on impose $T(L,t)$

On obtient ainsi un système de I équations différentielles.

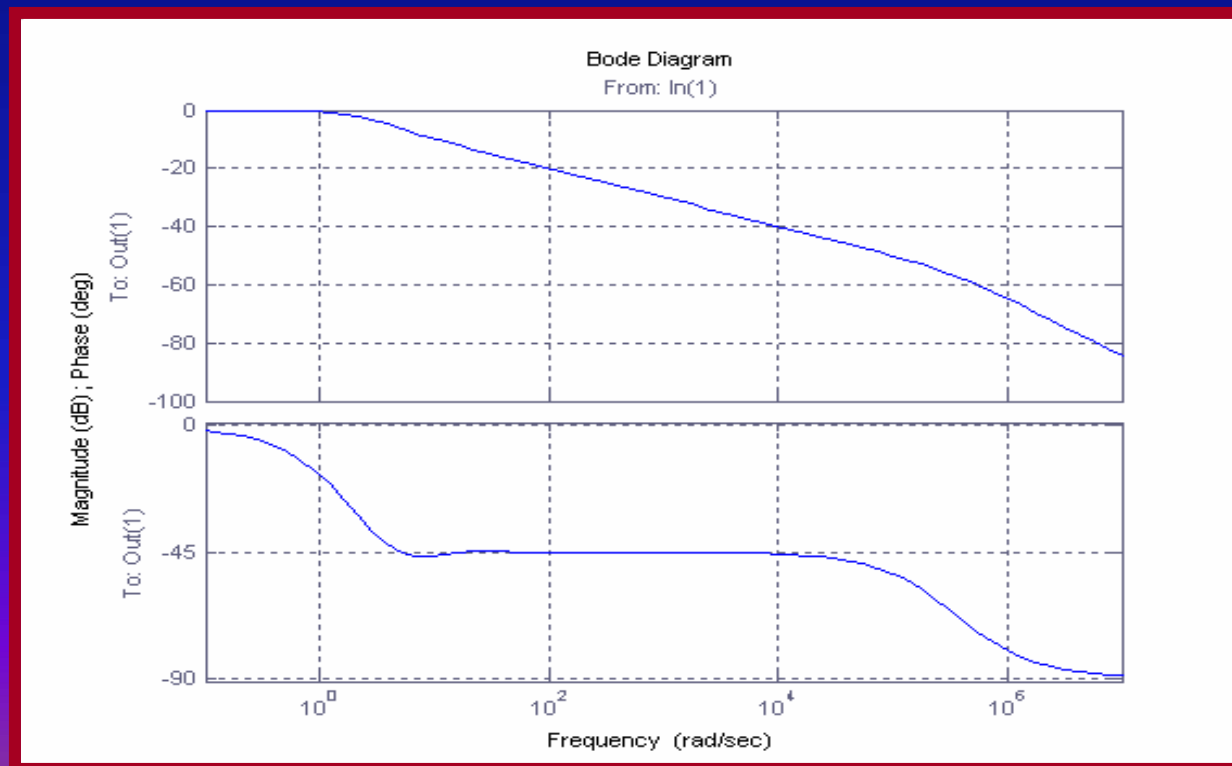
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_{I-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{R_i C_i} & \frac{2}{R_i C_i} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{R_i C_i} & \frac{-2}{R_i C_i} & \frac{1}{R_i C_i} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \frac{1}{R_i C_i} & \frac{-2}{R_i C_i} & \frac{1}{R_i C_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{R_i C_i} & \frac{-2}{R_i C_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_{I-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \frac{\Phi(0,t)}{C_i} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{T(L,t)}{R_i C_i} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{x}} = [A]\underline{x} + \underline{u} \quad \text{avec} \quad \dim(\underline{x}) = I$$

En pratique: $T(L,t) = \text{cte.}$

$\Phi(0,t)$ est l'excitation
 $T(0,t)$ est la sortie } à l'interface A

L'analyse harmonique de ce modèle, avec $I=300$



Cas d'un seul intégrateur

On considère le système d'ordre non entier

$$H_n(s) = \frac{b_0}{a_0 + s^n}, \quad 0 < n < 1$$

On définit les paramètres à estimer

$$\underline{\hat{\theta}}^T = [a_0 \quad b_0 \quad \alpha]$$

Cas de deux intégrateurs

Son transfert est le suivant:

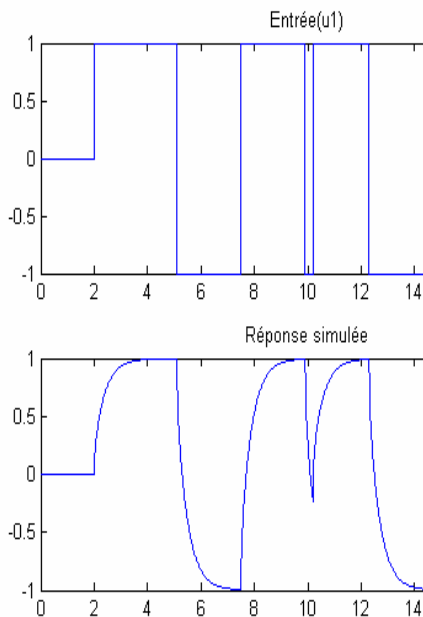
$$H_{n_1, n_2}(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{n_1}}{a_0 + a_1 s^{n_1} + s^{n_1+n_2}}, \quad n_2 = 0.5$$

$$\underline{\hat{\theta}}^T = [a_0 \quad a_1 \quad b_0 \quad b_1 \quad \alpha_1]$$

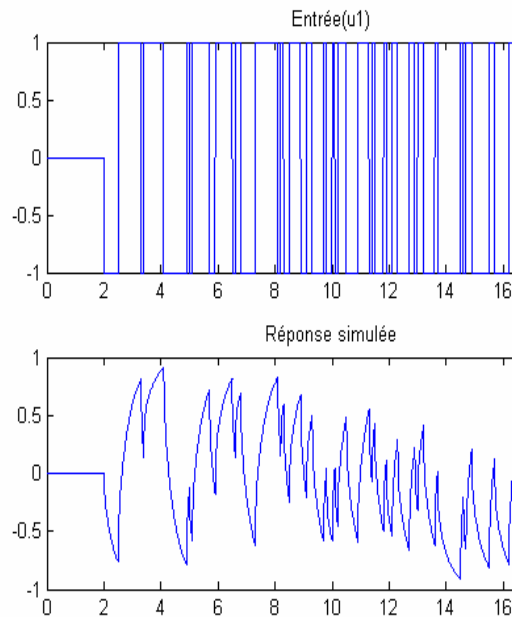
Protocole de simulation

On excite par une SBPA ($\phi(0,t)$) et on mesure la sortie simulée correspondante, non bruitée. On a testé différentes excitations.

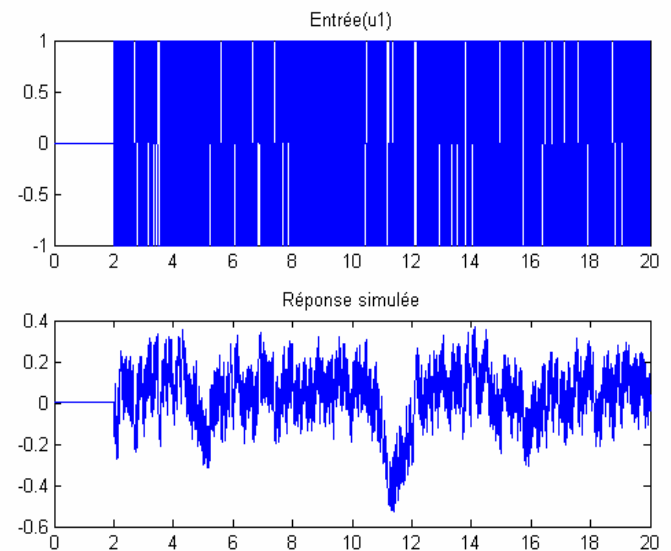
Excitation pauvre



Excitation moyenne



Excitation riche



Les paramètres estimés pour l'excitation moyenne sont :

Modèle un intégrateur $H_n(s)$

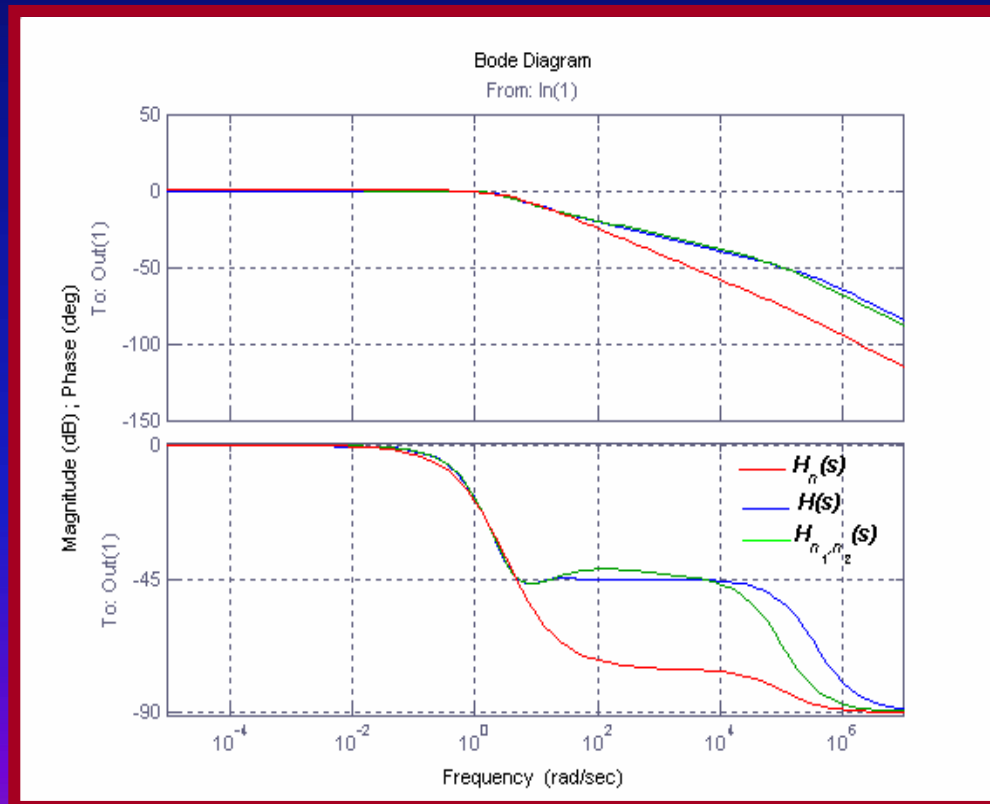
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_0 = 1.9942 \\ \hat{b}_0 = 2.2242 \\ \hat{n} = 0.7365 \end{array} \right.$$

Modèle deux intégrateurs $H_{n1,n2}(s)$

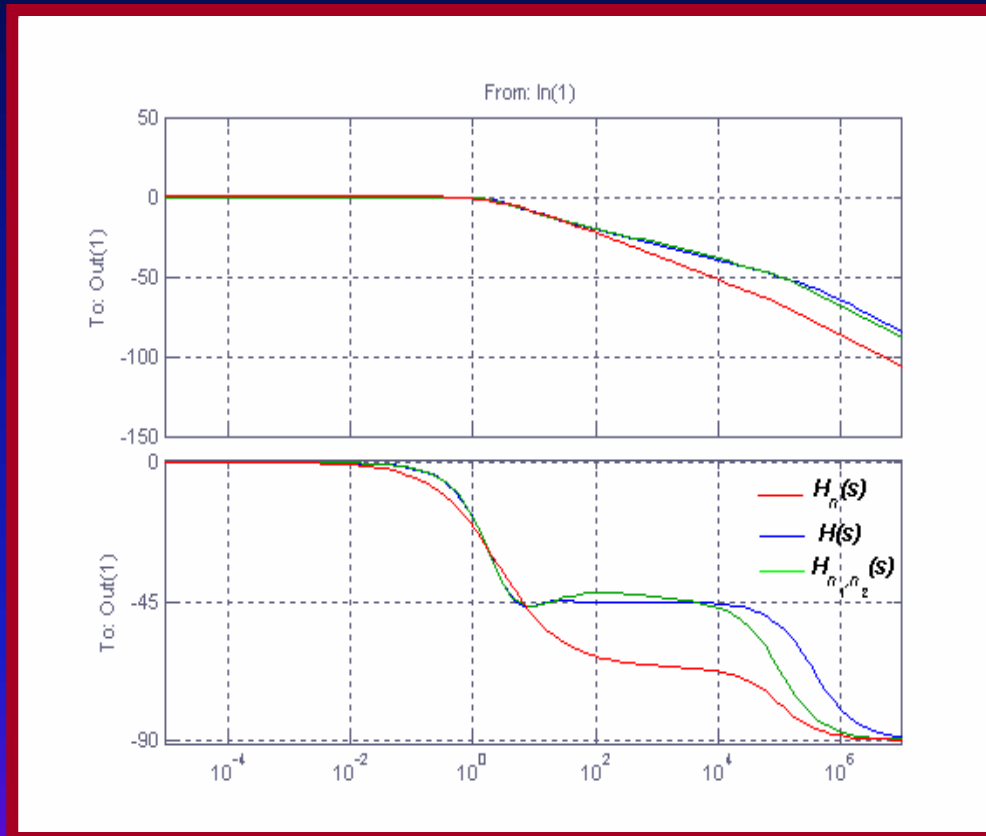
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_0 = 5.0537 \\ \hat{a}_1 = 2.0933 \\ \hat{b}_0 = 5.0588 \\ \hat{b}_1 = 1.1547 \\ \hat{n}_1 = 0.8349 \end{array} \right.$$

Pour chaque essai, on a identifié $H_n(s)$ et $H_{n_1, n_2}(s)$ et comparé les réponses harmoniques de ces modèles avec la réponse théorique.

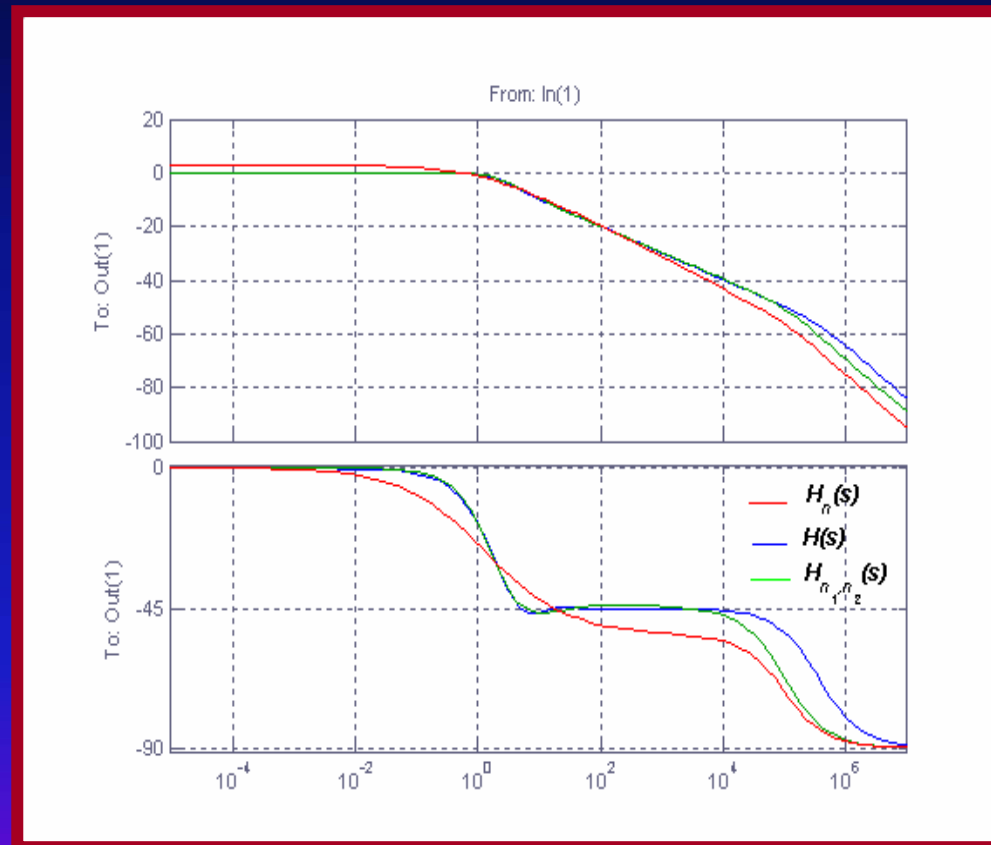
Réponses fréquentielles



Réponses fréquentielles



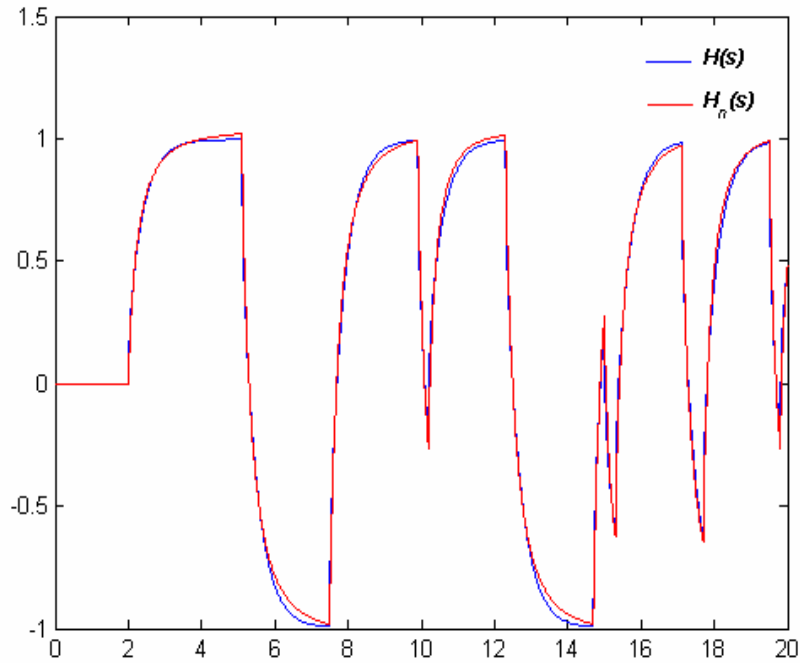
Réponses fréquentielles



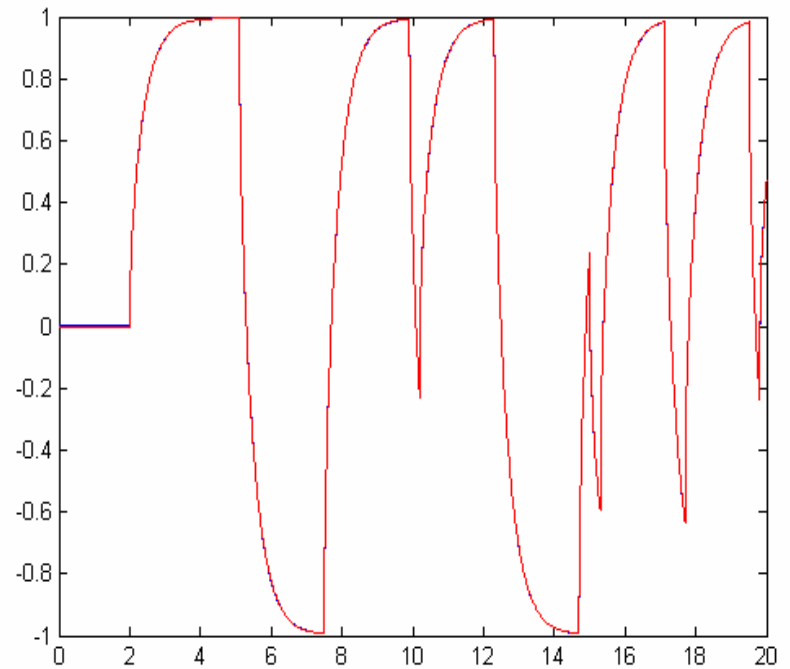
Réponses temporelles

Excitation pauvre

$H(s)$ et $H_n(s)$

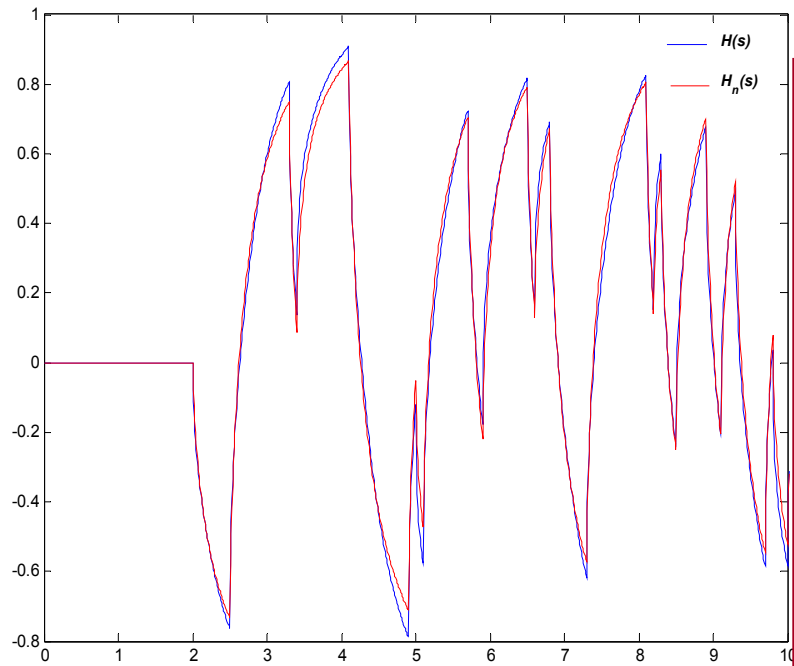


$H(s)$ et $H_{n1,n2}(s)$

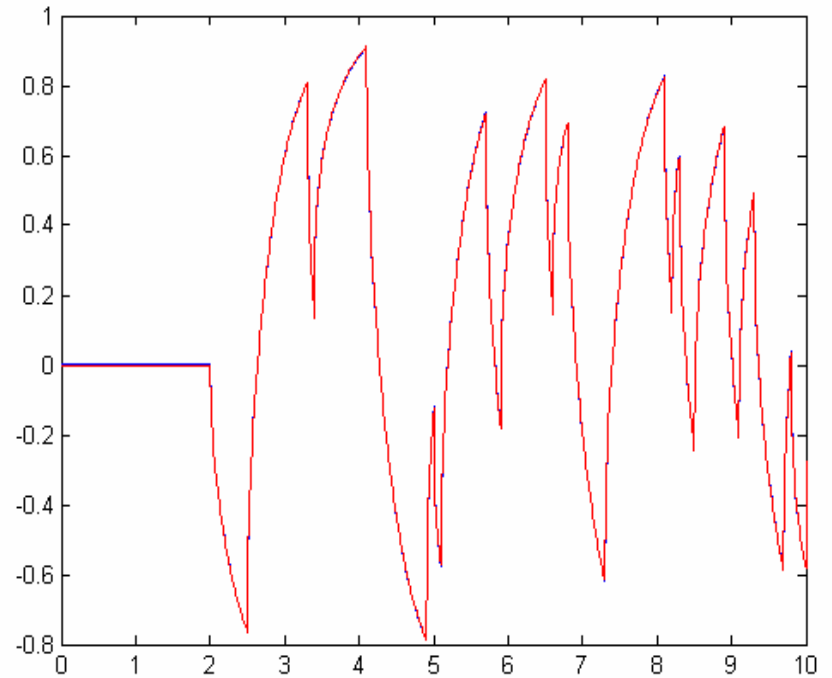


Excitation moyenne

$H(s)$ et $H_n(s)$

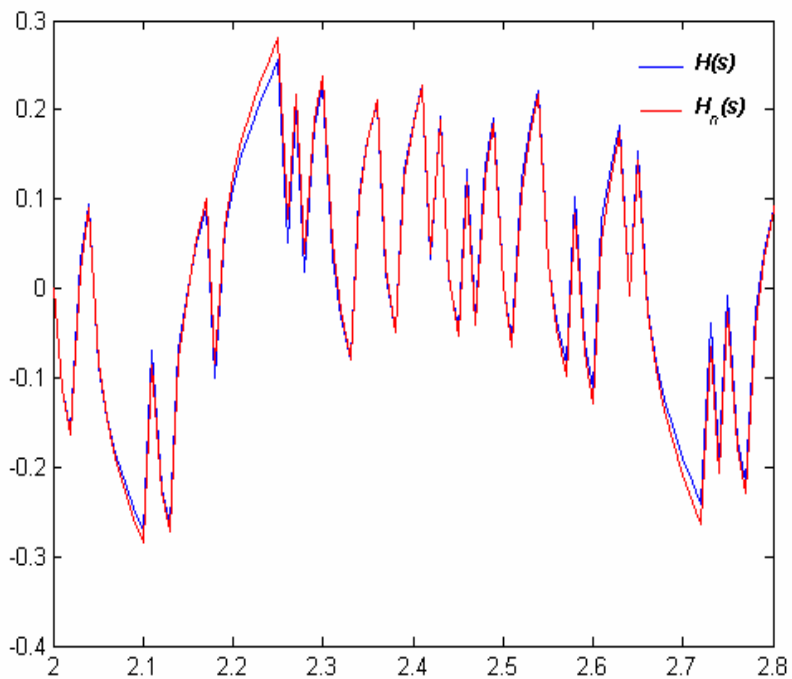


$H(s)$ et $H_{n1,n2}(s)$

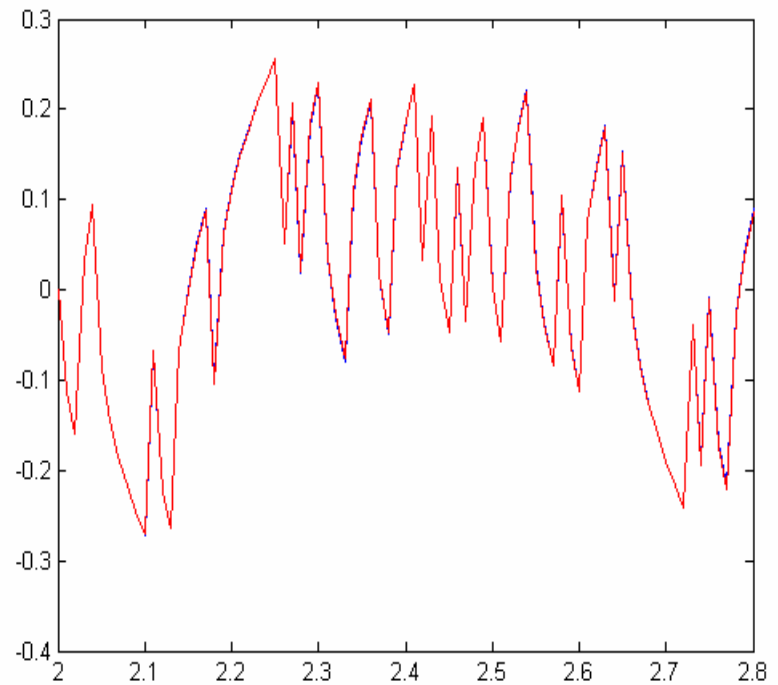


Excitation riche

$H(s)$ et $H_n(s)$



$H(s)$ et $H_{n1,n2}(s)$



Plan de l'exposé

1 - Rappel sur les intégrateurs fractionnaires

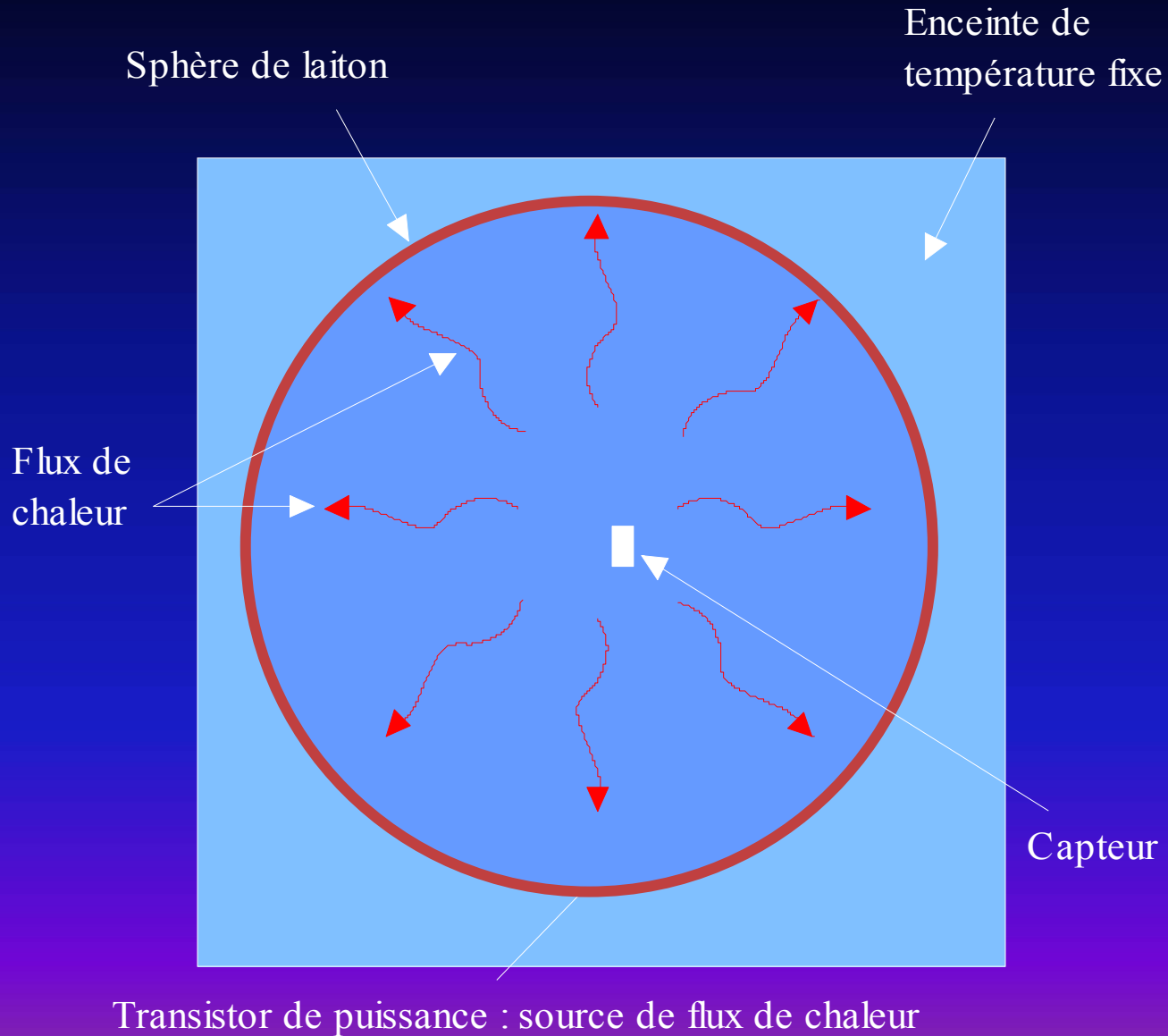
2 - Méthode d'identification

3 - Etude en simulation numérique

 4 - Exemple sur système réel

5 - Conclusions

Description



L'identification sur le système réel a donné les résultats suivants:

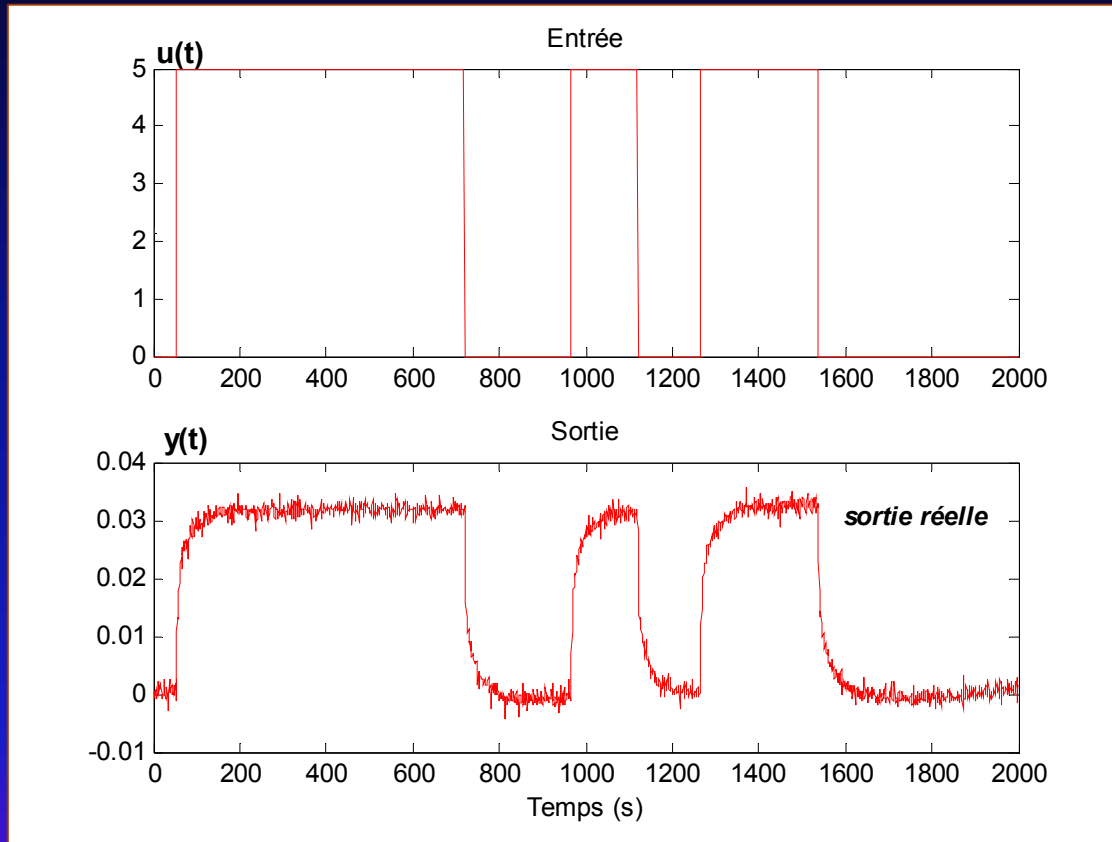
Modèle un intégrateur $H_n(s)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_0 = 0.2058 \\ \hat{b}_0 = 0.0013 \\ \hat{n} = 0.7736 \end{array} \right.$$

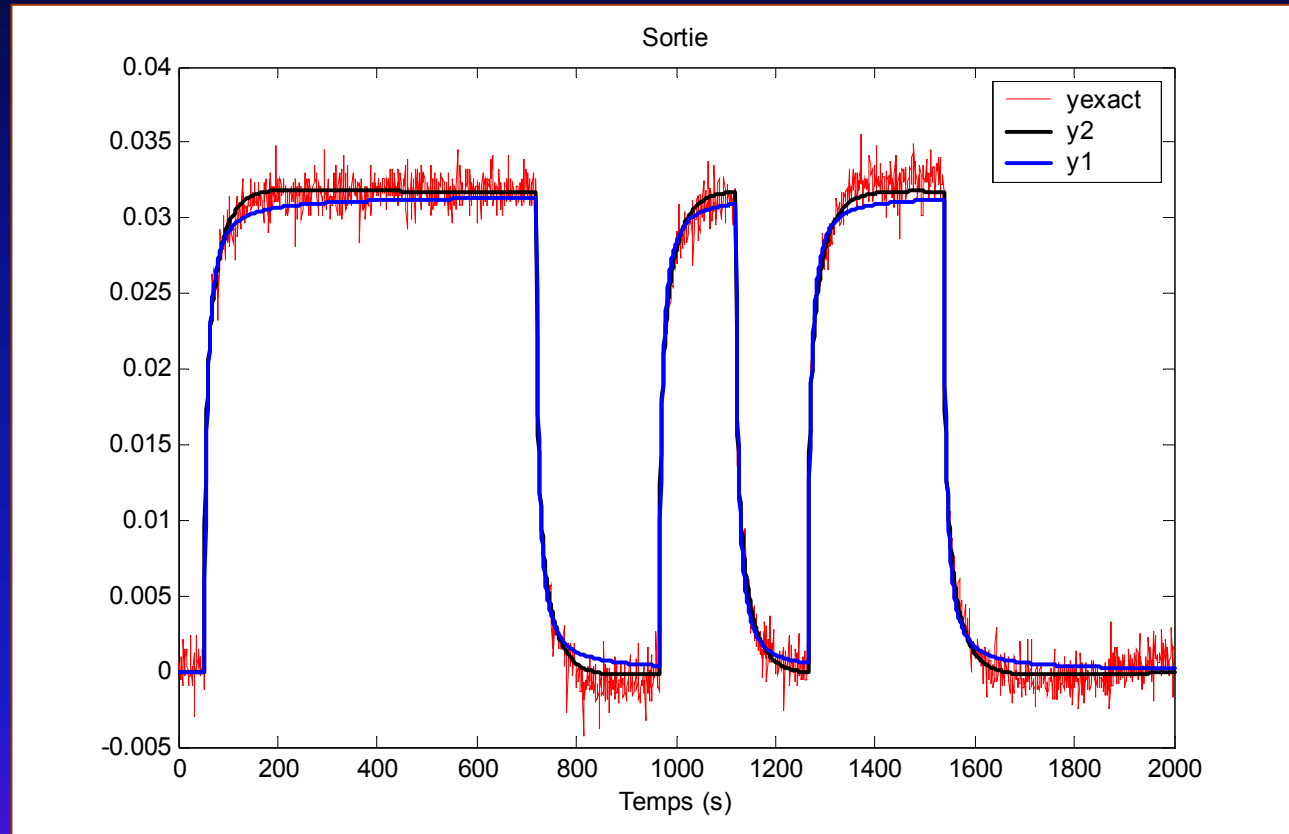
Modèle deux intégrateurs $H_{n1,n2}(s)$

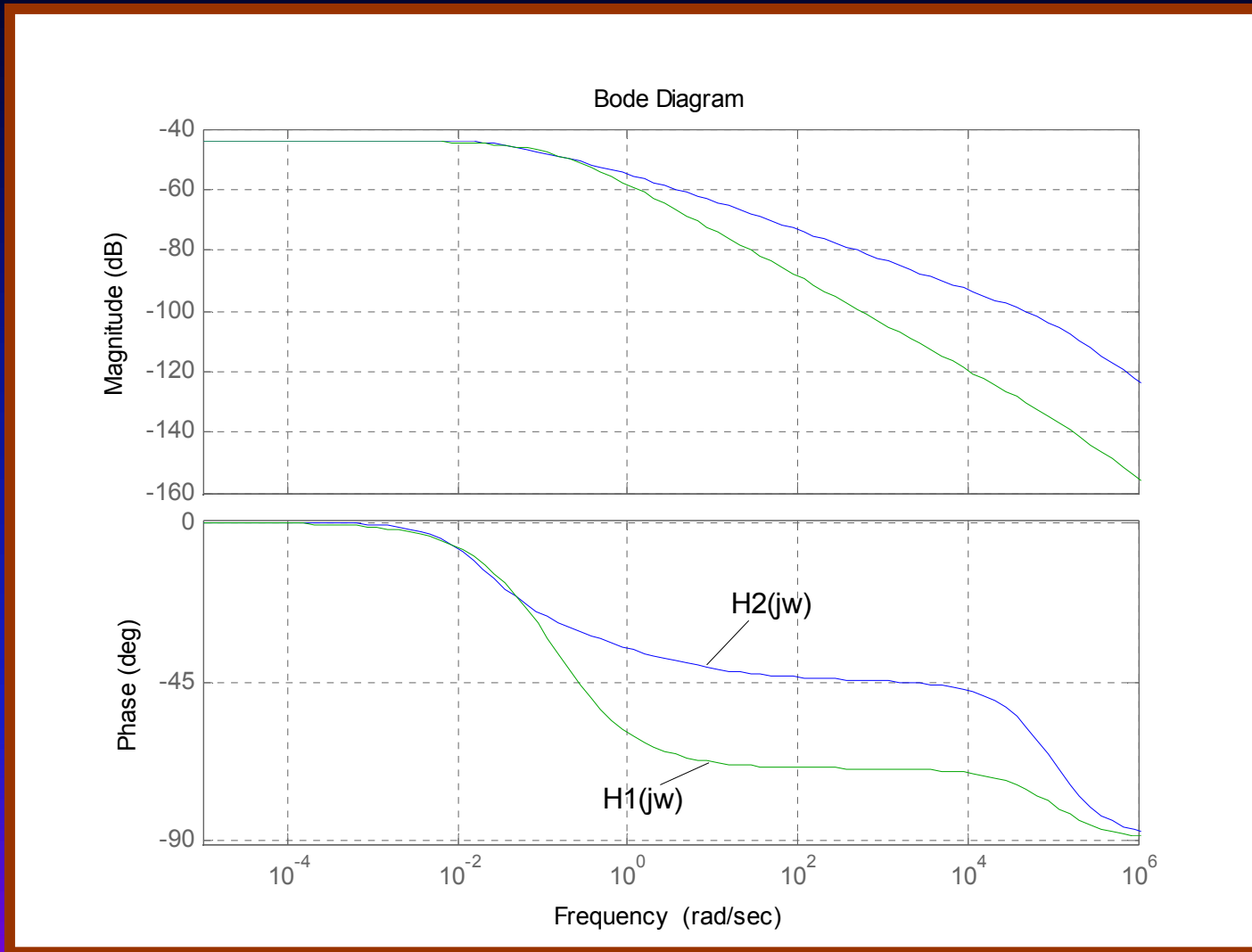
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_0 = 0.0171 \\ \hat{a}_1 = 0.3509 \\ \hat{b}_0 = 1.08 \cdot 10^{-4} \\ \hat{b}_1 = 0.022 \\ \hat{n}_1 = 0.7719 \end{array} \right.$$

Exemple sur système réel




Exemple sur système réel





Plan de l'exposé

- 1 - Rappel sur les intégrateurs fractionnaires
- 2 - Méthode d'identification
- 3 - Etude en simulation numérique
- 4 - Exemple sur système réel
-  5 - Conclusions

- *Modélisation et identification des systèmes fractionnaires à l'aide d'un opérateur d'intégration non entier*
- *Amélioration de l'approximation fréquentielle à l'aide d'un modèle à deux intégrateurs non entier*
- *Nouveaux travaux pour la validation des modèles avec différentes géométries*