

GEOMETRIE FRACTALE  
ENTROPIE  
ENERGIE

*A. Le MEHAUTE, L. NIVANEN, A EL KABOUCI, R. NIGMATULLIN\**  
*ISMANS 44, Avenue Bartholdi, F. 72 000 Le Mans France*  
*\*Université de Kazan, Kazan, Tartastan Russie*

## Sommaire:

$\delta$ -transfert sur un objet fractal : intégrodifférentiation fractionnaire

Critique de la notion de vitesse : l'agilité

Généralisation de la fonction exponentielle: algèbre non extensive

Topologie du tore ponctué  $H/H$  et  $\varphi^2H$ -condensa

Thermodynamique fractionnaire

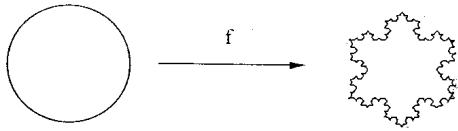
Nouveau traitement du signal

# 1

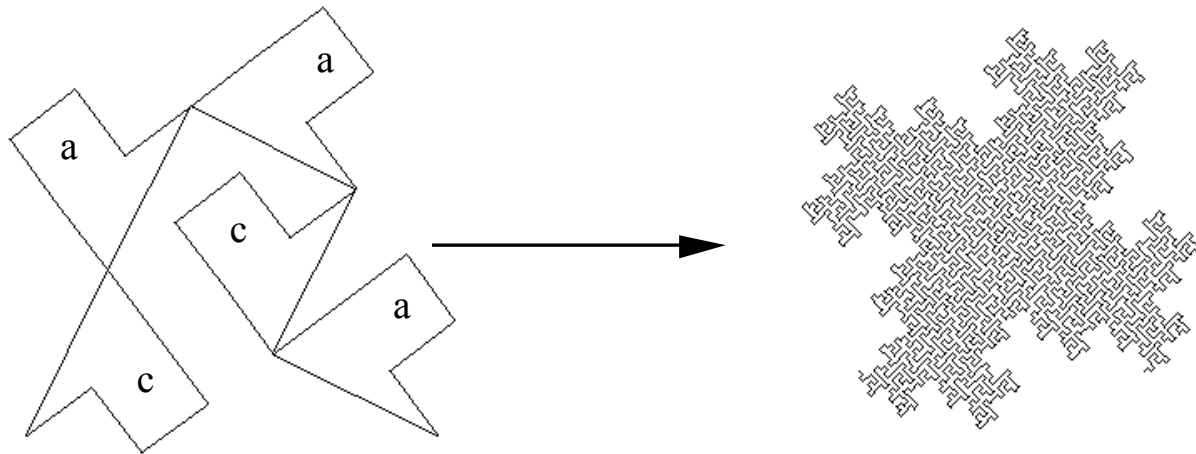
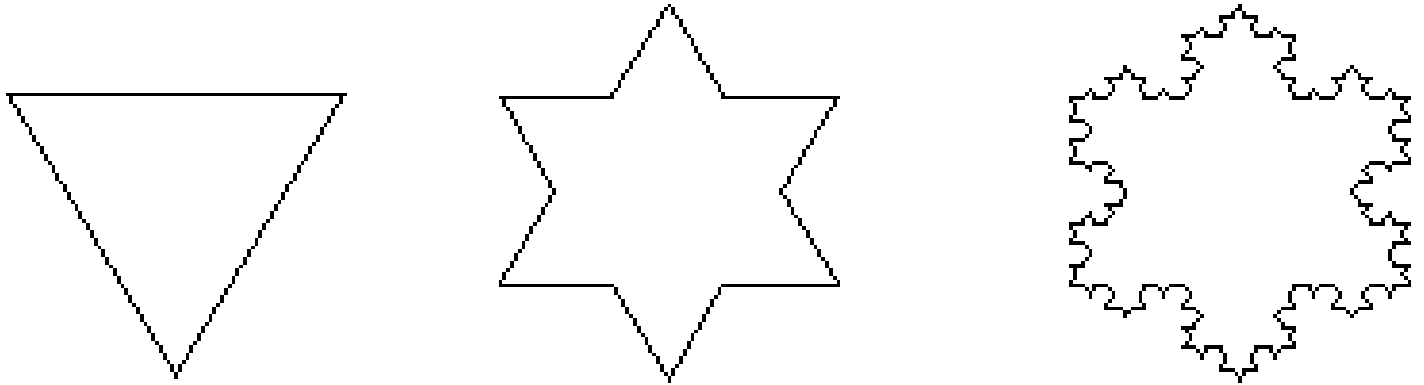
‘Pour être cohérente les dynamiques en géométrie fractale nécessite le remplacement des équations différentielles d’ordre entier par des équations différentielles d’ordre non entier’. Cette affirmation qui fait encore débat n’en est pas moins une piste dont la puissance heuristique est incontestable. Nous nous proposons de le montrer

*Fractional differentiation and its Application  
FDA’04 meeting July 2004*

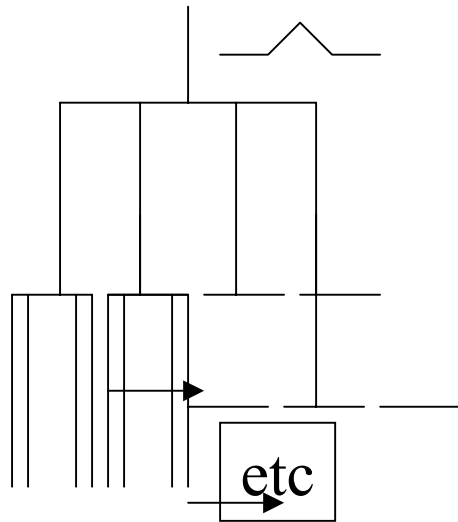
*To be published*



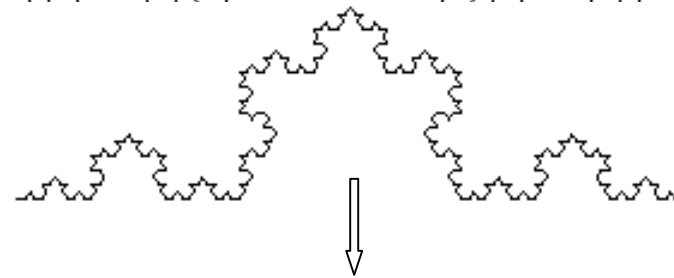
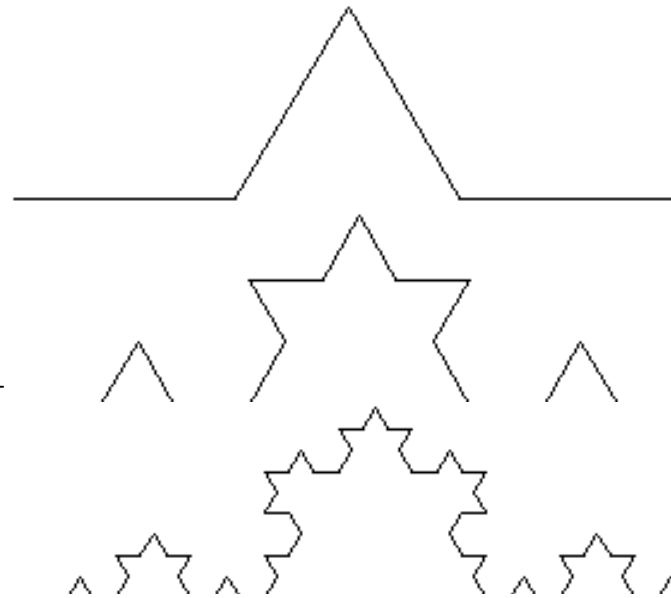
## Conformal and scaling mapping



# Fractal geometry and hyperbolic geometry



Hyperbolicity



Fractal is the boundary

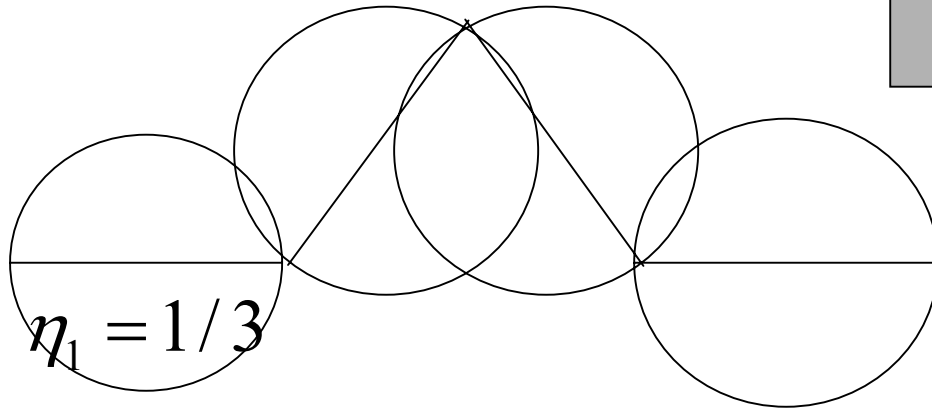
Thickness ?

E or H

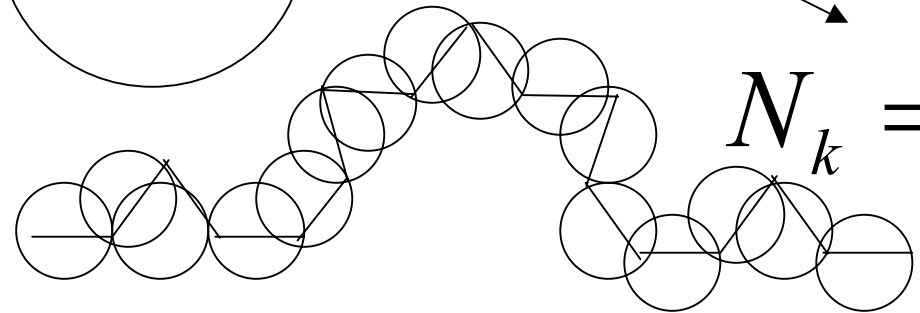
$$N_1 = 4$$

Mesure TEISI sur fractal

$$N\eta^d = 1$$



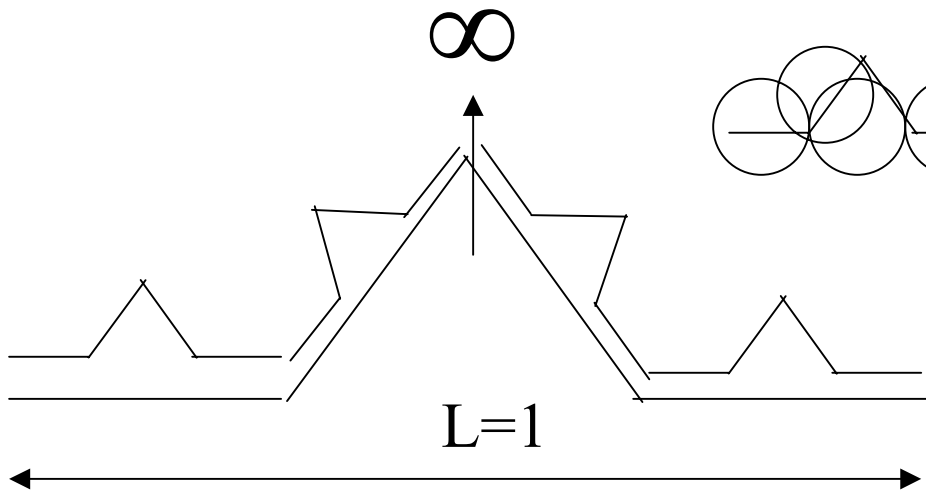
$$N_2 = 4^2$$



$$N_k = 4^k$$

$$\eta_2 = (1/3)^2$$

$$\eta_k = (1/3)^k$$



## Différentes méthodes de mesure sur un ensemble fractal

*Il existe différentes méthodes de mesures possibles  
de la dimension fractale*

*Toutes liées à la dynamique d'appréhension de l'objet fractal  
mais nous ne rentrerons pas dans le détail  
nous nous bornerons ici à considérer le modèle TEISI*

*Courbe et dimension fractale C. Tricot, Ed. Elsevier 1991*


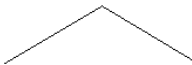


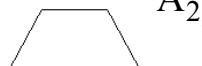

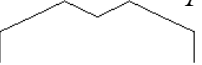
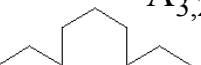
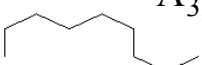
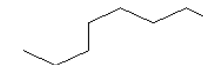
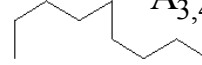

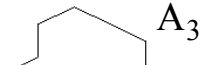

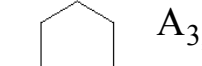
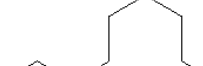
*Modèle TEISI ( aussi TEISA) :*

*CR Acad Sciences 294 (1982) II page 835*

*Solid state ionics 9-10 (1983) Page 17*

*J. Stat. Physics 36 5/6 (1984) page 665*

## Thickness boundary and language for parametrization

				$A_0$	$n = 0$
				$A_1$	$n = 1$
 $A_{2,1}$	 $A_{2,2}$	 $A_{2,3}$			$n = 2$
 $A_{3,1}$	 $A_{3,2}$	 $A_{3,3}$			$n = 3$
		 $A_{3,4}$			
		 $A_{3,5}$			
		 $A_{3,6}$			


Folding of the boundary

Nous partons de l'idée qu'il existe une relation entre  
Dérivation fractionnaire et dimension fractale

En avançant nous montrerons que la dimension fractale  
étant un concept mathématique peu robuste nous serons conduit  
à nous tourner vers la courbure sur des espaces hyperboliques  
étant entendu qu'il existe une relation étroite  
entre fractalité et hyperbolicité

# Dimension Fractale et Equations Différentielles d'Ordre Non Entier

Espace de Fourier

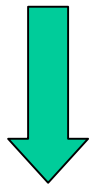
La clé :  $\left\{ \begin{array}{ll} \times i\omega & \text{Dérivation} \\ \div i\omega & \text{Intégration} \end{array} \right.$    $\times (i\omega)^{1/d}$

**Références:** *Fractional Differentiation and its Applications* ( 3 tomes) à paraître

Mesure du Hausdorff:

$$N\eta^d = 1$$

d dimension fractale



Relation fondamentale  
de la dynamique fractale

$$(i\omega)^{1/d} \eta = \mathfrak{N}$$

dimensionnée

$$\mathfrak{N}^{1/d} = [L^d t^{-1}]$$

# Conséquences

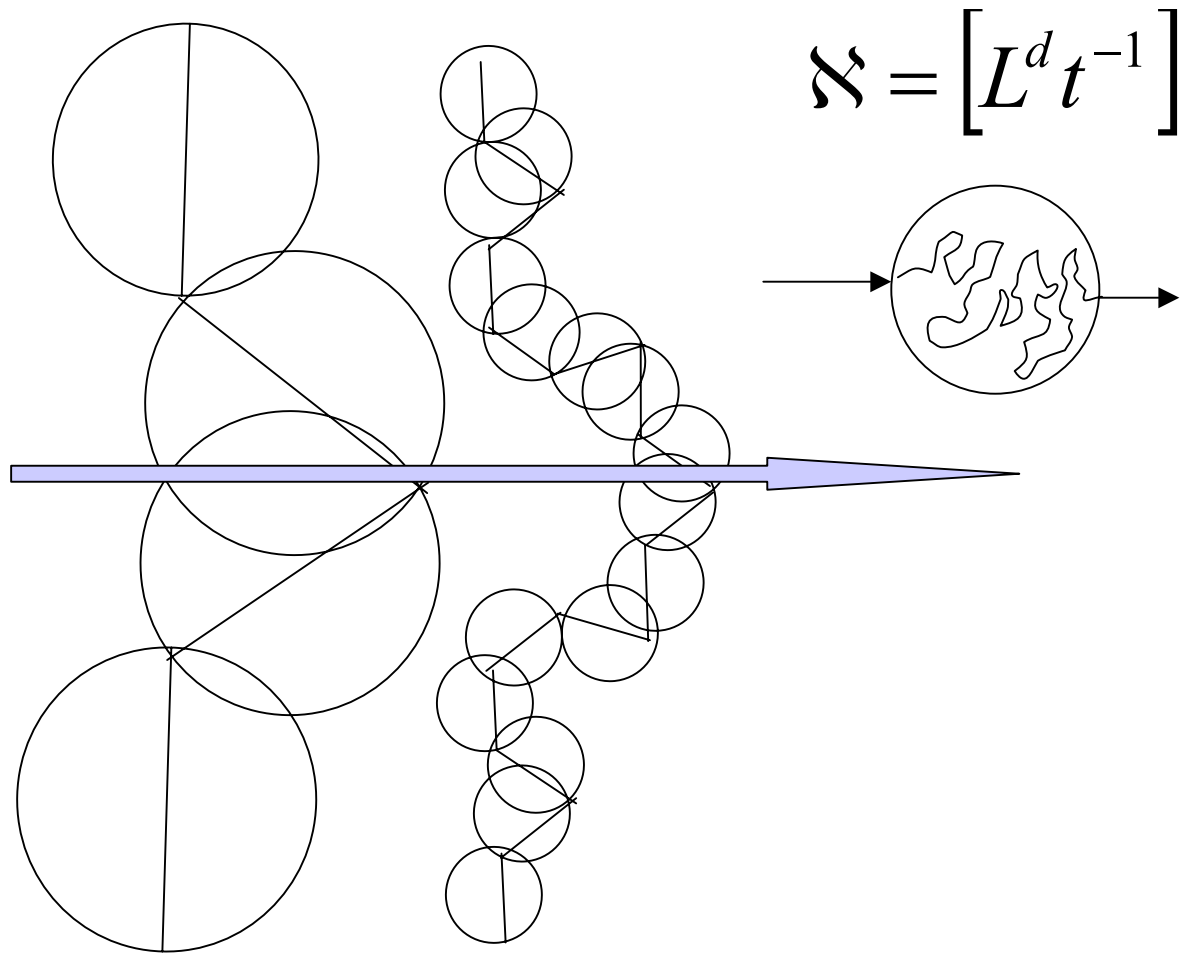
Si $d=1$	Validité du concept de vitesse
Si $d=2$	Validité du concept de diffusion
Si $d=1/2$	Validité du concept de gravitation
Si $d$ différent	Introduction d'une nouvelle physique Changement de paradigme ( $L^d t^{-1}$ )

$$U = [ML^2 t^{-2}] = [\sqrt{M} L^d t^{-1}] [\sqrt{M} L^{2-d} t^{-1}]$$

$$I(t) = L(t) * \phi(t)$$

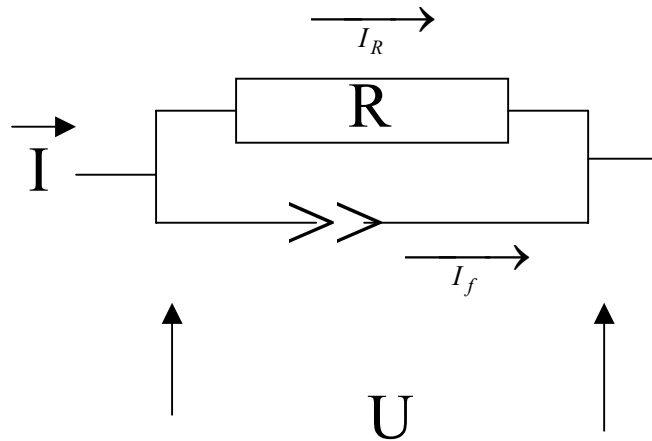
$$\phi(t) = kU(t)$$

\* Convolution



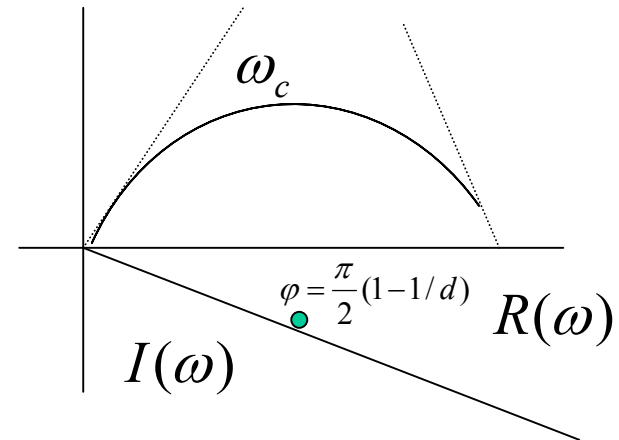
‘Surface’  $L(t)$

# Exemple: limites de la fonction exponentielle 2 le concept de fractance $f$

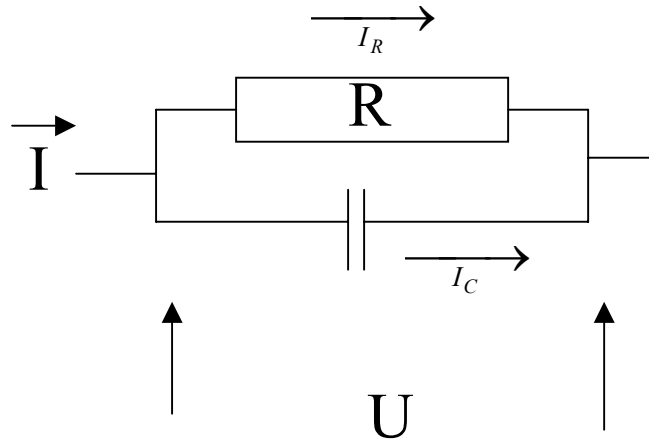


$$Z(\omega) = \frac{U}{U_\infty} = \frac{1}{1 + \left(\frac{i\omega}{\omega_c}\right)^{1/d}}$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(U) = \frac{1}{\tau^\alpha}(U_\infty - U)$$

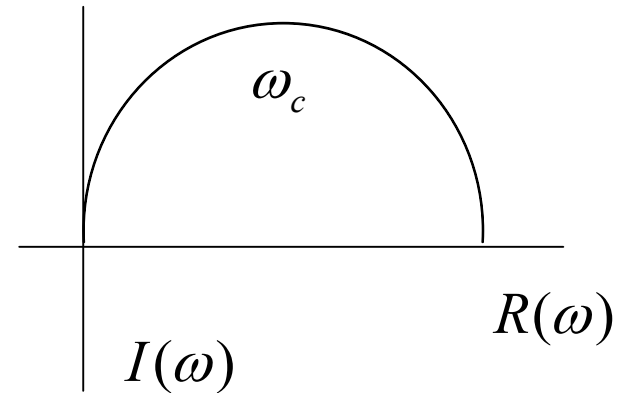


# Exemple: limites de la fonction exponentielle 1



$$Z(\omega) = \frac{U}{U_\infty} = \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{\omega_c}}$$

$\equiv$



$$U - U_\infty = \exp(-t / \tau)$$

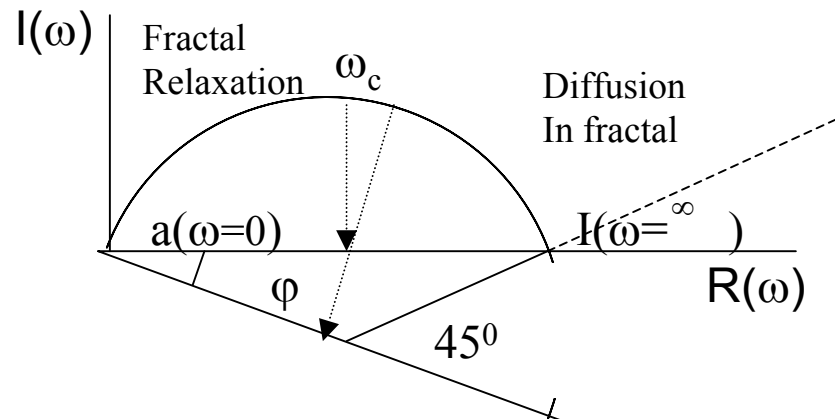
$\equiv$

# Généralisations

Fonction de transfert

$$Z(\omega) = \frac{U}{U_\infty} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{i\omega}{\omega_c}\right)^{1/d}\right]^{1/d}}$$

Fonction de transfert couplées : exemple diffusion en milieu fractal

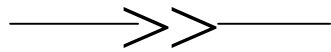


Mais aussi mvt. Brownien en milieu fractal...

# La question de l'entropie

## *Entropie et Rotation de phase*

*Pour comprendre... : le cas de la fractance pure*



$$Z(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^\alpha} \longrightarrow z(t) = t^{\alpha-1}$$

$\alpha = 1$  pas de dissipation

$\alpha \neq 1$  presque sûrement dissipation

*Non réductible à une  
résistance*

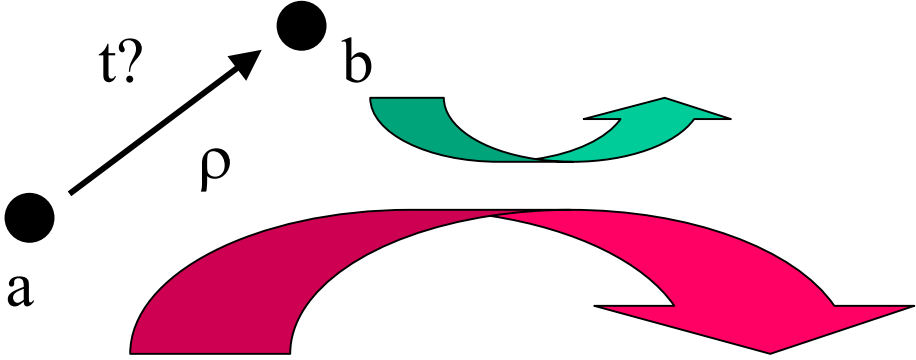
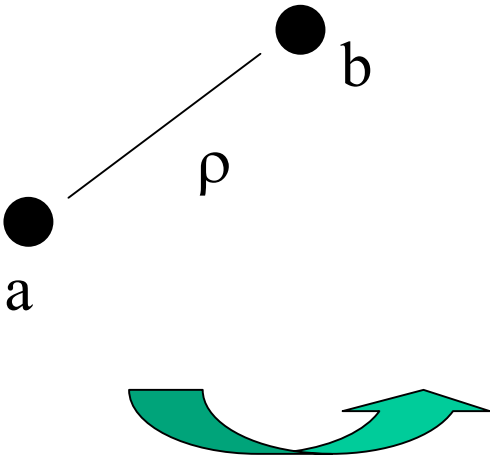
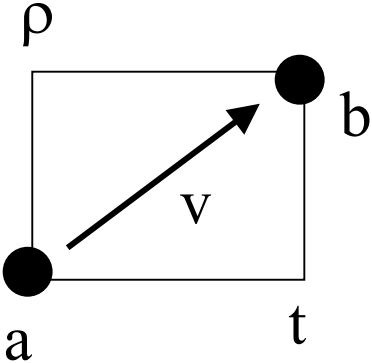
*La rotation de phase  
induit la dissipation*

Voir aussi M. Berry

# AGILITE

# Couplage Temps/Espace ?

Vitesse ?

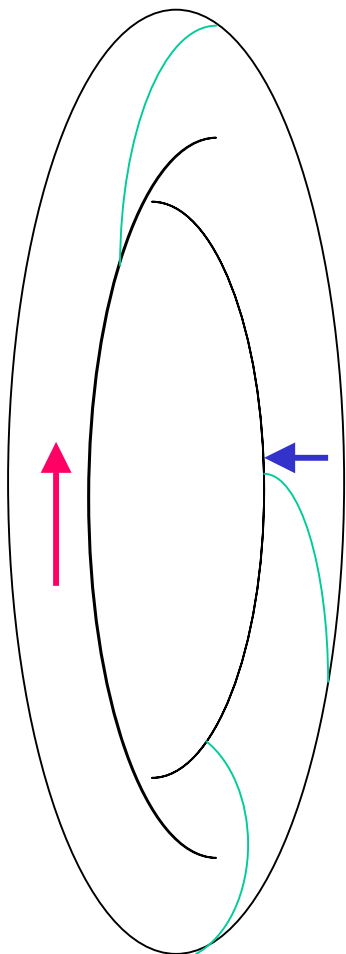


Agilité

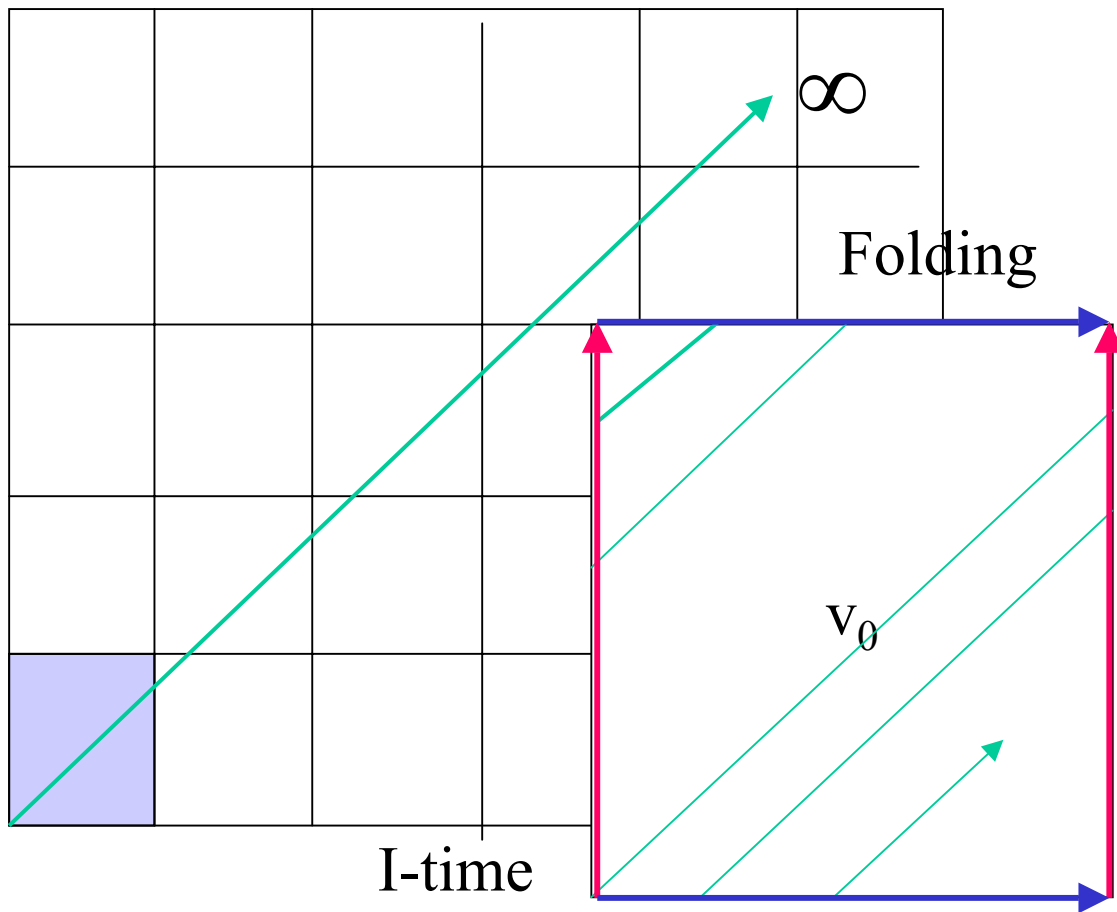
Espace de phase 2H

# Two displacements

2D

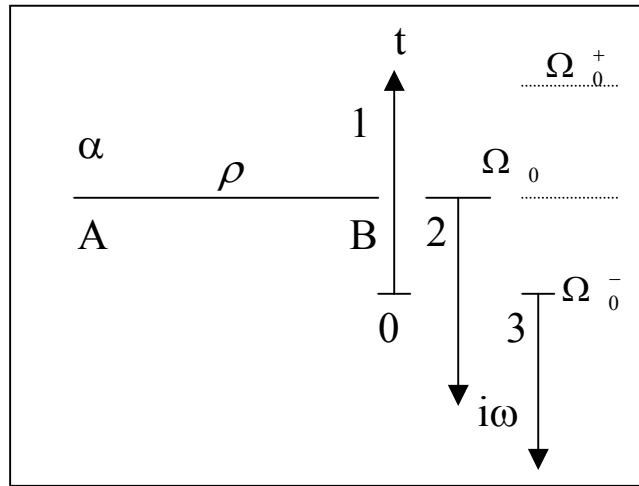


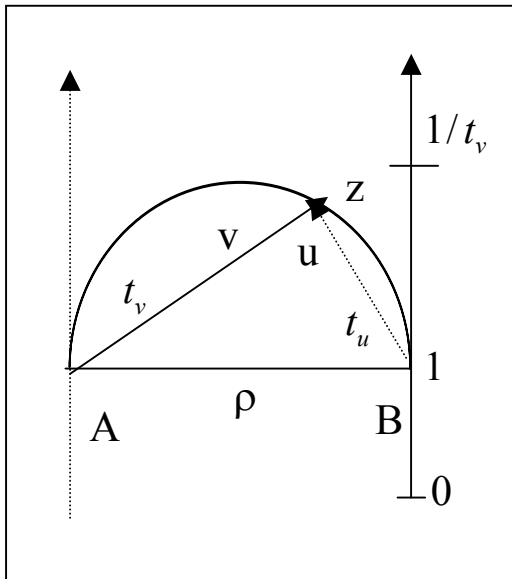
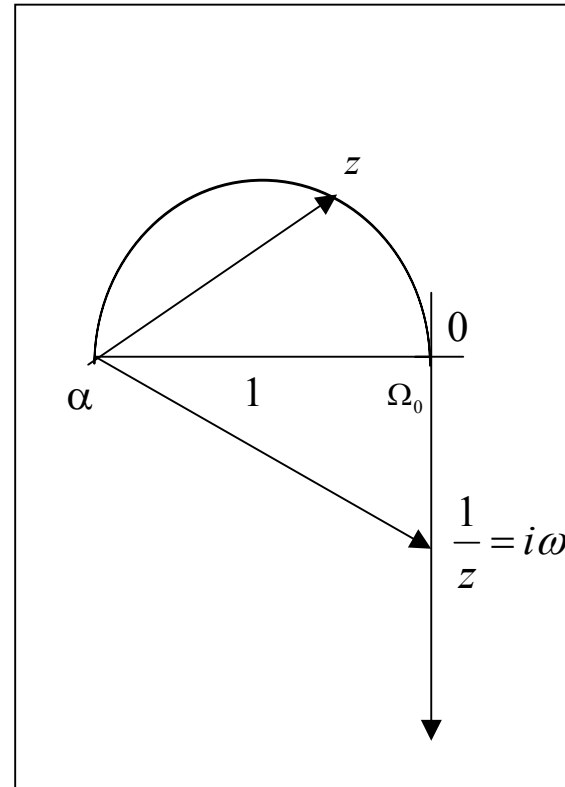
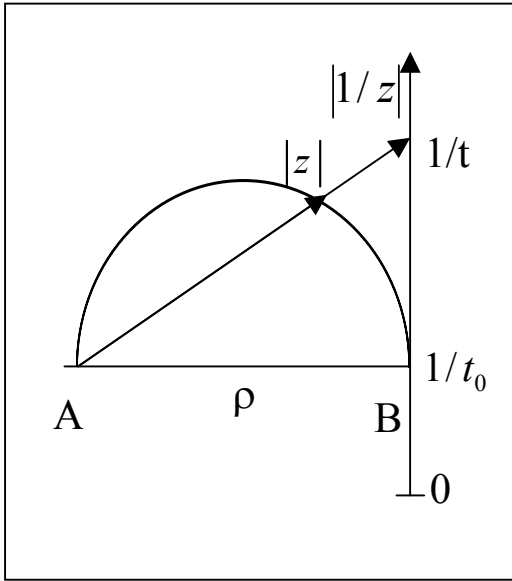
Distance

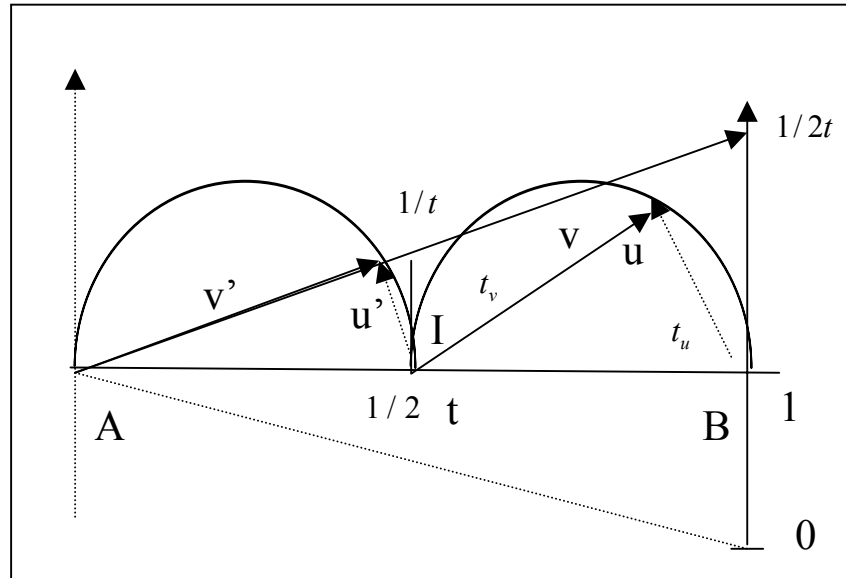


# Agility *versus* Velocity

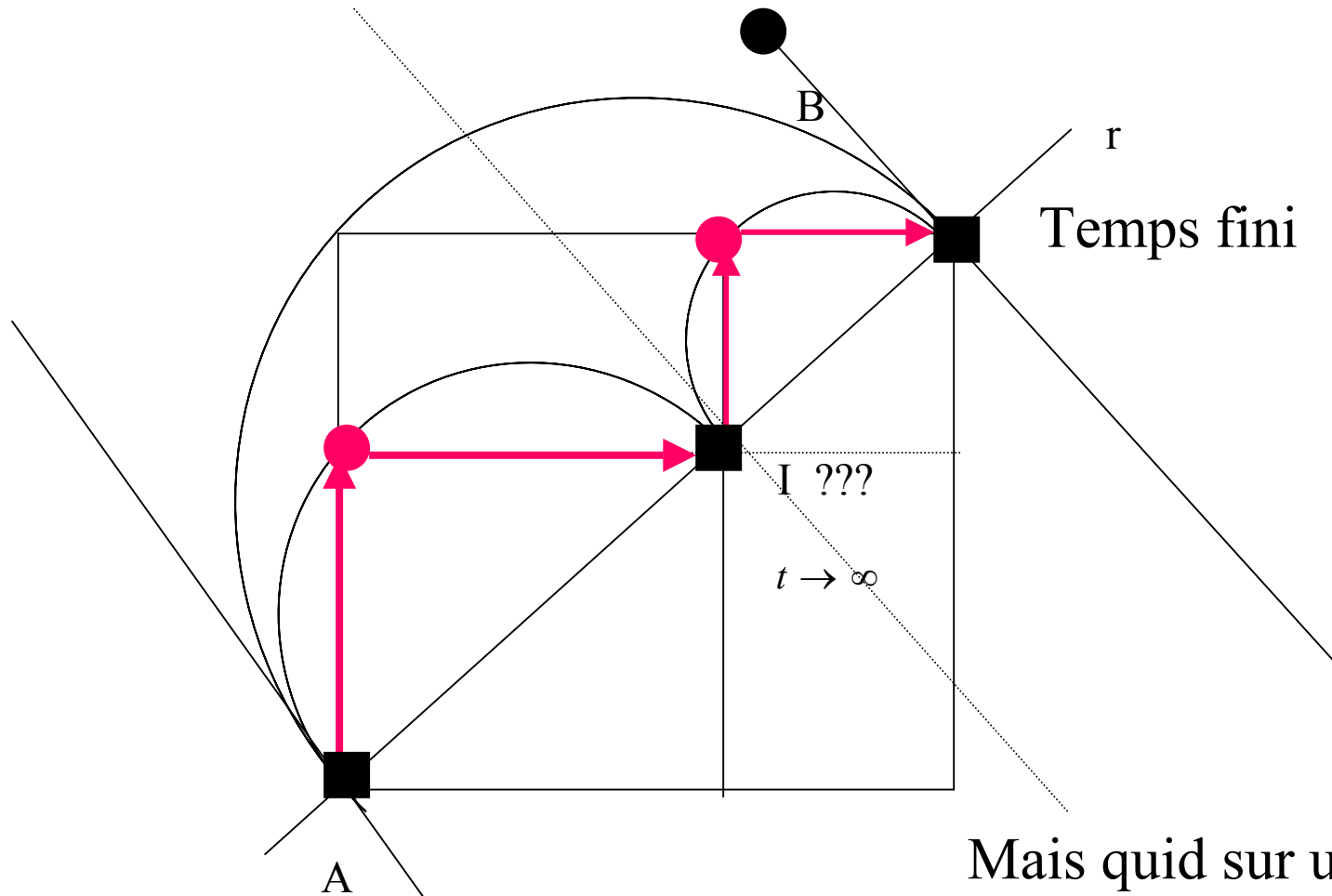
	$L$	$1/L$
$t$	$Lt^{-1}$ Velocity	$1 / Lt$ Agility
$\omega=1/t$	$Lt$ Agility	$1 / Lt^{-1}$ velocity







# Exemple: le mouvement brownien , la diffusion



$$p_2(x_1, 0) | x_2, t) = \int P_2(x_1, 0 | x, t_0) P_2(x, 0 | x_2, t - t_0) dx$$

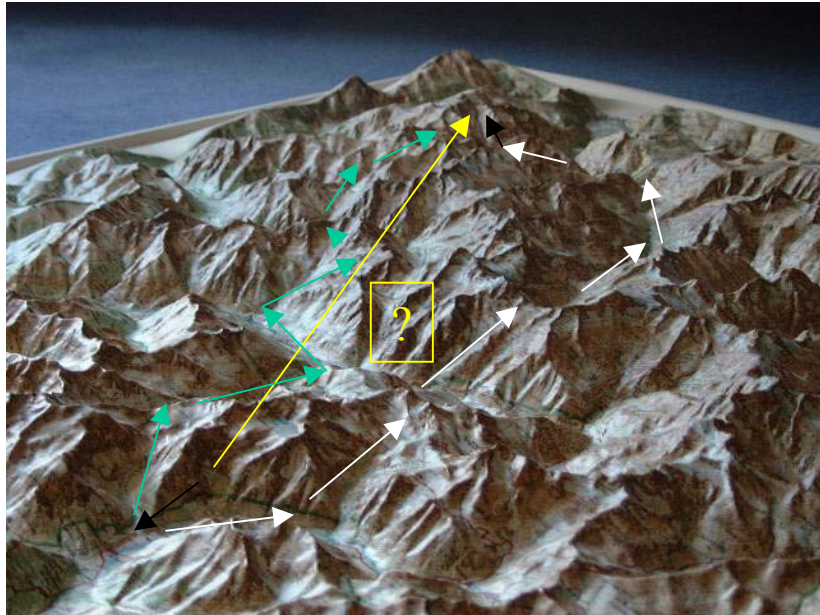
# Critique de la notion de vitesse !

## DECOUPLAGE $\rho, t$

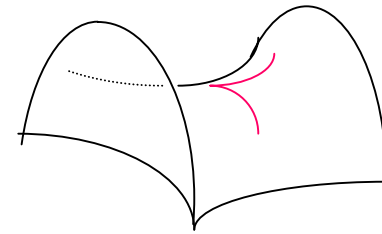
Découplage du Temps et de l'Espace  
l'Espace exprime la distance (  $\rho$ -métrique 1D)  
mais  
le temps, simple relation d'ordre arithmétique  
est remplacé par un simple nombre (1D)  
sans lien a priori avec la distance  
En physique Nombre = Fréquence\*

\* et nous le verrons probabilité

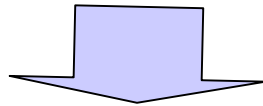




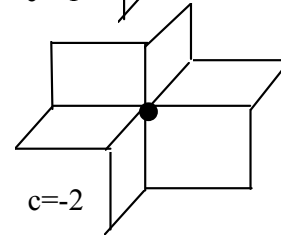
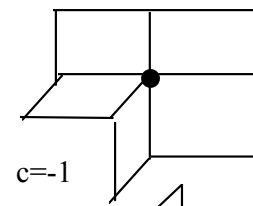
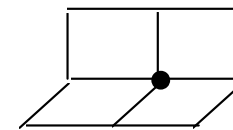
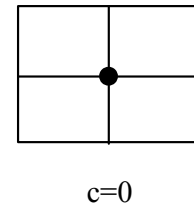
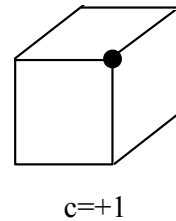
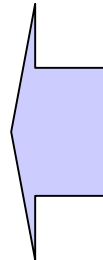
# L'espace hyperbolique



Chaque point est une singularité

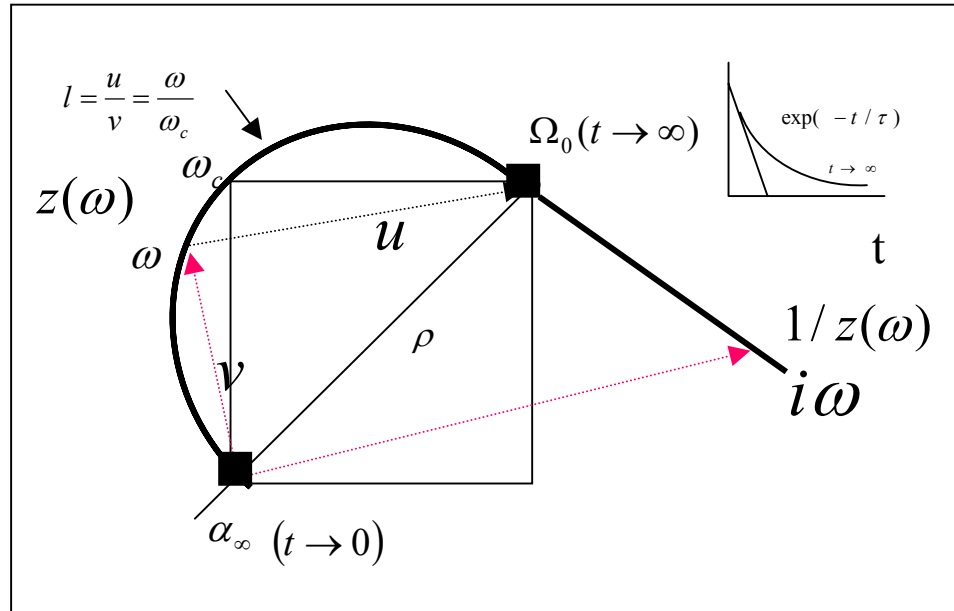


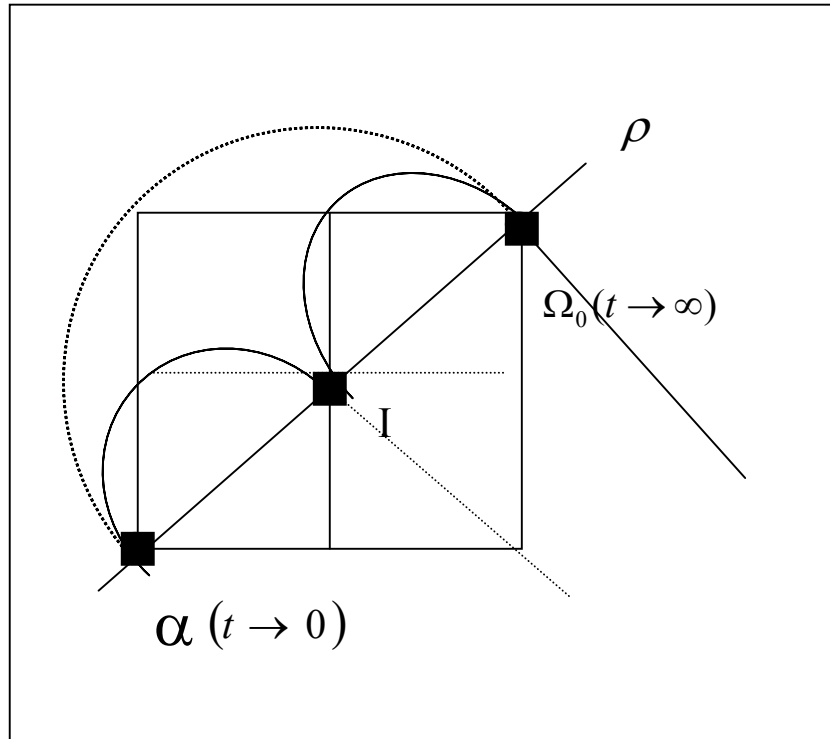
Théorie des Distributions  
Convolution  
Régularisation  
Rôle des courbures

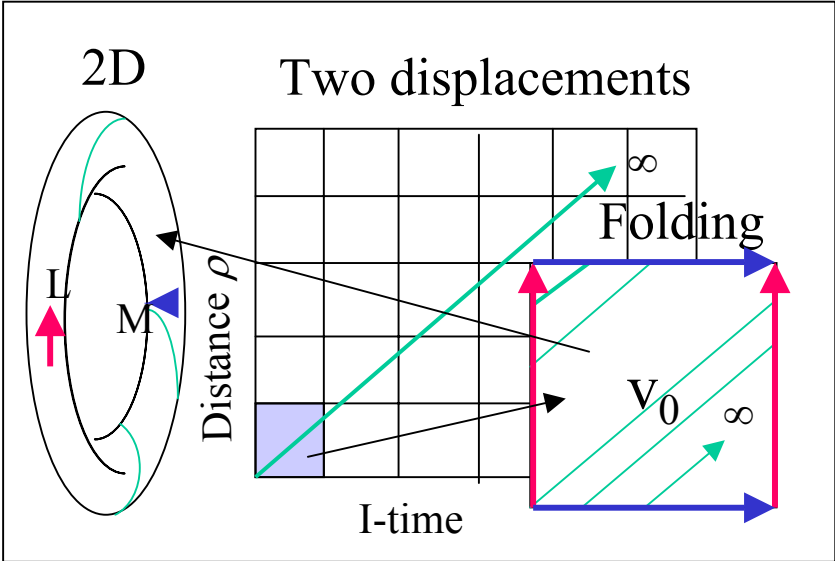


+ ARBRE

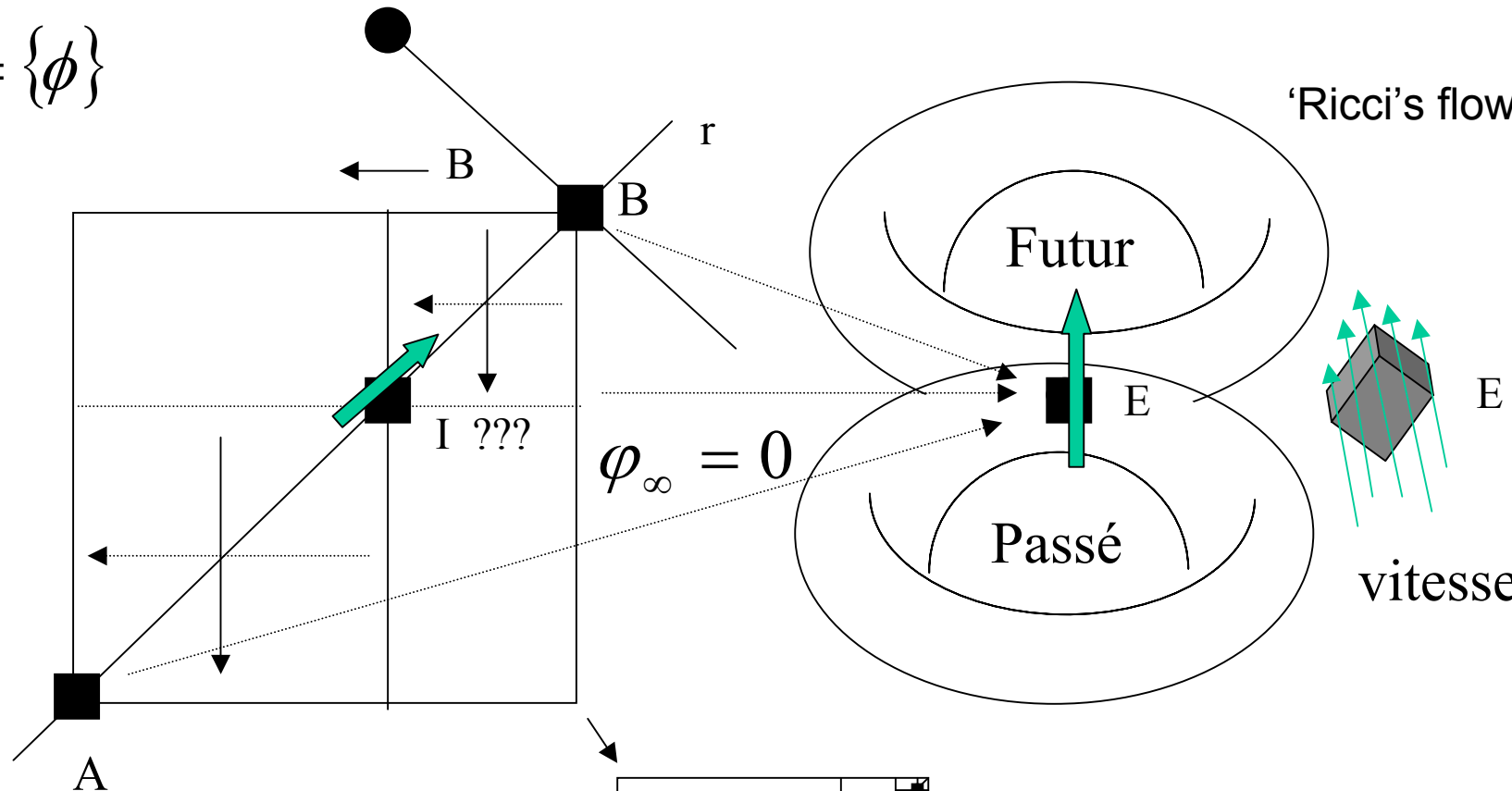






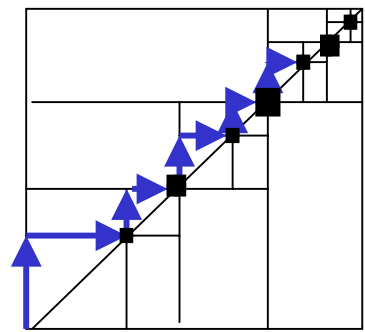


$$t = \{\phi\}$$



$$\varphi_\infty = 0$$

Espace de phase  $(r, \dot{r})$

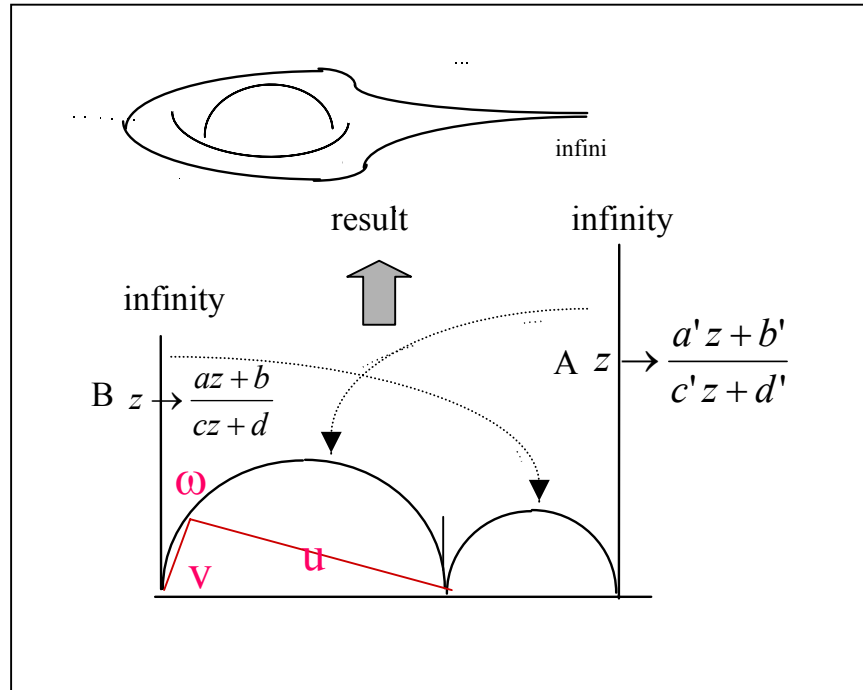


Groupes associés en nombre infini

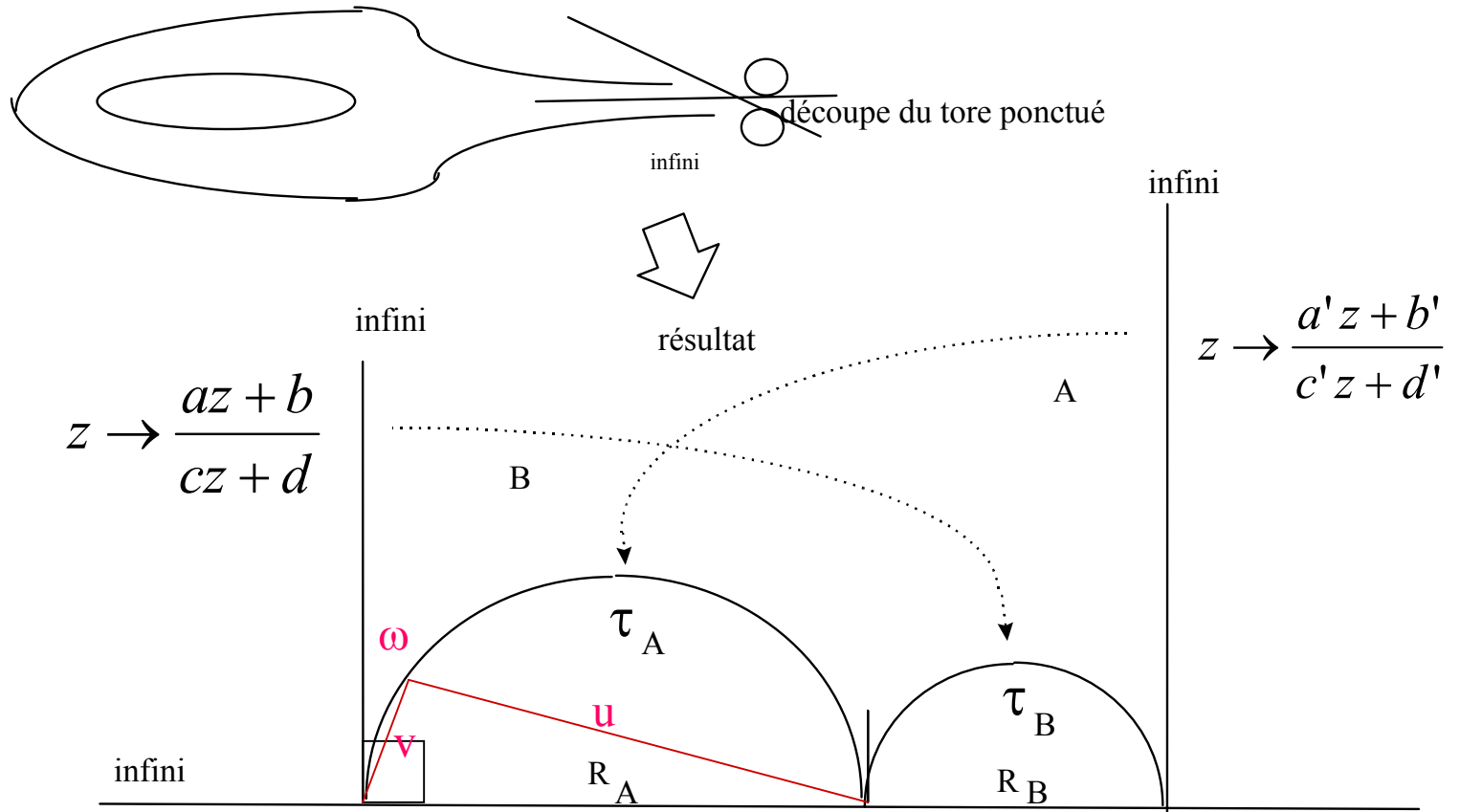
## Deux théorèmes clé

1. Tout espace qui n'est pas euclidien est presque sûrement hyperbolique
2. Pour toute variété riemannienne feuilletée il est possible de démontrer qu'il existe une variable uniformisante  $t$  et deux automorphismes  $A(t)$  &  $B(t)$  soient assimilables à deux déplacements dans des géométries hyperboliques. Dans ce cas la variables uniformisante, appelée temps doit appartenir à l'espace complexe.

Exemple euclidien puis hyperbolique ...

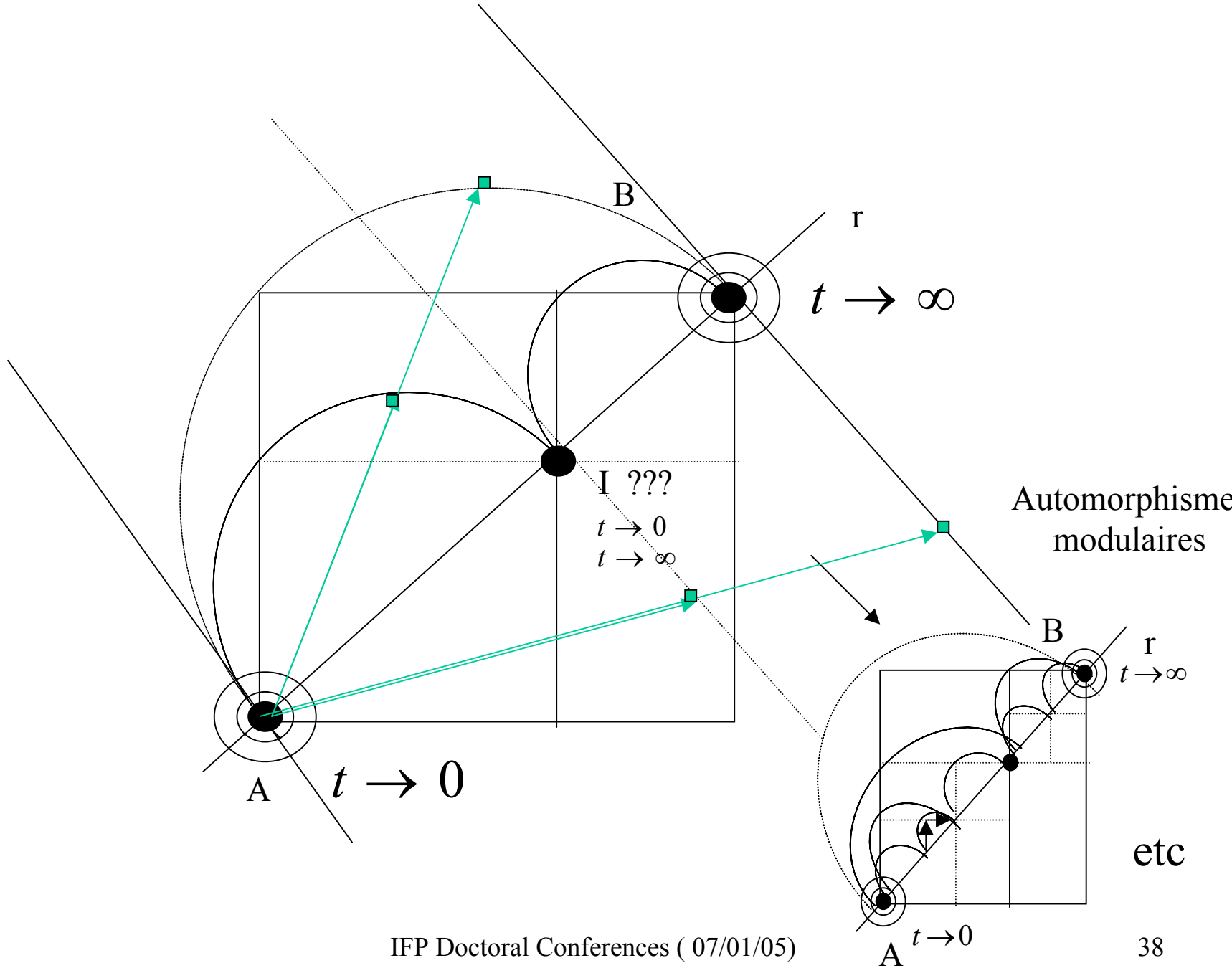


# Elliptic boundary



Hyperbolic distance

$$\ln u / v = \ln \omega \cdot \tau_a$$

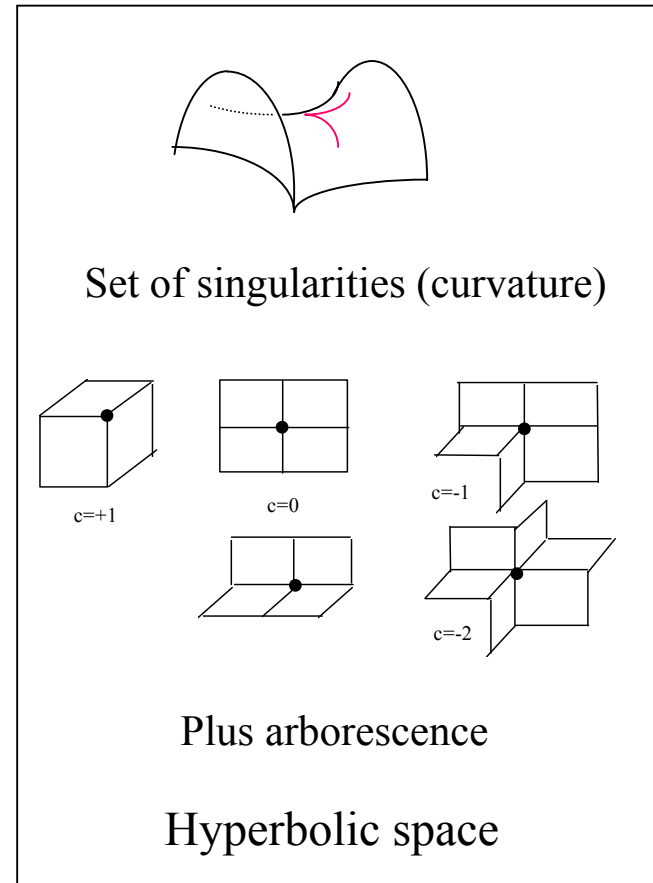
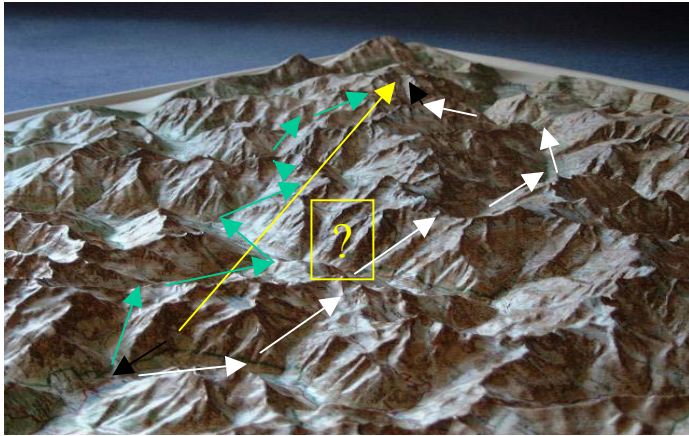


## Si AGILITE

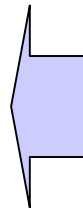
1. Les deux états  $\Omega_0$  &  $\alpha_\infty$  coexistent à tous moments
2. Indépendance de l'espace et du temps
3. Il n'existe pas de vitesse pour la transformation  $\alpha_\infty \rightarrow \Omega_0$
4. Cette  $\alpha$ -transformation n'est pas exclusivement inscrite dans l'ordre temporel local mais devient dans un 'être-arithmétique'
5. L'espace naturel de représentation est l'espace co-réciproque (réciproque uniquement en temps  $(L\tau)^2$ : espace des Z)
6. La Z-géodésique est une géodésique hyperbolique
7. Quid d'un point intermédiaire I entre  $\Omega_0$  &  $\alpha_\infty$  cad de la question de l'instant, du présent, du maintenant ?

*Voyons cela d'abord dans le v-espace euclidien: la vitesse existe.*

# Retour sur la notion d'Espace Hyperbolique



*Distribution theory*  
*Convolution*  
*Coarse graining*  
*Curvatures*

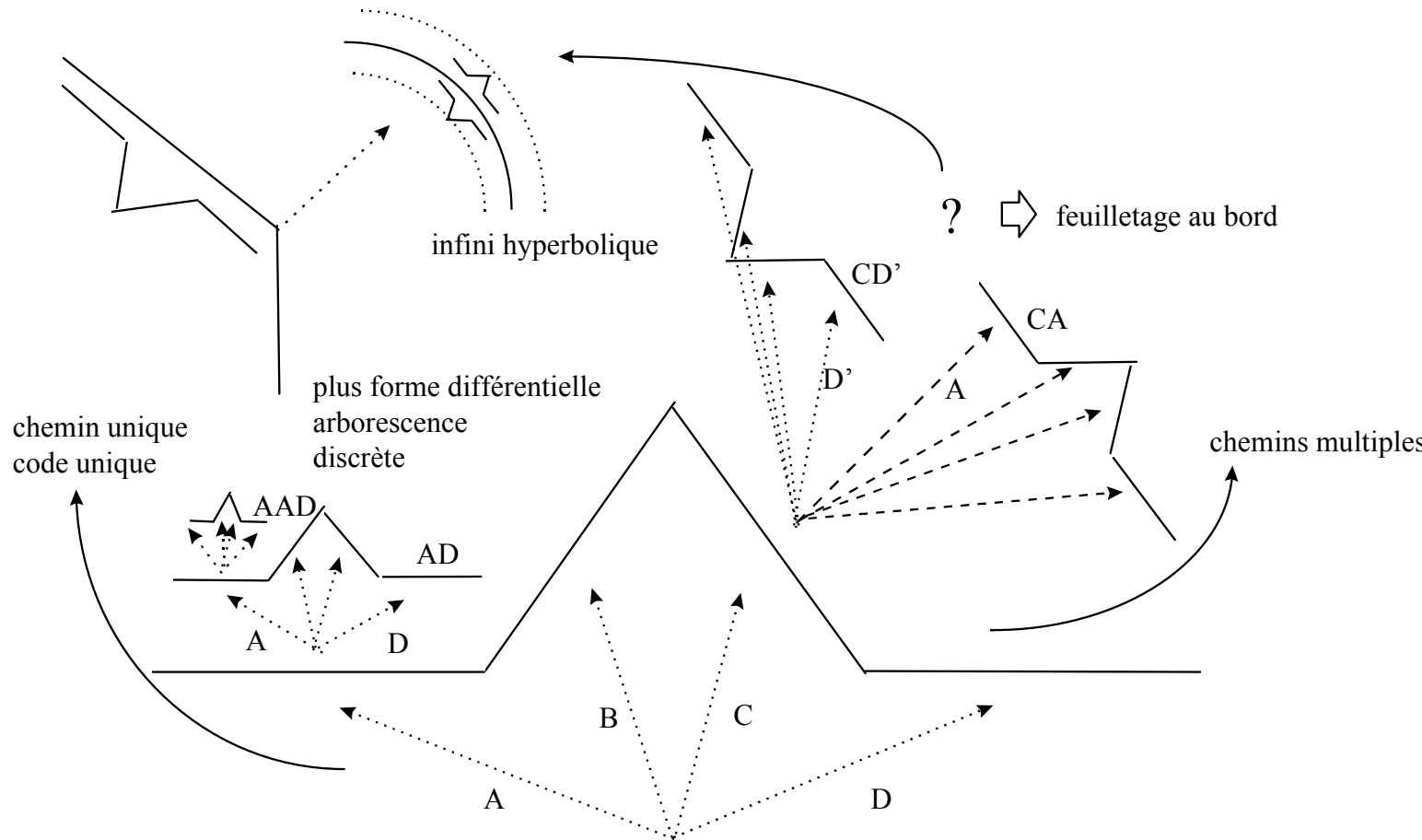


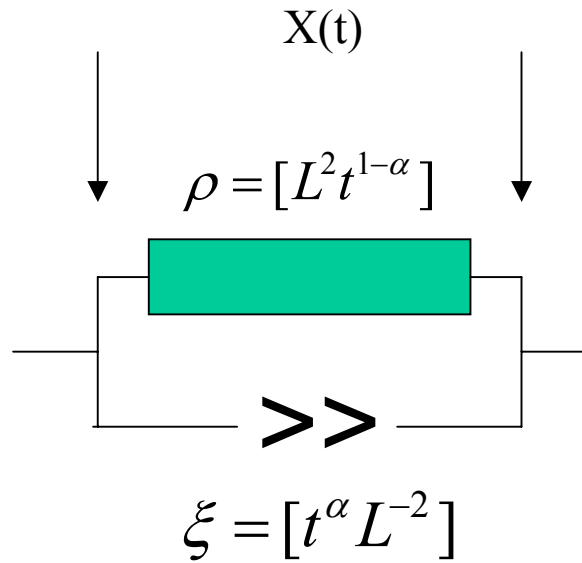
Questions de  
Topologie algébrique  
Transformations conformes  
Comportement au bord,  
Liens avec les groupes non commutatifs  
etc  
non considérées ici.

Voir néanmoins: P. Riot et A. el Kabouchi  
Dans *Fractional differentiation and applications*

# Hyperbolicité due à l'arbre: limites possibles, P, E, H

## Hyperbolicité due au groupe: limites possibles E, H



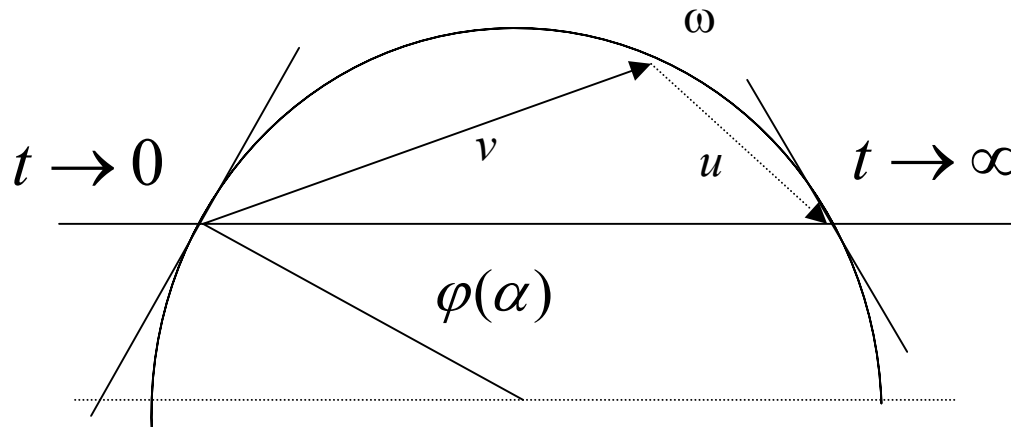


$$\frac{1}{\rho} X(t) + \xi \frac{d^\alpha X(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\rho} X_\infty(t)$$

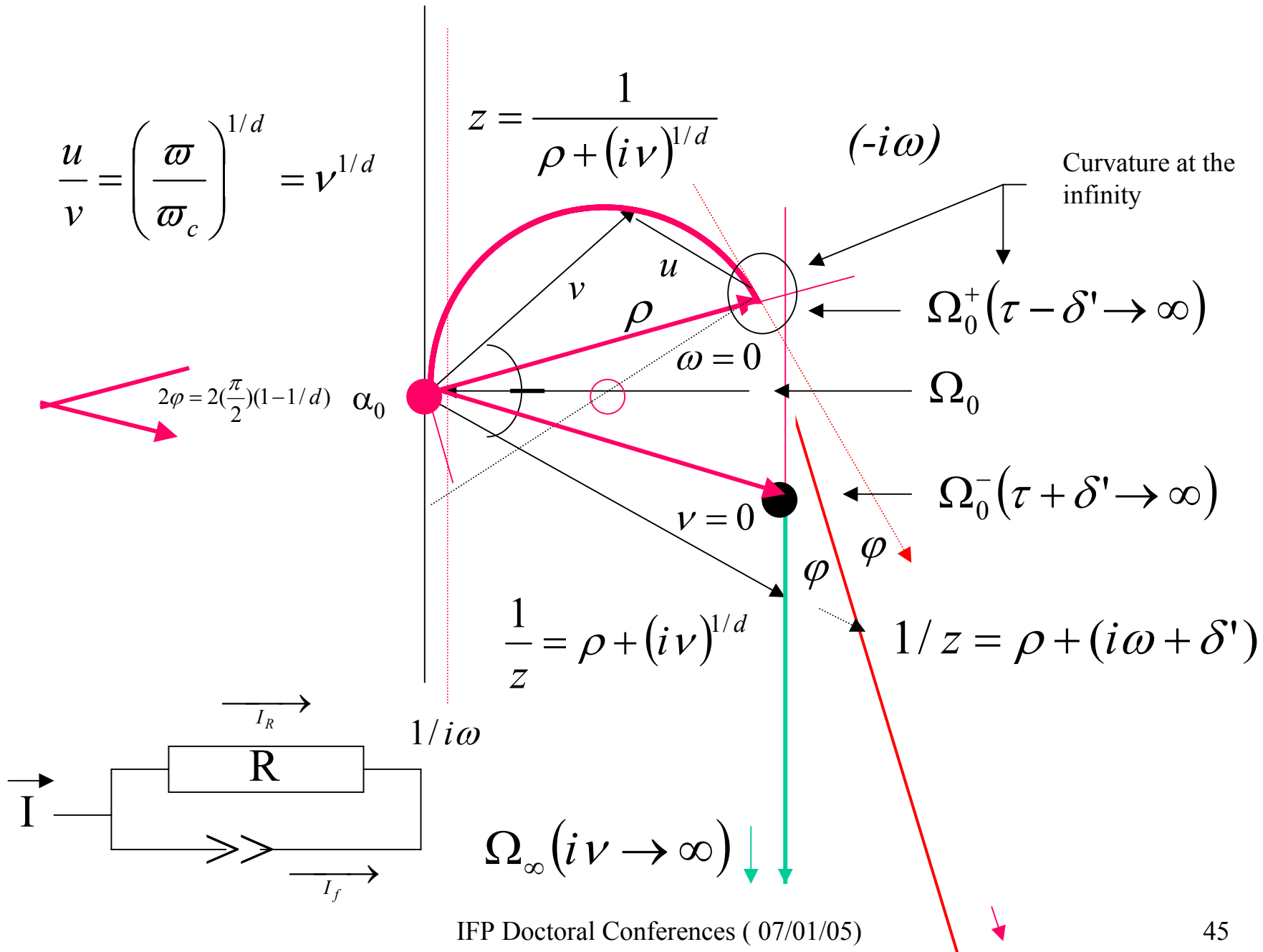
$$[1 + (i\omega\tau)^\alpha] X(\omega) = X_\infty(\omega)$$

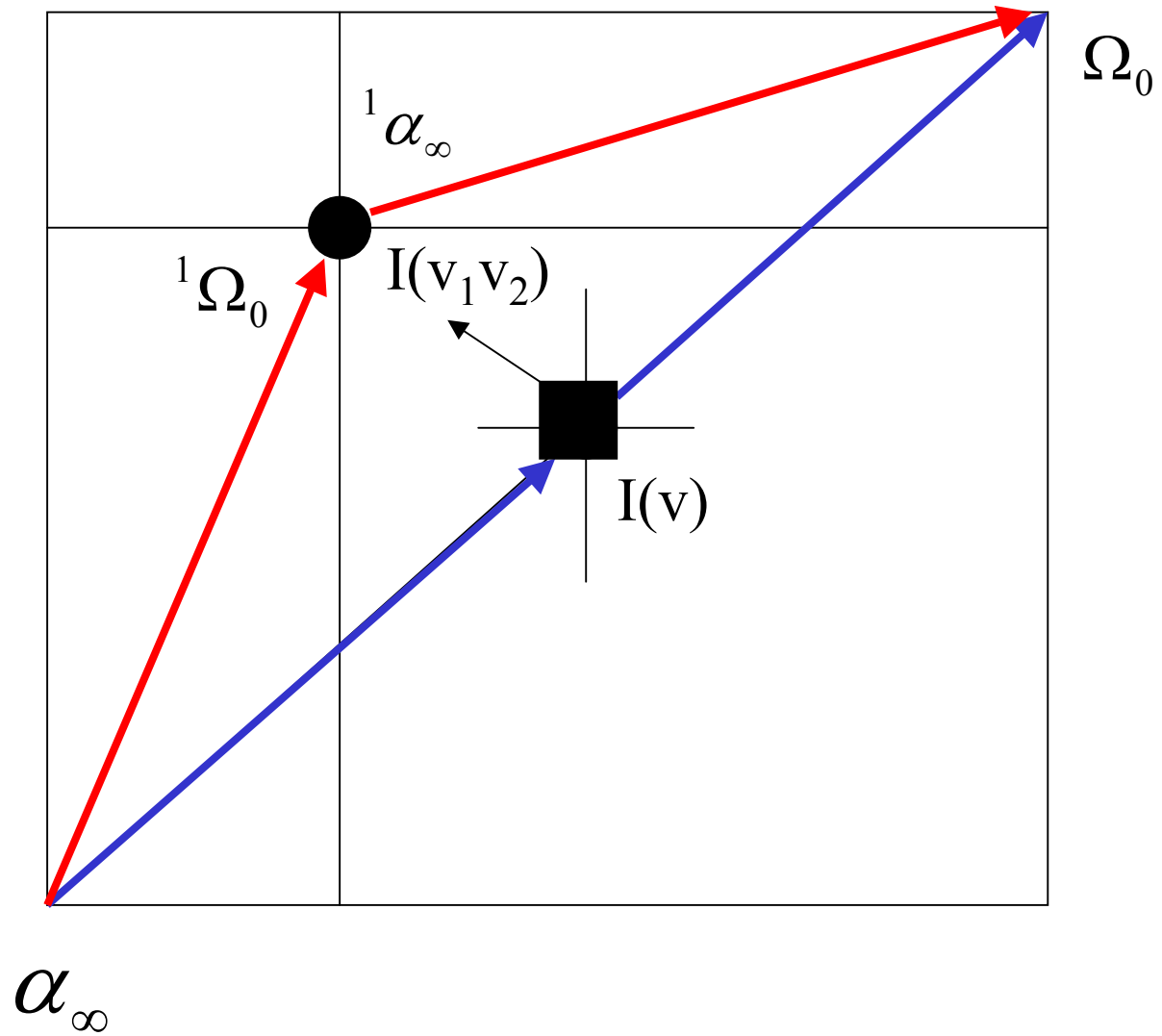
$$\frac{X(\omega)}{X_\infty(\omega)} = \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^\alpha};$$

$$\tau = 1 / \rho\xi = [1 / L^2 t^{1-\alpha} t^\alpha L^{-2}]$$

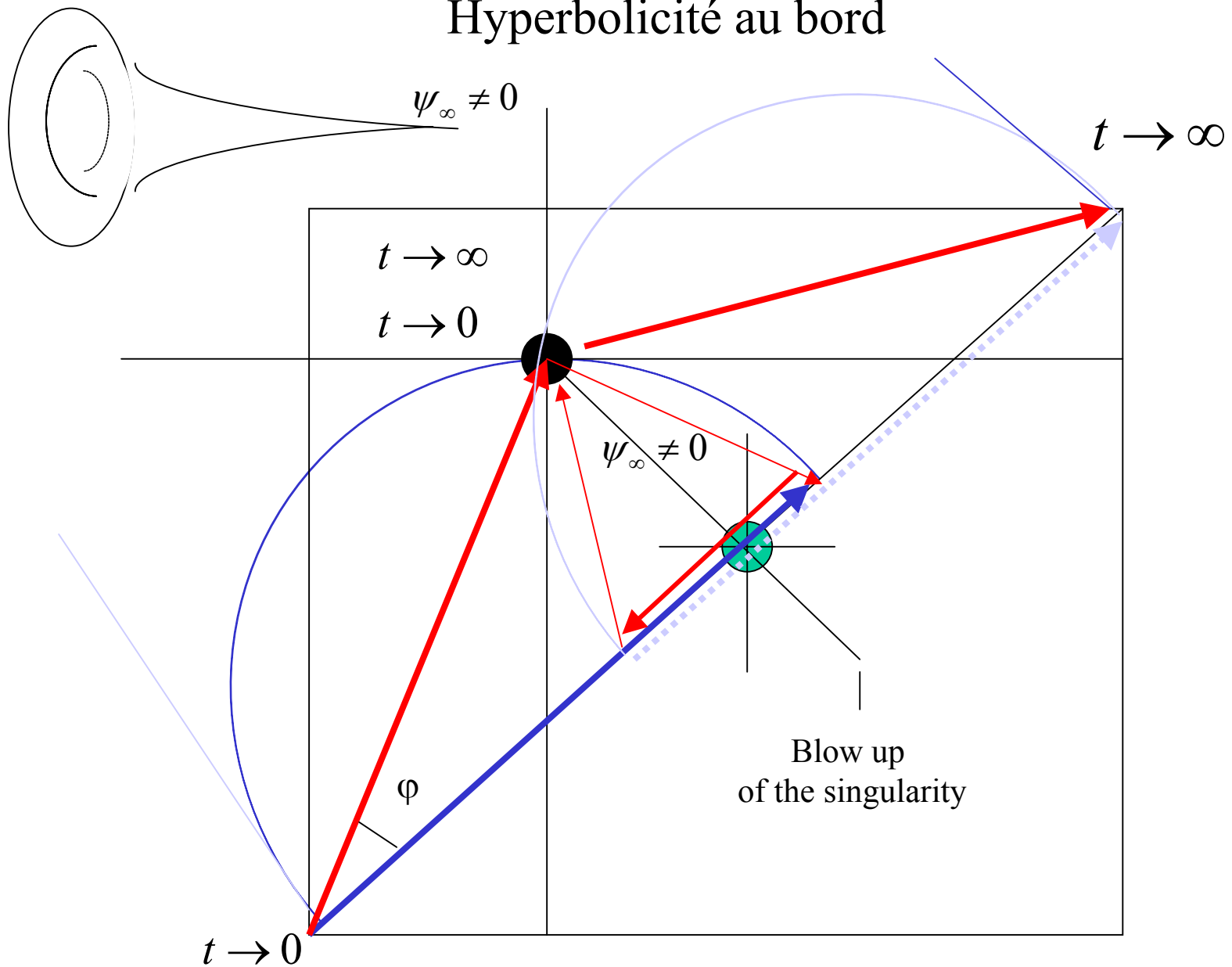


$$\frac{u}{v} = \left( \frac{\omega}{\bar{\omega}} \right)^\alpha$$

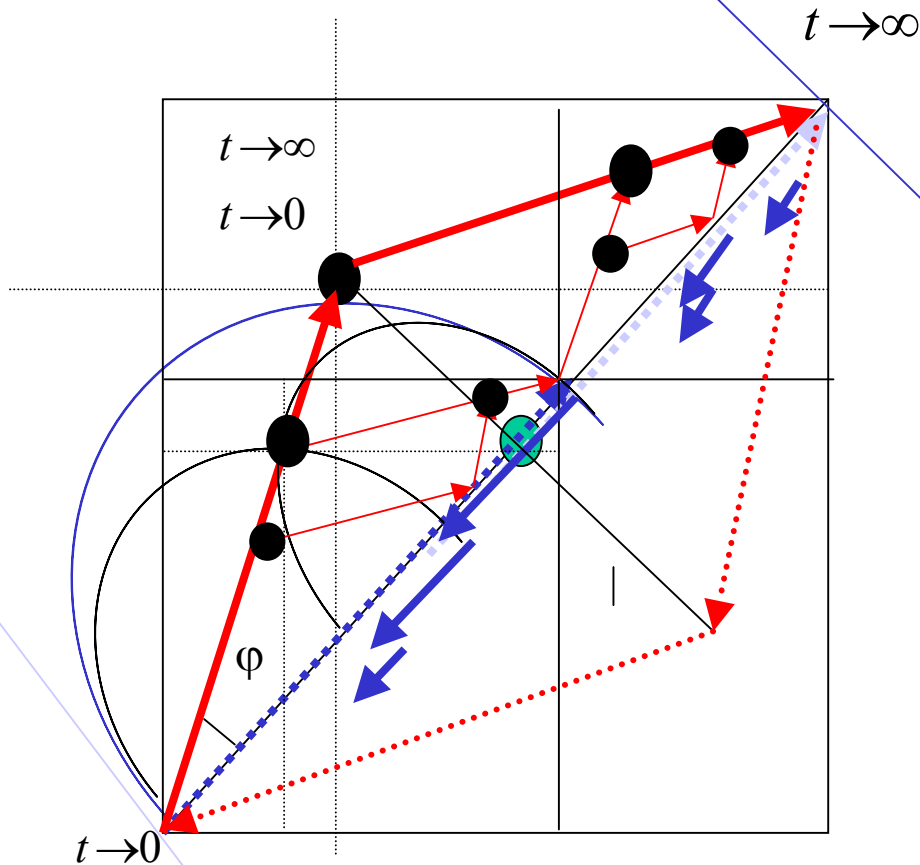




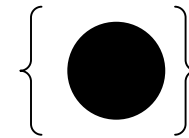
# Hyperbolicité au bord







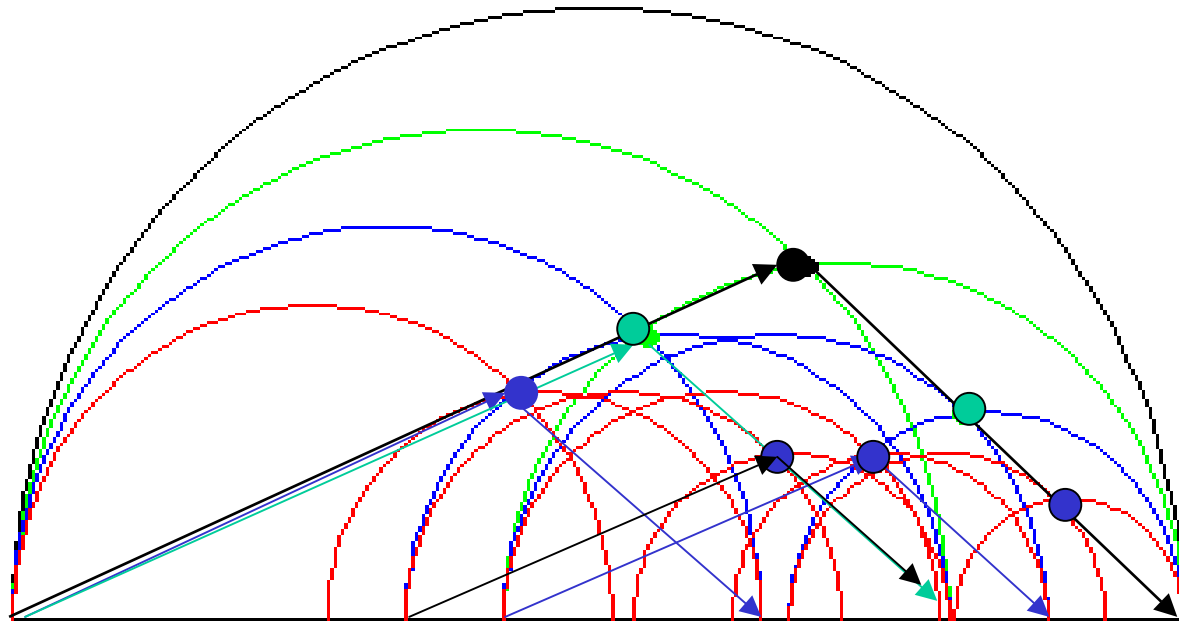
Dans l'ensemble



toutes les singularités  
sont topologiquement  
équivalentes vis à vis  
de l'espace/temps.

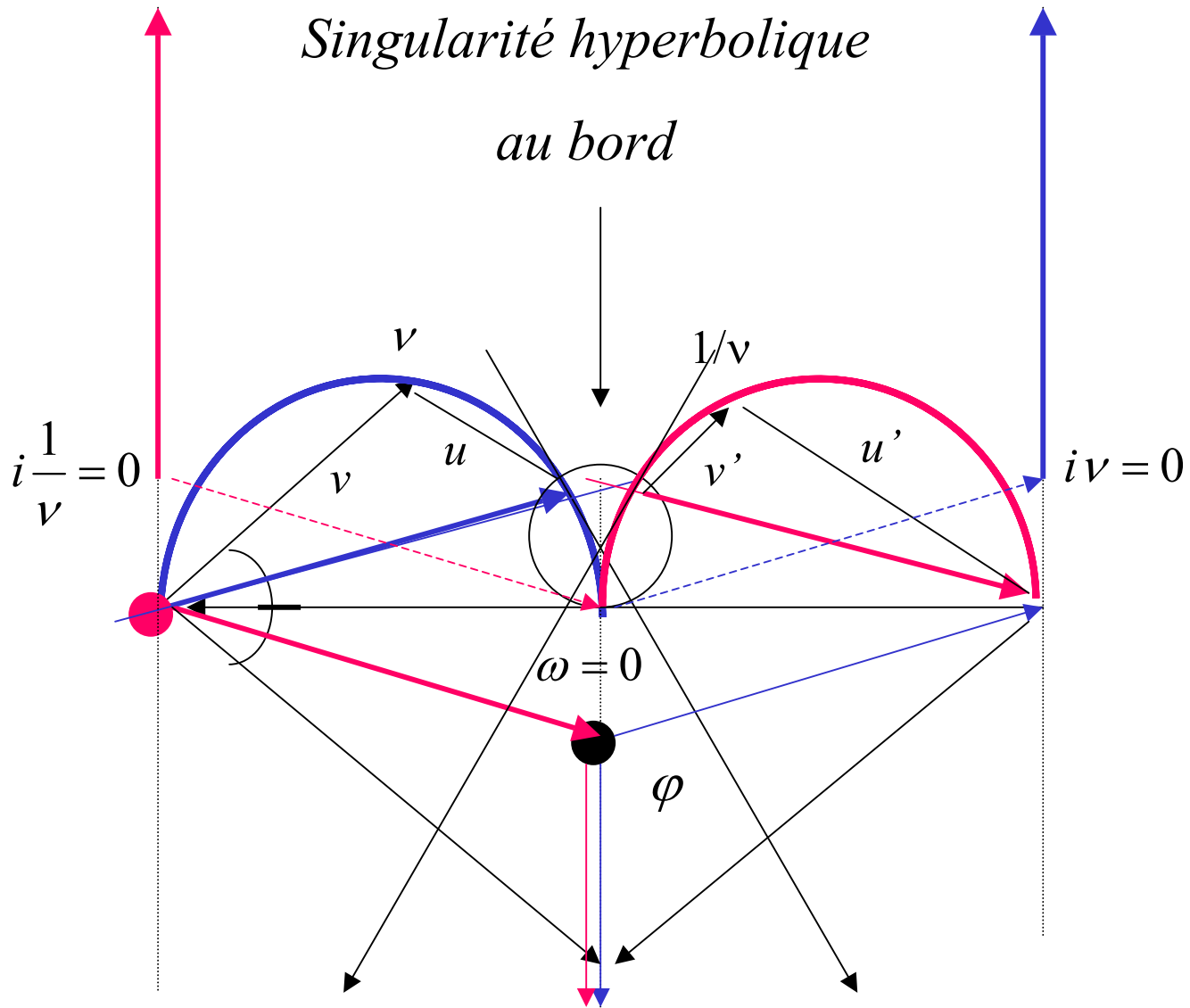
Il s'agit donc d'un seul et même 'être'  
donc d'un nouvel état de la matière

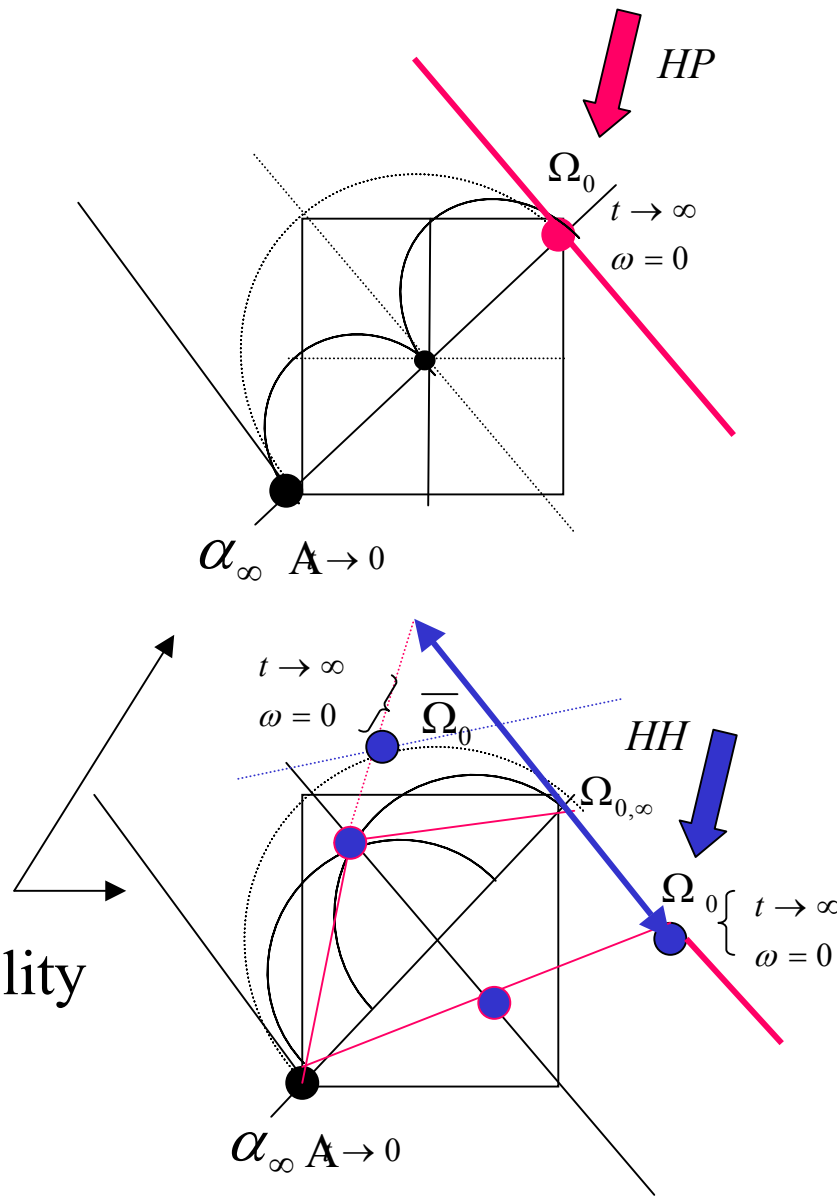
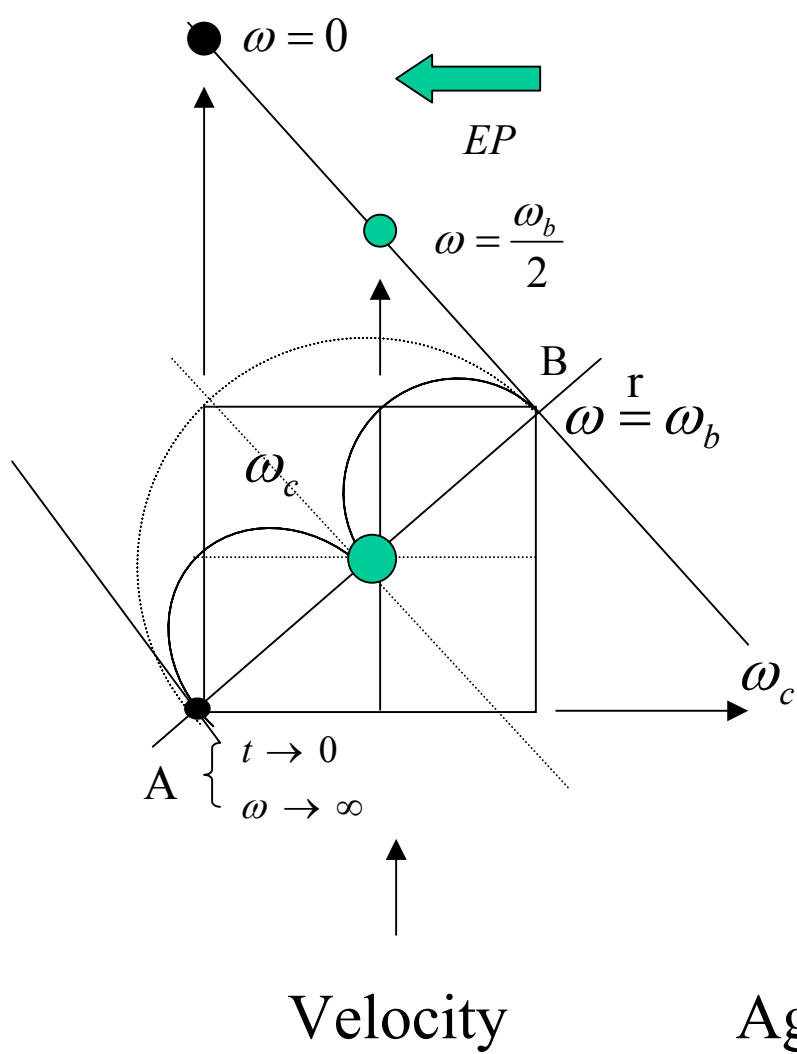
Mais cette 'être' est constitué d'une multitude d'états dans l'espace  $(r, \dot{r})$  Tous ces états ont pour caractéristique l'existence de deux 'vitesses' apparentes en chaque point

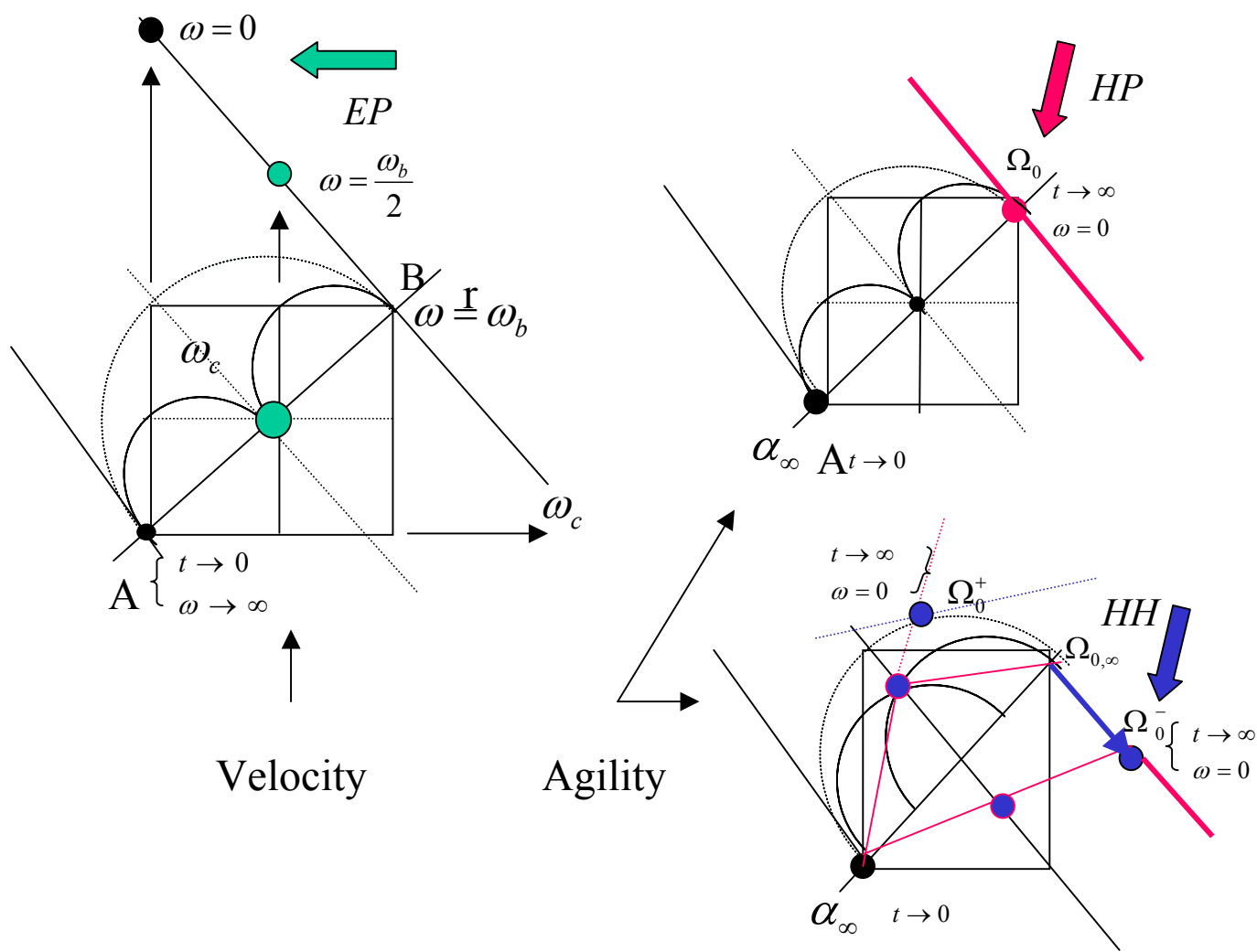


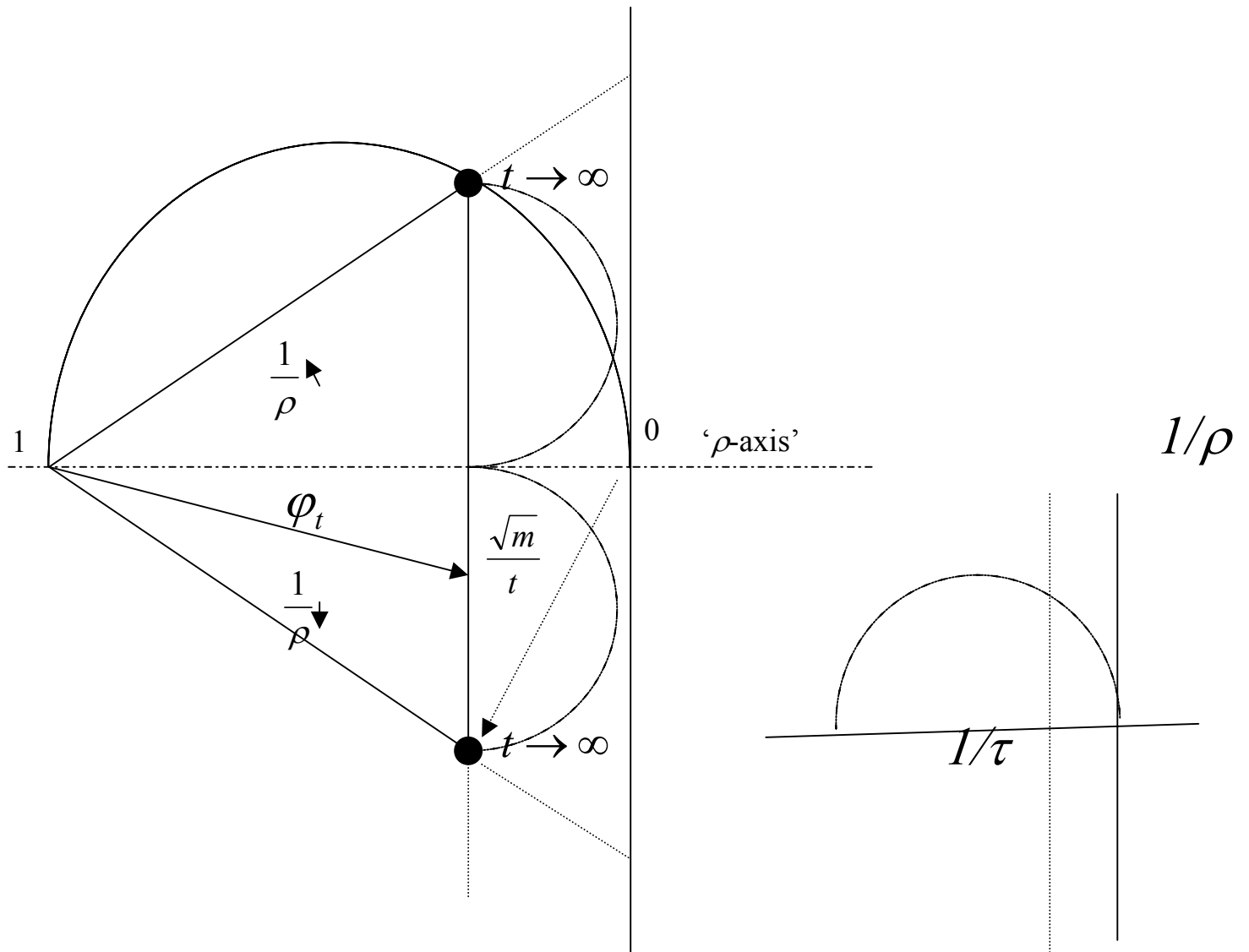
# Singularité hyperbolique

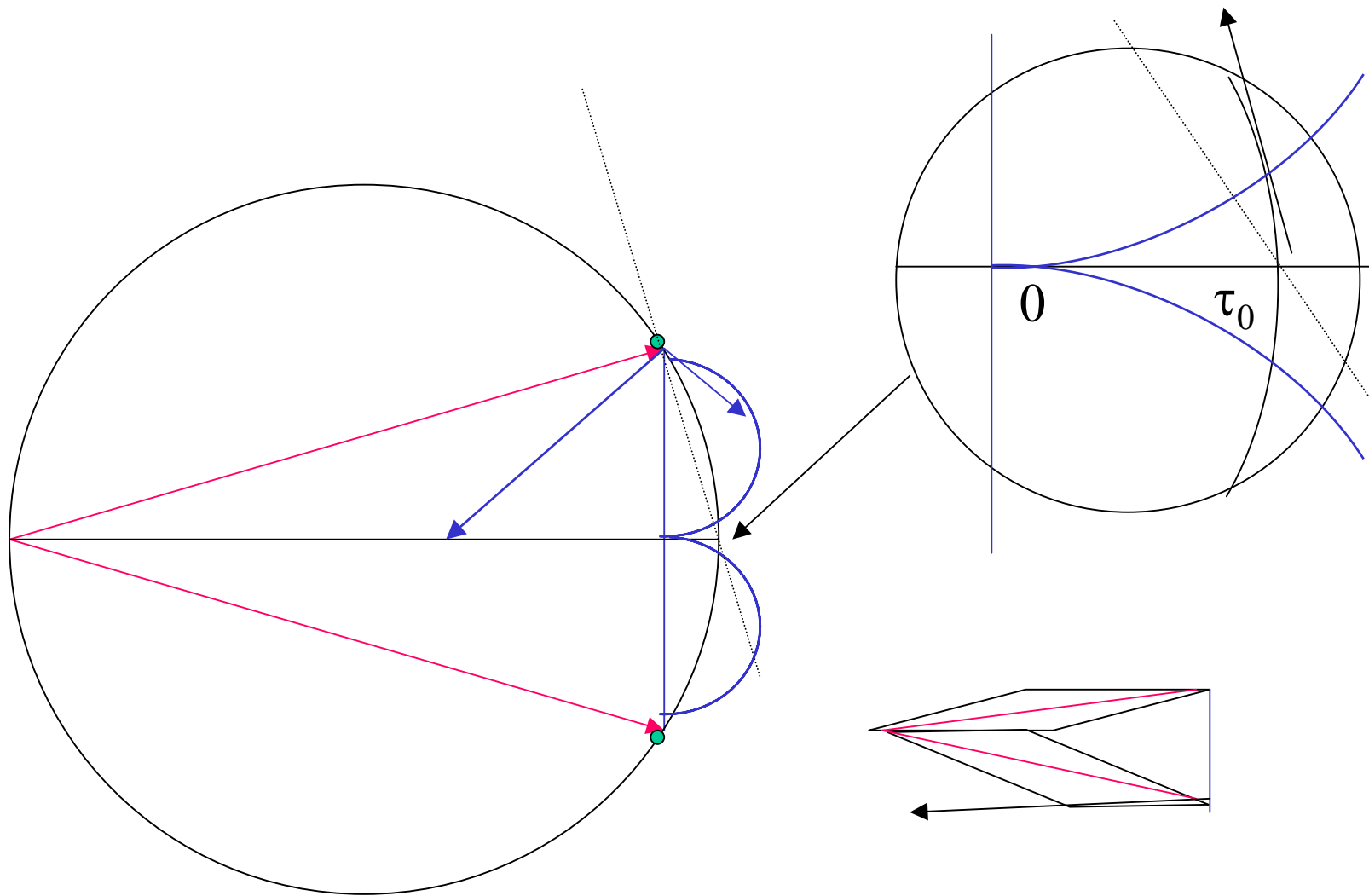
au bord



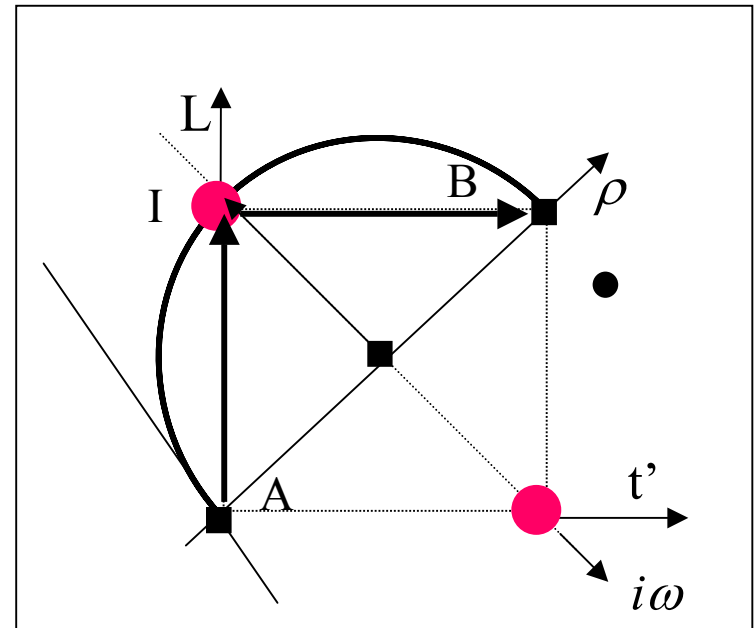
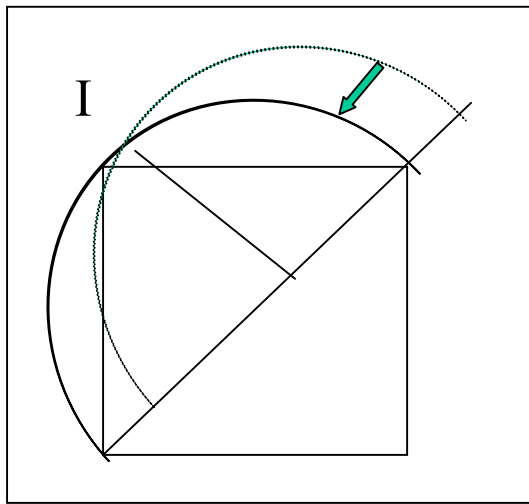
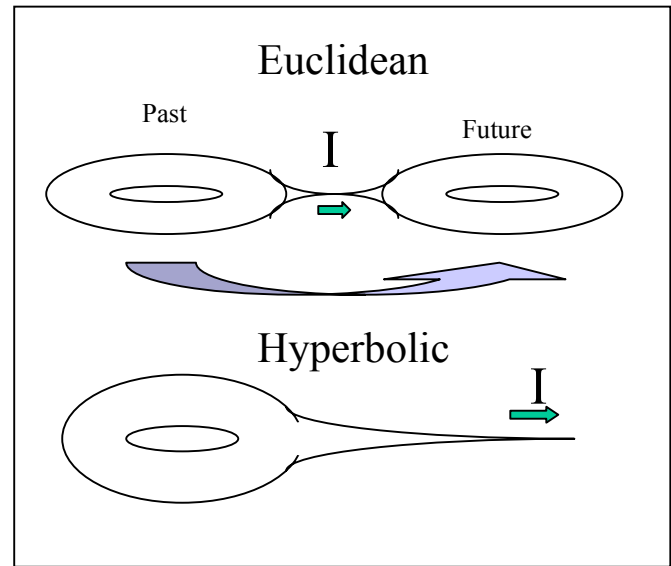
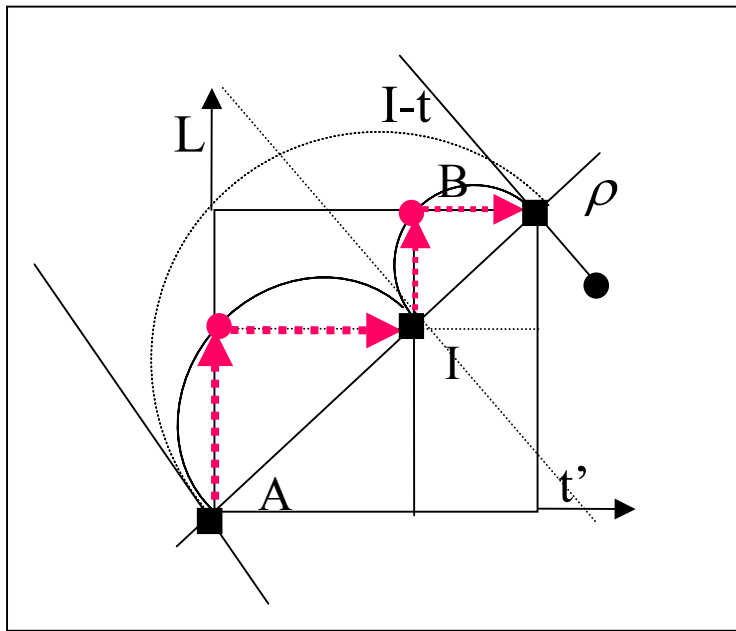




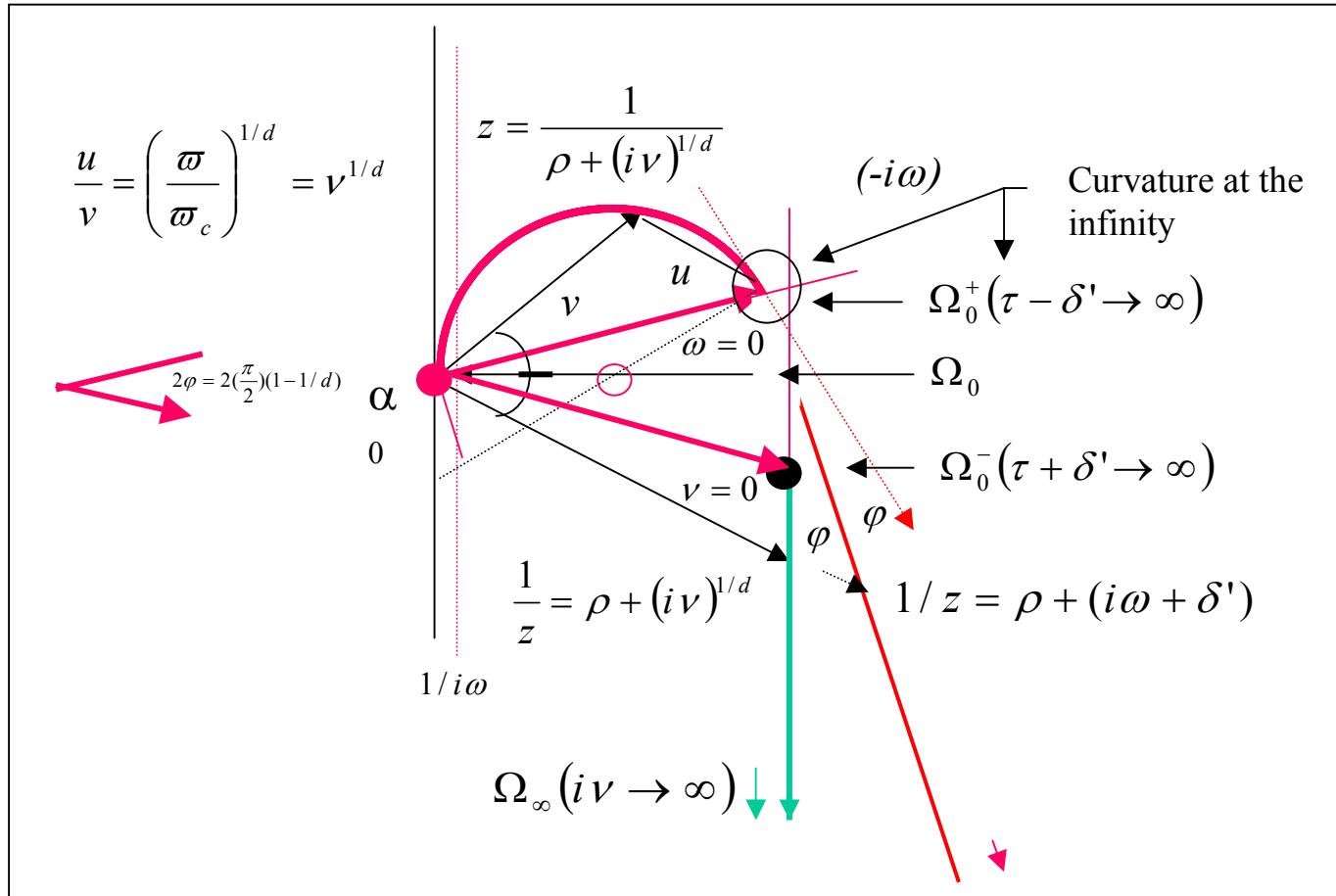




*Link between the curvature and the phase angle  
Are kept through the scaling.*







Il s'agit d'une radicale modification  
des modalités de relaxation exponentielle

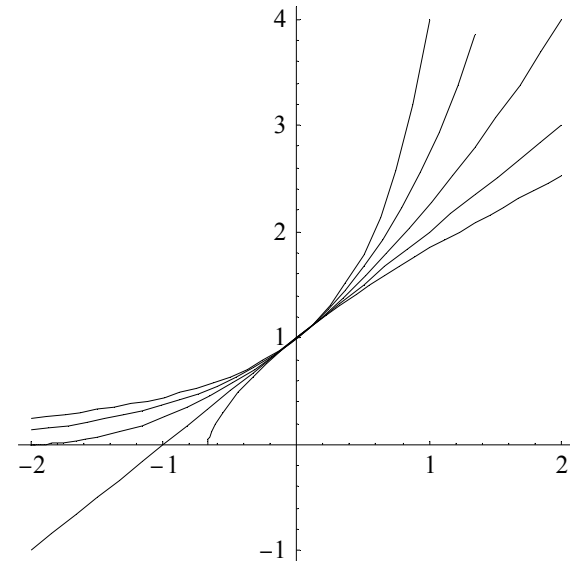
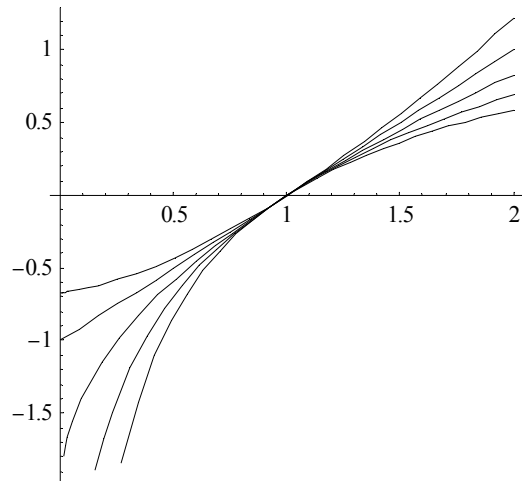
Tentons de comprendre pourquoi en partant  
du sens profond de la fonction exponentielle

Quid pour deux boucles fractales  
dont on ne peut définir pas le bord?

# Généralisation du concept d'exponentiel

$$\ln_a x = \frac{x^a - 1}{a}$$

$$e_a^x = (1 + ax)^{1/a}$$



## DEFINITIONS

- $\ln_a(x)$  n'est définie que pour  $a \neq 0, x > 0$
- $e_a^x$  est défini pour :  $a > 0$  and  $x \in [-1/a, +\infty[$   
- pour :  $a < 0$  and  $x \in ]-\infty, -1/a[$

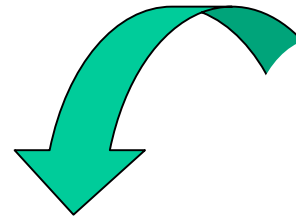
- $\ln_a x$  et  $e_a^x$  sont des fonctions réciproques
- Les fonctions standards sont retrouvées

$$\lim_{a \rightarrow 0} \ln_a x = \ln x$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} e_a^x = e^x$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$



$$e_a^{x+y+axy} = e_a^x \cdot e_a^y$$

$$e_a^{x+y} = \left( (e_a^x)^a + (e_a^y)^a - 1 \right)^{1/a}$$

$$\ln_a \left( \left( x^a + y^a - 1 \right)^{1/a} \right) = \ln_a x + \ln_a y$$

$$\ln_a(x \cdot y) = \ln_a x + \ln_a y + a \ln_a x \ln_a y$$

Ce qui conduit à définir une '*a*-algèbre':  $[+_a; -_a; \times_a; /_a]$

# Non extensive physics

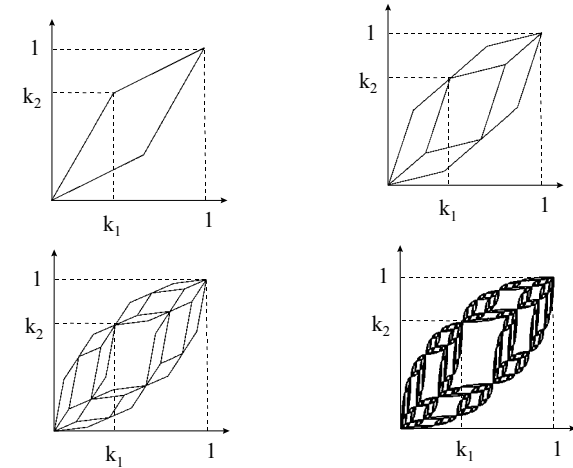
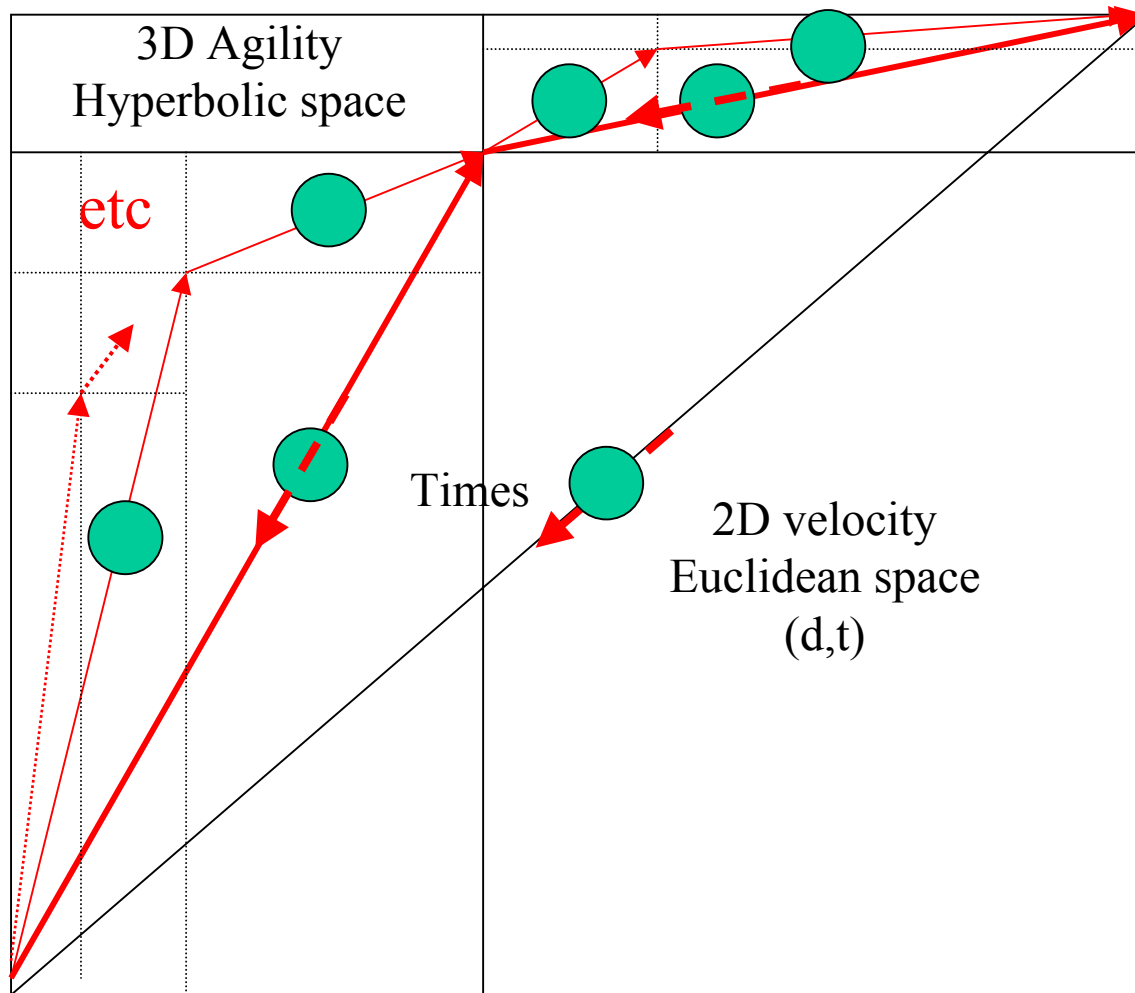
$A \cup B$



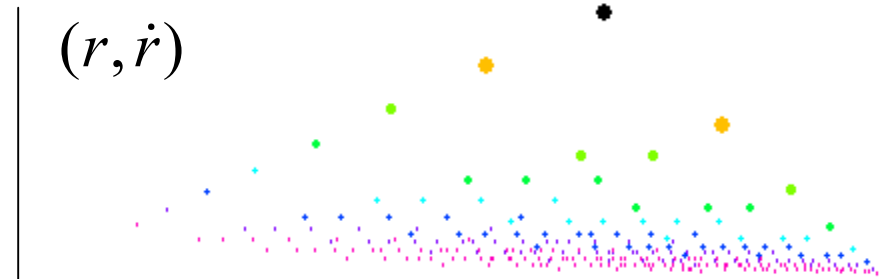
Much more than  
Properties of A  
+  
Properties of B

How much? Are there any mathematical foundations?

Il existe semble-t-il potentiellement un autre état 2V-condensa



Le Nouvel état sera appelé :  $\varphi 2H$ -Condensa  
 (2 pour 2 déplacement , H pour hyperbolique  
 $\varphi$  pour l'invariant de E Noether)



**Propriétés:**

Caractère discret et arithmétique du réseau

Non extensivité

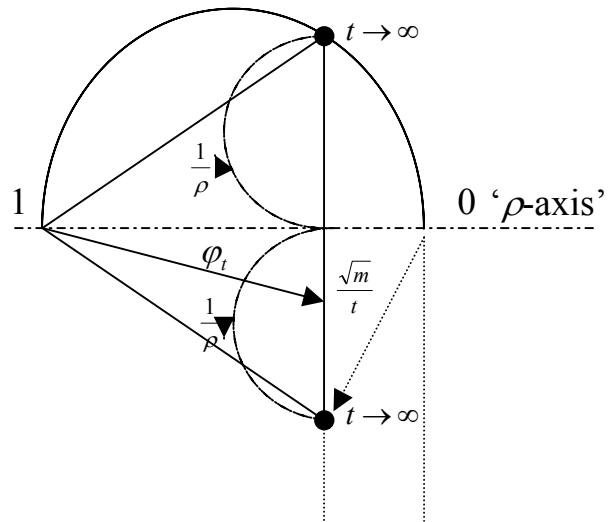
le système est constitué de 3 singularités couplées  
 ou de manière équivalente de deux relaxations couplées

L'existence d'une forme différentielle associée à  
 l'environnement de la singularité , caractérisée par  
 la présence d'une phase de bord

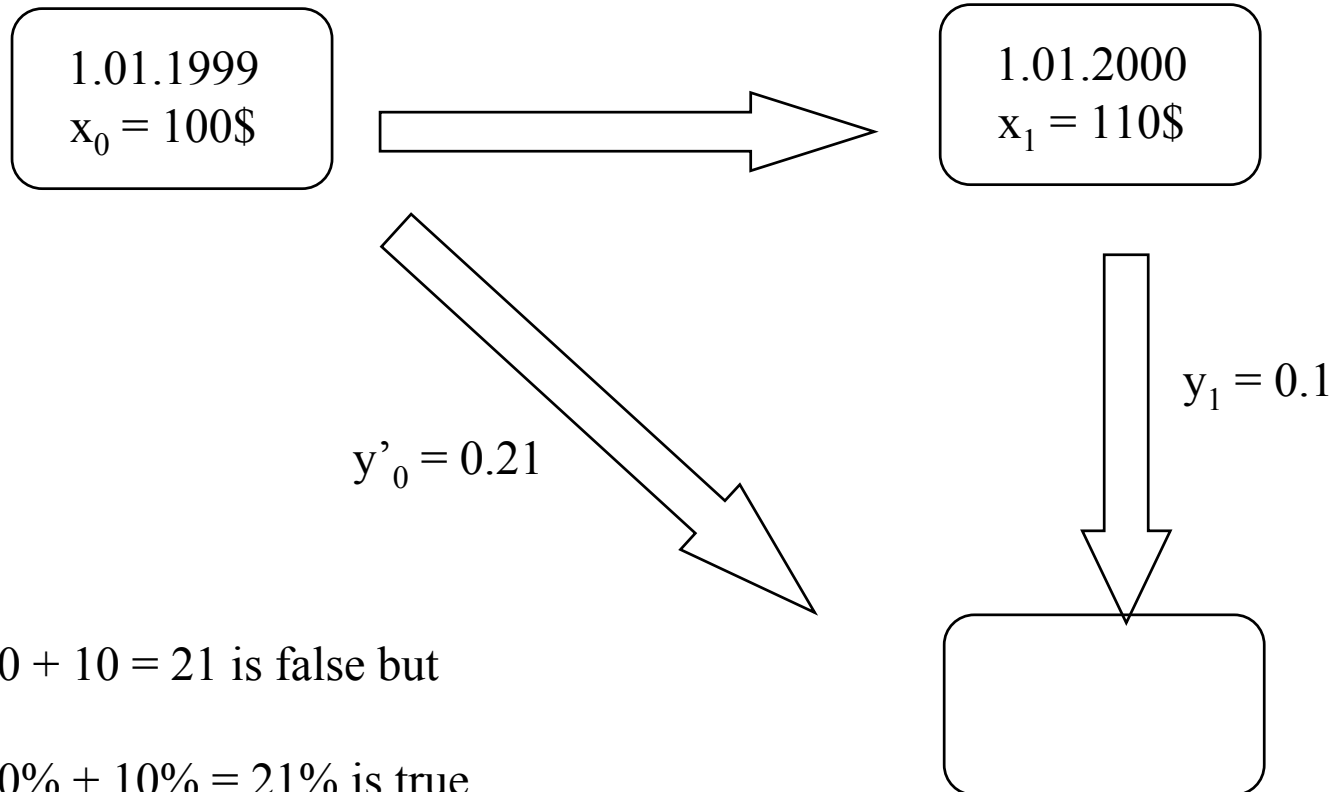
La présence de facteurs négentropiques externes à cette forme

Par une représentation topologique unique

structure doublement hyperbolique HH (interne et au bord)  
 par opposition à la structure HP/E ( caractéristique de la diffusion)



## A simple example



$10 + 10 = 21$  is false but

$10\% + 10\% = 21\%$  is true

General ratio rule :

$$y'_0 = y_0 + y_1 + y_0 y_1$$

Here  $0.21 = 0.1 + 0.1 + 0.1 * 0.1$

Ratios are additive *in the sense of generalized addition* :

$$y'_0 = y_0 +_1 y_1$$

Universal character of this addition : study of temporal processes

Généralisation du concept d'exponentiel:  
*Nécessaire du fait que l'exponentiel devient loi de puissance*

$$\ln_a x = \frac{x^a - 1}{a} \qquad e_a^x = (1 + ax)^{1/a}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \text{TF} & \downarrow \\ \frac{1}{a} \left( \frac{1}{p} \right)^{a+1} - \frac{1}{ap} & \longrightarrow \gg \longrightarrow & \left( \frac{k}{p} \right)^{1/a+1} \exp\left( -\frac{1}{a} p \right) \end{array}$$

*Conservation homomorphisme :  $(+, -) \leftrightarrow (\times, \div)$*

# Un rôle générique de la *1*-algèbre non extensive

$$a(x +_a y) = az = ax +_1 ay$$

$$x \times_a y = z^a = x^a \times_1 y^a$$

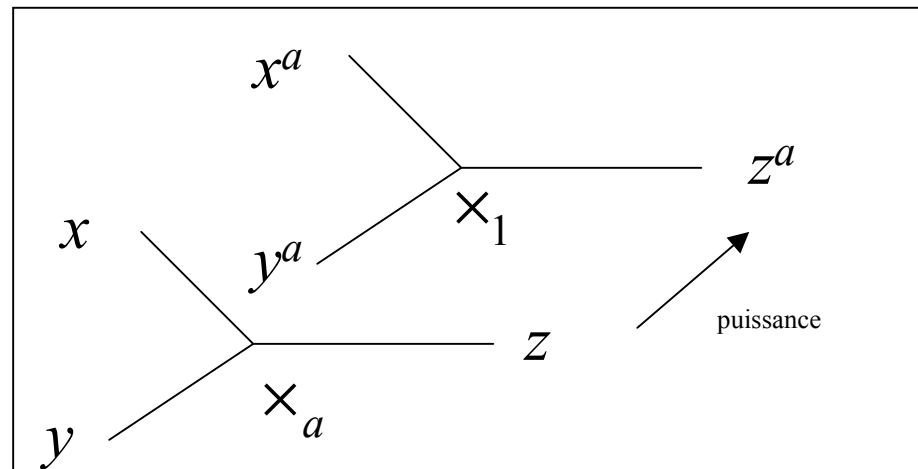
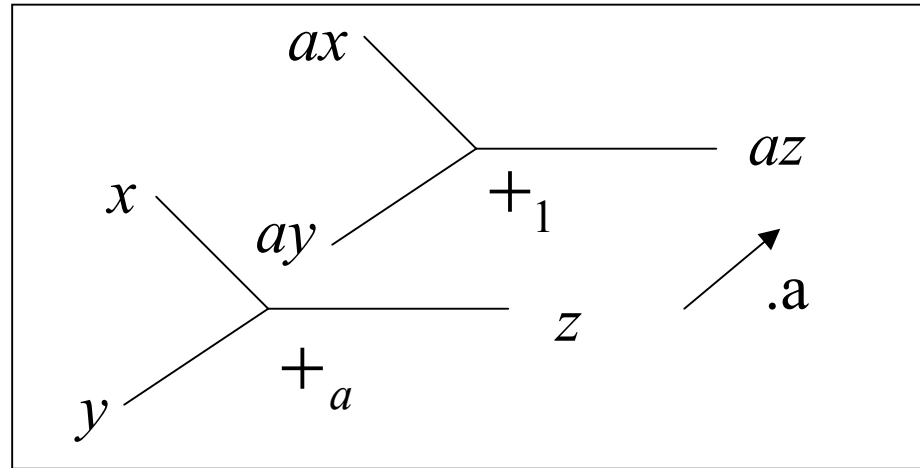


$$(x +_1 y) = z = x + y + xy$$

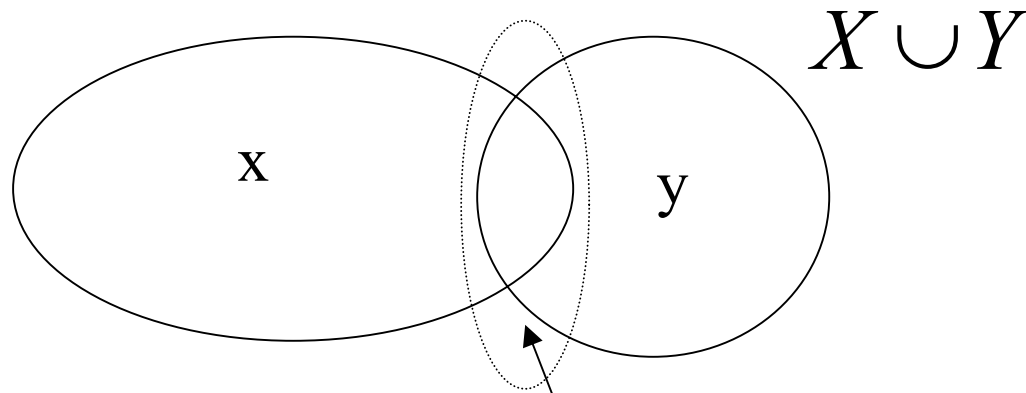
$$x \times_1 y = z = x + y - 1$$

$$x \times_1 y = -xy \left[ \left( -\frac{1}{x} \right) +_1 \left( -\frac{1}{y} \right) \right]$$

$$x +_1 y = -xy \left[ \left( -\frac{1}{x} \right) \times_1 \left( -\frac{1}{y} \right) \right]$$



# Une nouvelle façon de conceptualiser la complexité



Nouvelle théorie  
des ensembles  
non extensifs?

$$(x +_1 y) = 1 \equiv x \cup y + (x \cap y)$$

$$x \times_1 y \equiv x \cup y - 1$$



$X \cap Y$

## Propriétés absentes

Pas de distributivité

$$xy + xz = x(y + z)$$

et en général :

$$x \times_a y + x \times_a z \neq x \times_a (y + z)$$

$$xy +_a xz \neq x(y +_a z)$$

$$x \times_a y +_a x \times_a z \neq x \times_a (y +_a z)$$

# Conclusions 1 step

- Non extensive physics involves
  - new physical concepts ( interaction)
  - generalized mathematical functions
  - generalized algebra
- Advantage : study of interaction at a fundamental stage
- Consequences :

- math : **no factorisation** of expressions
- physics : **no summation** ; global parameters cannot be determined from simple summation of local parameters

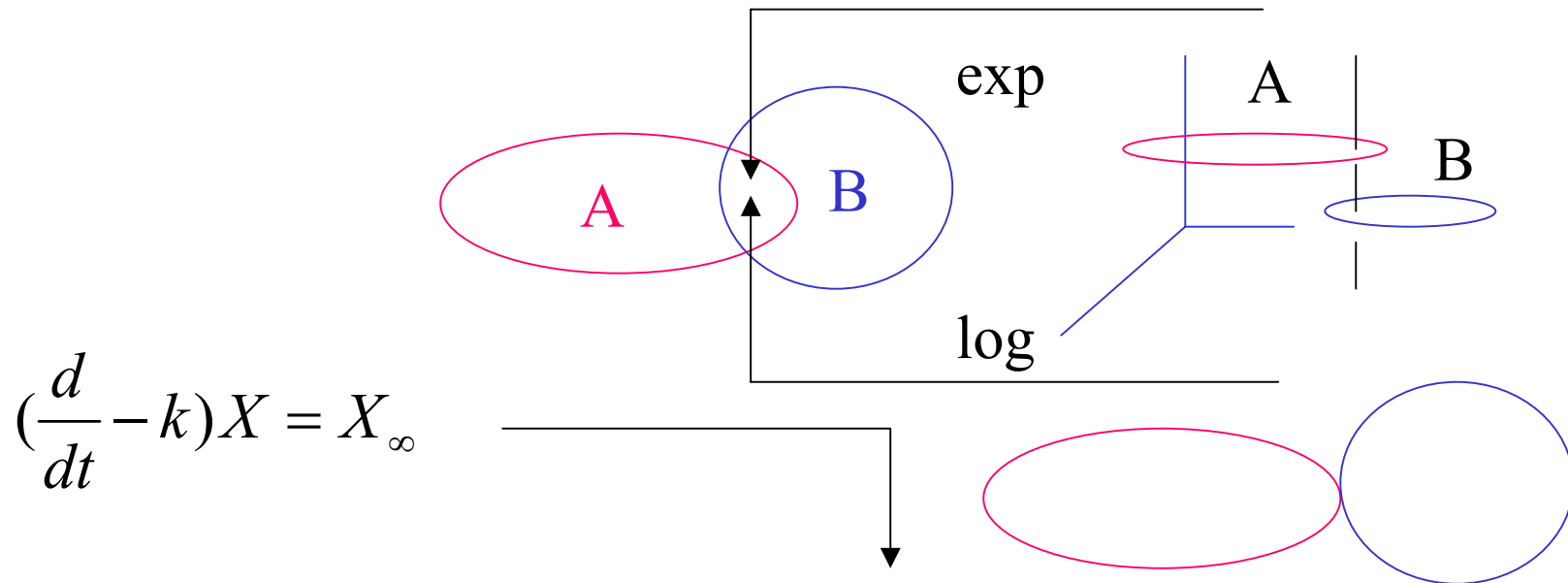
Le contenu topologique des questions soulevées:

*Critique de la notion de vitesse*  
*Elaboration du concept d'agilité*

De Platon à Heidegger en passant par Saint Augustin, Leibnitz, Kant, Bergson , toute la philosophie s'interroge sur l'origine et le contenu du temps et de l'espace. Les interrogations sont profondes et vont bien plus loin que les réflexions des scientifiques modernes qui restent excepté les géomètres (Poincaré, Klein...) très superficiels.

C'est probablement la topologie qui éclaire le mieux aujourd'hui scientifiquement la question. Nous allons distinguer  
*la physique sur le tore* et la  
*physique sur le tore ponctué.*

# Lien exponentiel et séparabilité des ensembles

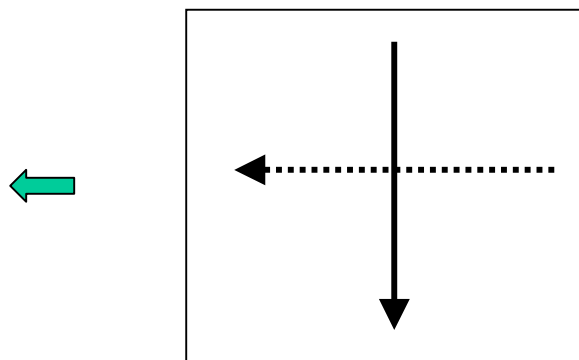
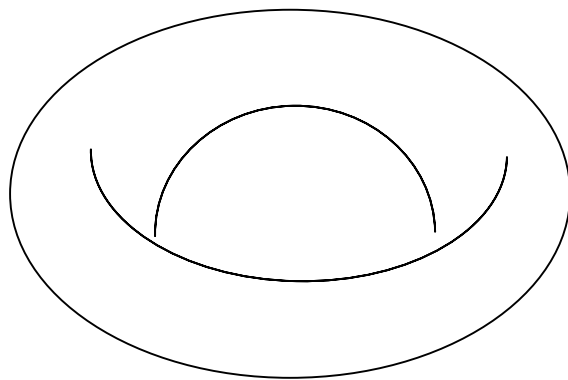
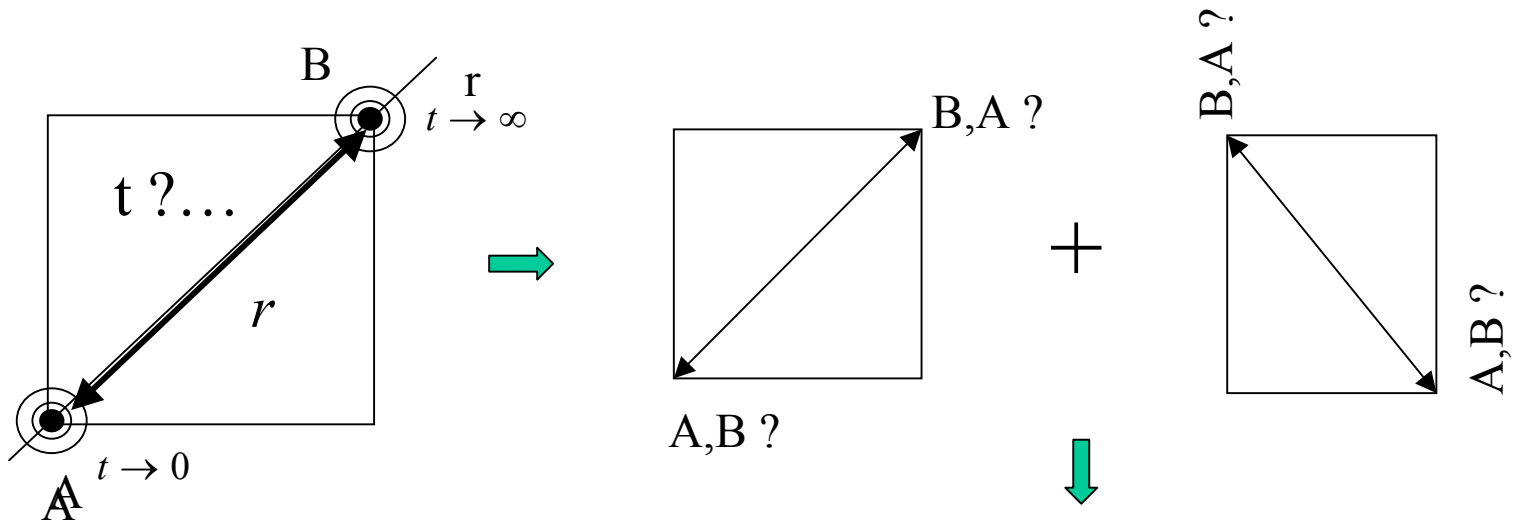


$(+, -) \rightarrow (\times, /)$  : fonction exponentielle

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$(\times, /) \rightarrow (+, -)$  : fonction logarithme

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$



## Topologie (r,t/lm)

## Cas fractal

Conséquences de la topologie en tore ponctué H/H  
*Hyperbolique au bord*



Nouvelle classes cristallographiques  
Nouveaux états de la matière

# Major properties of $+_a$ and $\times_a$

## Properties Kept

Associativity, commutativity, neutral element (0 and 1)

## Singular Properties

$x$  has an opposite element noted  $-_a$   
 $x = -x/(1 + ax)$

$\Rightarrow x_0 = -1/a$  has no opposite element

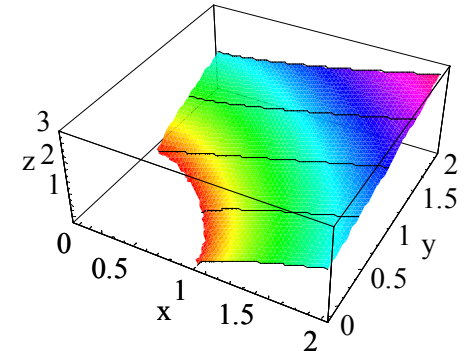
$x$  has an inverse element noted  $1/_a x = (2 - x^a)^{1/a}$

$\Rightarrow$  if  $a > 0$ , 0 has an inverse element

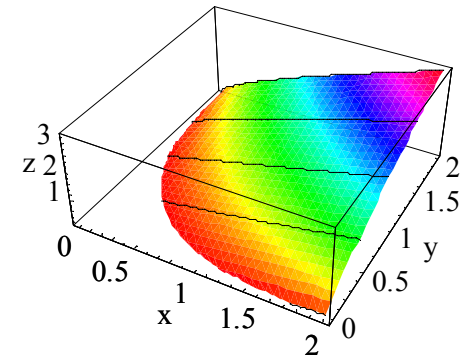
$1/_a 0 = 2^{1/a}$  and  $1/_a(2^{1/a}) = 0$

singularities

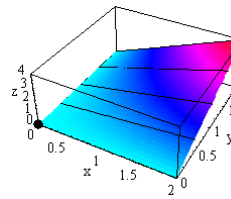
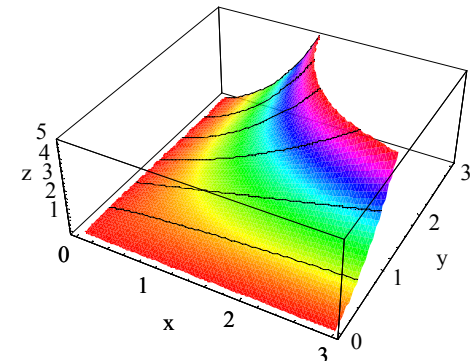
$a > 1$

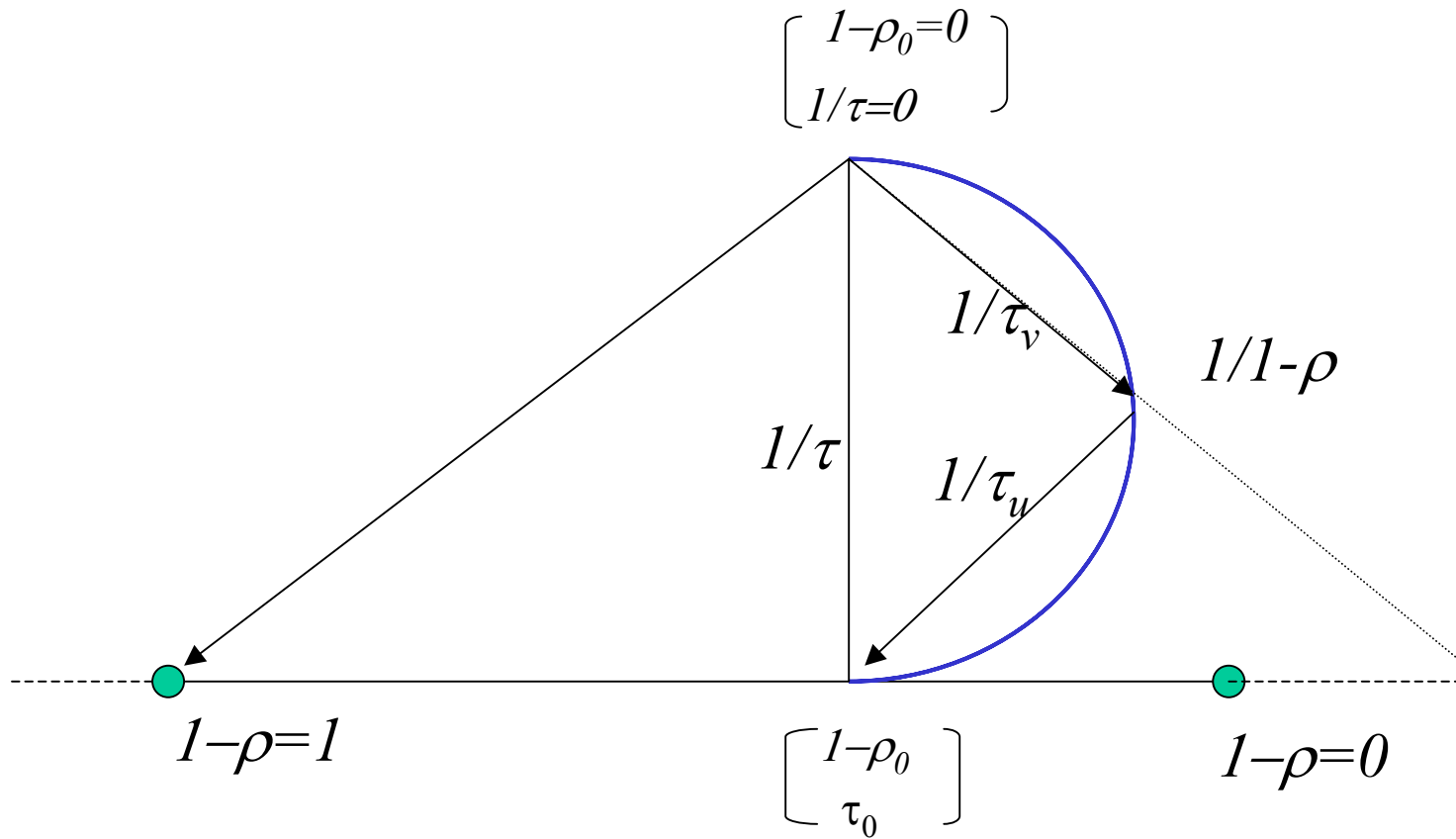


$1 > a > 0$



$a < 0$

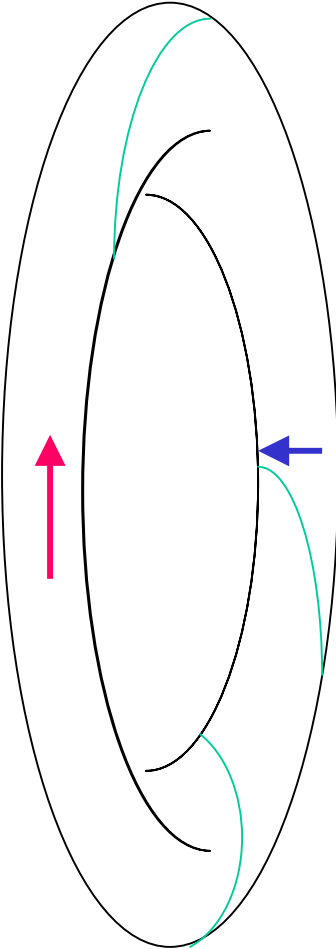




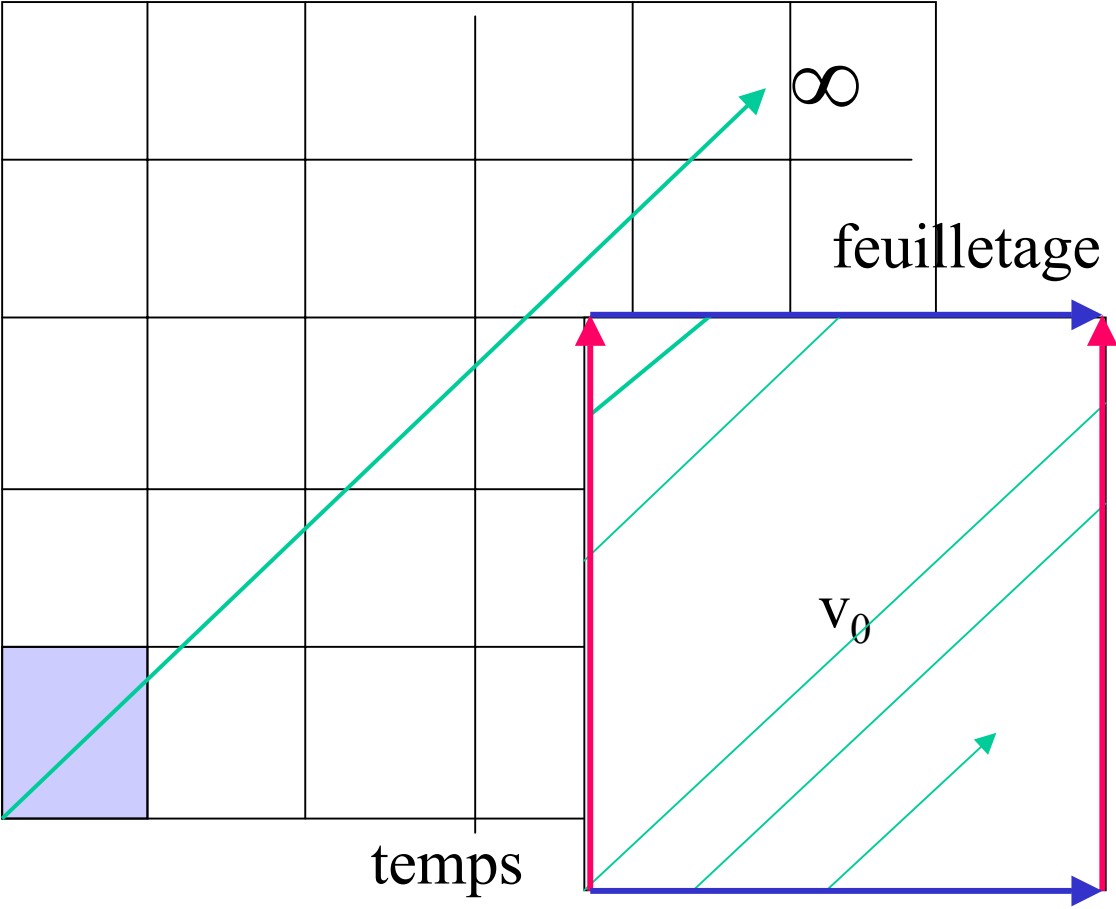
$$m \frac{1-\rho_0}{(\tau_0)^2} \propto \text{const}$$

# Deux déplacements

2D

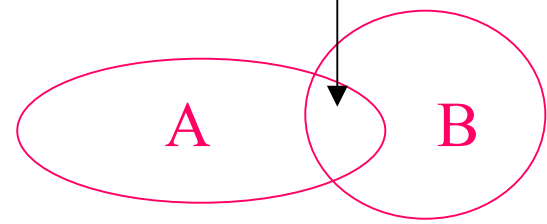


Distance



$$x +_a y = x + y + axy$$

$$x \times_a y = (x^a + y^a - 1)^{1/a}$$

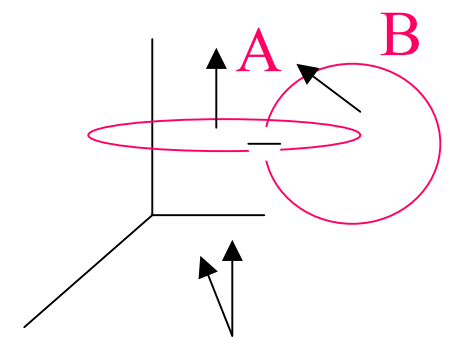


$$e_a^{x+_a y} = e_a^x e_a^y$$

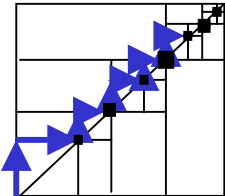
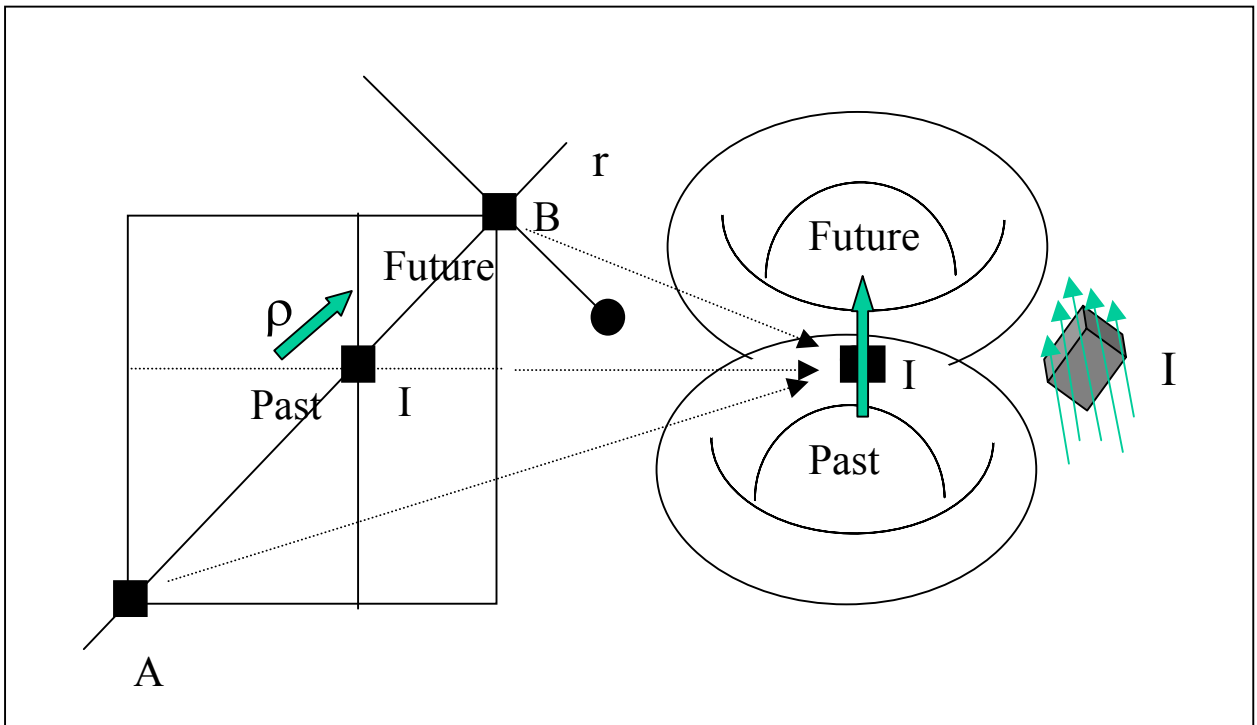
$$e_a^{x+y} = e_a^x \times_a e_a^y$$

$$\ln_a x \times_a \ln_a y = \ln_a x + \ln_a y$$

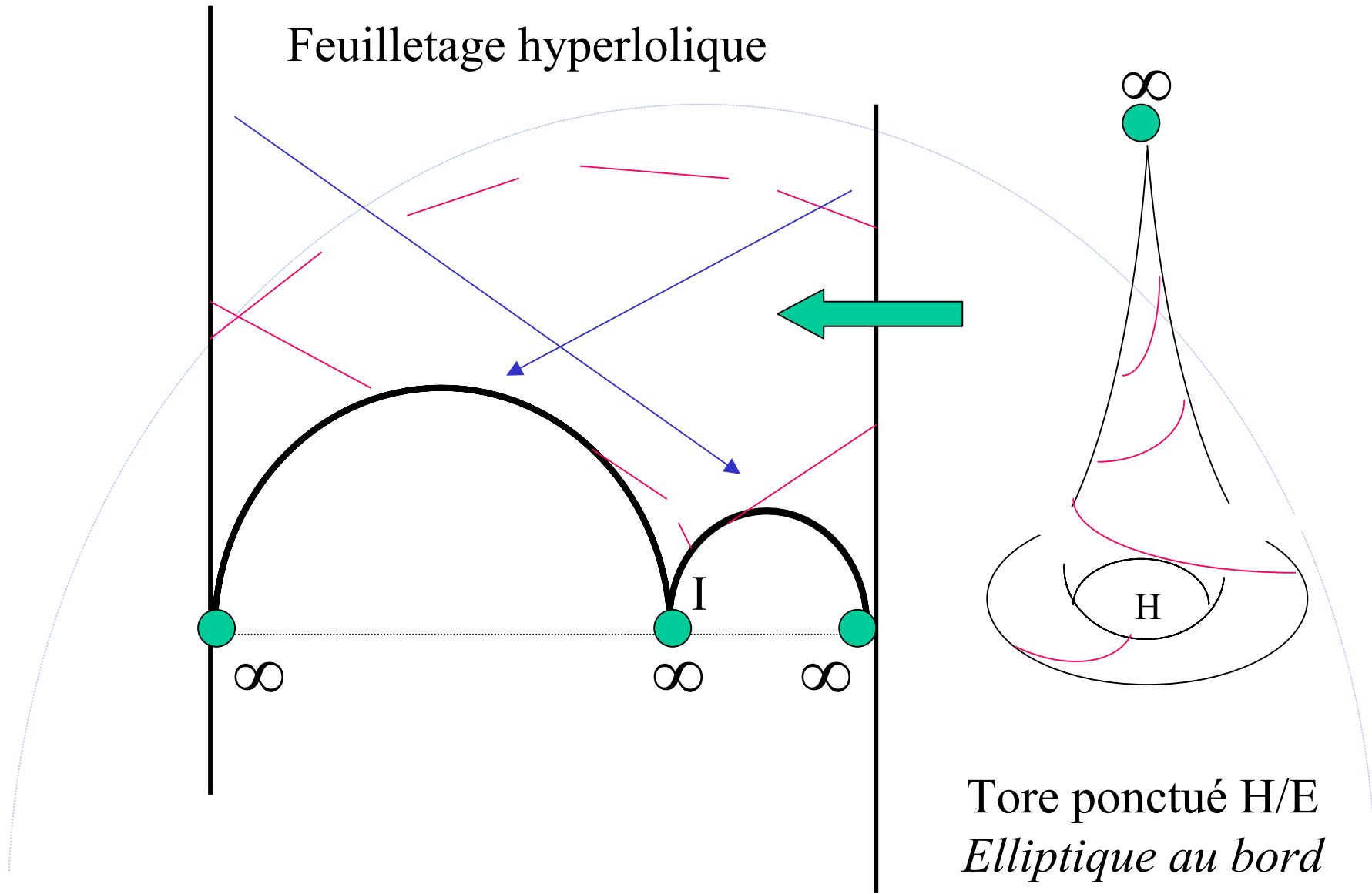
$$\ln_a xy = \ln_a x +_a \ln_a y$$



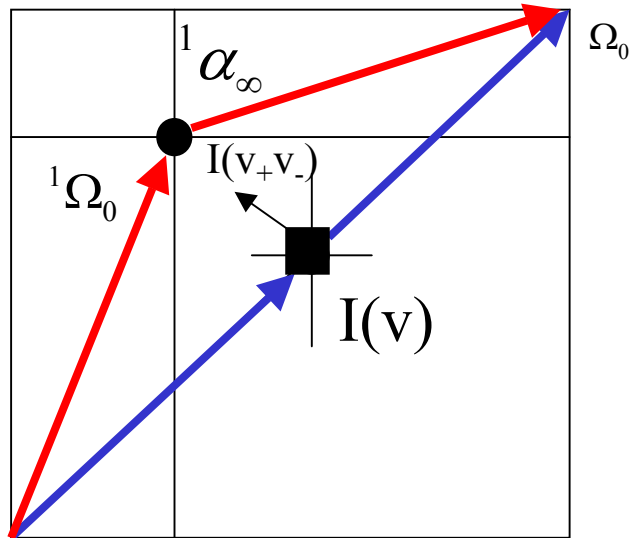
Ensembles intriqués  
Non séparables

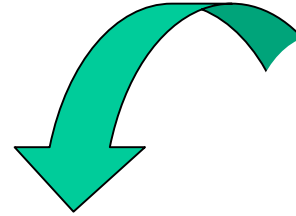


# Feuilletage hyperbolique



Tore ponctué H/E  
*Elliptique au bord*





$$e^{x-y} = e^x / e^y$$

$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y$$

$$x /_a y = \left( x^a - y^a + 1 \right)^{1/a}$$

$$e_a^{x-{}_a y} = e_a^x / e_a^y$$

$$e_a^{x-y} = e_a^x /_a e_a^y$$

$$\ln_a(x /_a y) = \ln_a(x) - \ln_a(y)$$

$$\ln_a(x / y) = \ln_a(x) -_a \ln_a(y)$$

## La question de la Thermodynamique / Statistique

*Chacun peut percevoir que la remise en cause de l'extensivité et la non séparabilité doivent conduire à une sérieuse révision de la thermodynamique*

*Et éclairer en particulier de la thermodynamique des milieux complexes*

**Ou en sommes nous ?**

## Complex Geometry

non markovian process

Non extensive sets

Non homogeneous thermodynamics

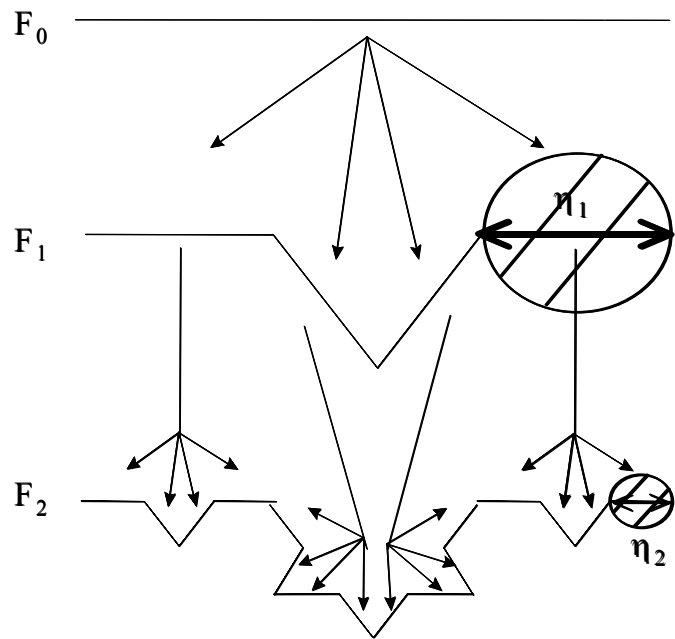
Incomplete statistics

$$\ln_a x = \frac{x^a - 1}{a}$$

$$e_a^x = (1 + ax)^{1/a}$$

$$I_i = k \ln_{1-q} p_i$$

$$p_i = e_{1-q}^{(-\beta E_i)} / Z$$



$$N \times \eta^d = 1$$

*probability*

$$\frac{1}{N} = p_c$$

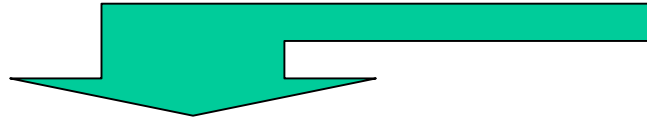
*measure*

$$\sum p_c^{1/d} \eta = 1$$

*Non standard normalisation*

$$p_L \propto \left(\frac{1}{p_c}\right)^{(1/d)-1}$$

# Généralisation of information théorie ( théorie des ensembles non extensifs)



$$I(N) = \ln_{1-q}(N)$$

$$I(1) = 0; I(e_{1-q}(1)) = 1$$

$$I(N) \leq I(N + 1)$$

$$I(N_1; N_2) = I(N_1) +_{1-q} I(N_2)$$

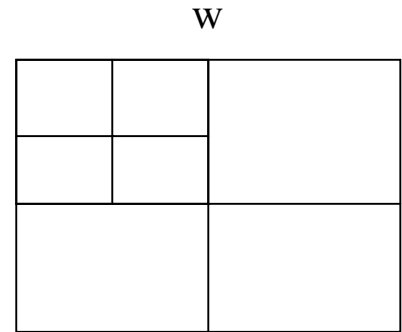
$$I(N) = I_w + \sum p_i^q I(N_i)$$

$$I(1) = 0; I(0) = 1$$

$$I(N) \leq I(N + 1)$$

$$I(N_1, N_2) = I(N_1) + I(N_2)$$

$$I(N) = I_w + \sum p_i I(N_i)$$



$$I(N) = \ln_{1-q}(N)$$

$$S_q = kN^{1-q} I_w = -k \sum p_i^q \ln_{1-q}(p_i)$$



$$S(A \cup B) = S(A) + S(B) + \lambda S(A)S(B)$$

$$U(A \cup B) = U(A) + U(B) + \lambda U(A)U(B)$$

# Généralisation de la théorie de Shannon

	$\sum_i p_i = 1$	$\sum_i p_i^q = 1$
$I_i = \ln p_i$	Shannon Theory $S = -\sum_i p_i \ln p_i$	Extensive open set stat* (WNLM theory). $S = -\sum_i p_i^q \ln p_i$
$I_i = \ln_{1-q} p_i$	Tsallis theory*** $S = -\sum_i p_i \ln_{q-1} p_i = -\frac{\sum_i p_i^q - 1}{1-q}$	Non extensive open set stat** (WNLM theory). $S = -\sum_i p_i^q \ln_{1-q} p_i = \frac{\sum_i p_i - 1}{1-q}$

(\*) électrons corrélés en supraconductivité

(\*\*) optimisation des échanges économiques

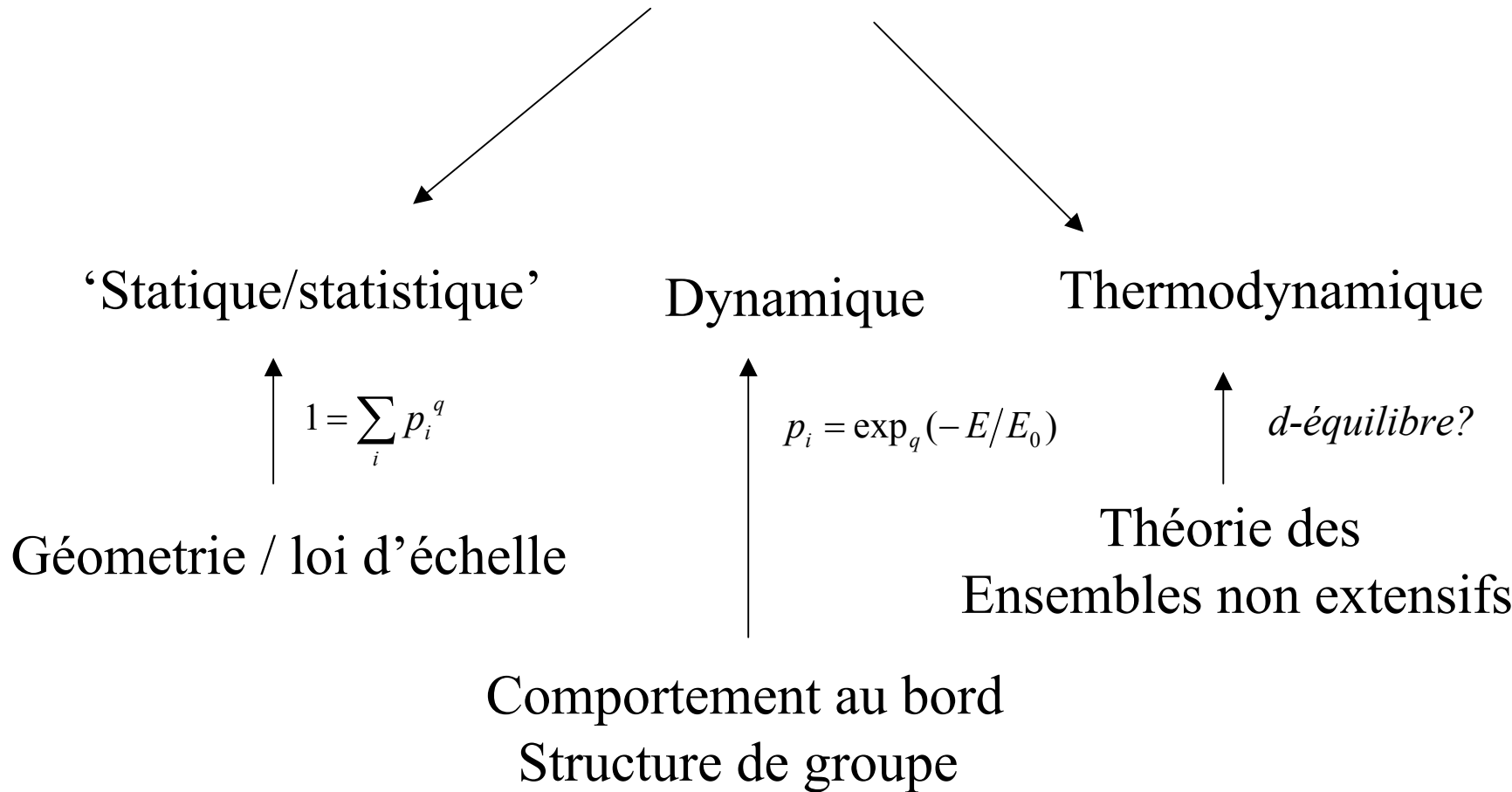
(\*\*\*) gaz d'électrons turbulents

# Relations thermodynamiques étendues

Gibbs' theory	WNLM extensive Theory	WNLM non extensive theory
Entropy $S = -k \sum_{i=1}^w p_i \ln p_i$	$S = - \sum_i p_i^q \ln p_i$	$S_q = -k \sum p_i^q \ln_{1-q} p_i$
Distribution function $p_i = e^{-\beta E_i} / Z$	$p_i = e^{-q\beta E_i} / Z$	$p_i = e_{1-q}^{-\beta E_i} / Z_q$
Partition function $Z = \sum_{i=1}^w e^{-\beta E_i}$	$Z = \left( \sum_{i=1}^w e^{-q\beta E_i} \right)^{1/q}$	$Z_q = \left[ \sum_{i=1}^w \left( e_{1-q}^{-\beta E_i} \right)^q \right]^{1/q}$
Free energy $F = -kT \ln Z$	$F = -kT \ln Z$	$F_q = -kT \ln_{1-q} Z_q$
S,U,Z link $S = l \ln Z + k\beta U$	$S = l \ln Z + k\beta U$	$S_q = k \ln_{q-1} Z_q + k\beta Z_q^{q-1} U_q$

# Fondement des relations notées

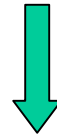
## Le rôle de la fractalité



## Non extensive opened set state functions

$$S_q(A \cup B) = S_q(A) +_{(1-q)/k} S_q(B)$$

$$U_q(A \cup B) = U_q(A) +_{\beta(1-q)} U_q(B)$$



Quid de la température et de l'équilibre de deux systèmes

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_q}{\partial U_q}$$

$$T = \frac{Z^{1-q}}{k\beta}$$

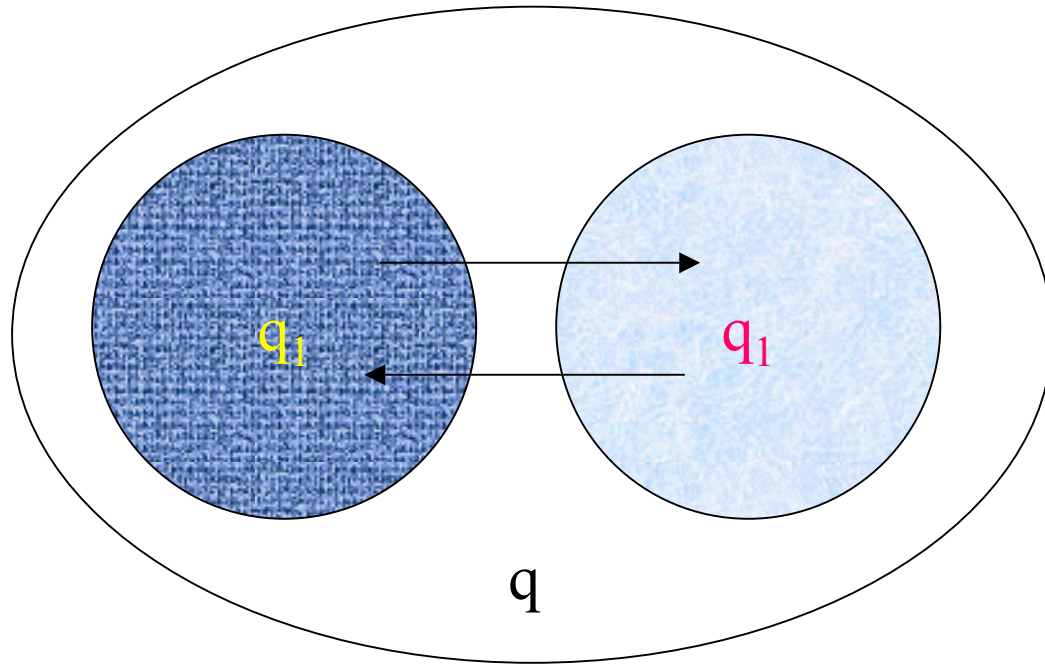
Nevertheless

Zero law

$$S'_q = Z_q^{1-q} S_q$$

Equilibrium exists between two states

$$\beta(A) = \beta(B) = \frac{1}{kT}$$



$$T = \frac{\partial S_q}{\partial U_q} \quad S_q = (1 - q_1)S_{q_1} + {}_{1/1-q} (1 - q_2)S$$

# 4

## The question of matching the models with experimental data

One of the major problem to fit the data , to distinguish  
 One model from other and to disclose the subtle effects  
 Non linear elastic response of rubber matrix

Example: the free energy density of reinforced rubbers

$$X(38) : \lambda_{\mu} = 1 + X \varepsilon_{\mu}$$

$$\sigma_{R,\mu} = \partial W_R / \partial \lambda_{\mu}$$

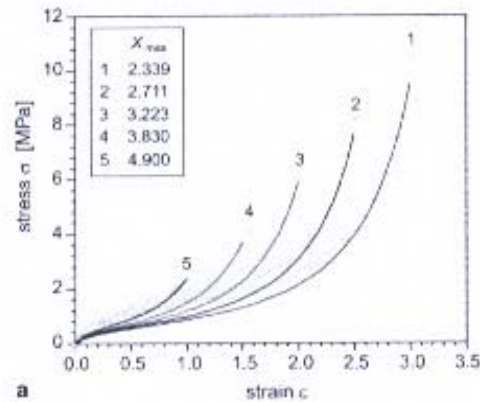
Uniaxial, unfilled  $X=1, \lambda_1=1, \lambda_2=\lambda_3=1/\sqrt{\lambda}$

$$\sigma_{R,1} = G_c (\lambda - \lambda^{-2}) \left\{ \frac{1 - T_e/n_e}{\left(1 - \frac{T_e}{n_e} (\lambda^2 + 2/\lambda - 3)\right)^2} - \frac{T_e/n_e}{1 - \frac{T_e}{n_e} (\lambda^2 + 2/\lambda - 3)} \right\} + 2G_e (\lambda^{-1/2} - \lambda^{-2})$$

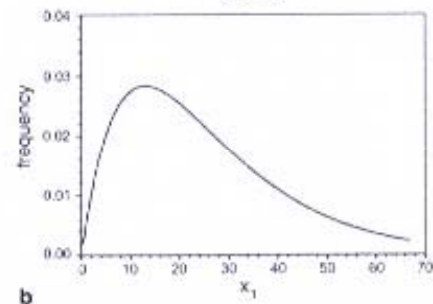
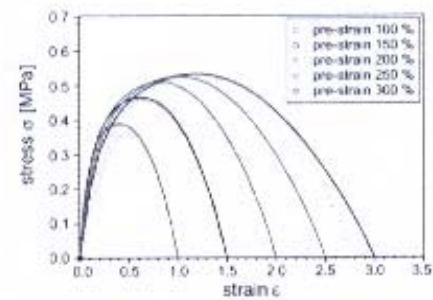
- X amplification factor on strain
- N<sub>e</sub> number of statistical chain segment between two entanglements
- T<sub>e</sub> trapping factor (0 < T<sub>e</sub> < 1)
- G<sub>e</sub> unfilled , proportional to entanglements density
- G<sub>c</sub> unfilled proportional to the density of network junctions

$$G_c = A_c \nu_{mech} k_B T$$

$$G_e = \frac{\rho N_a l_s^2 k_B T}{4\sqrt{6} M_s r_0^2}$$

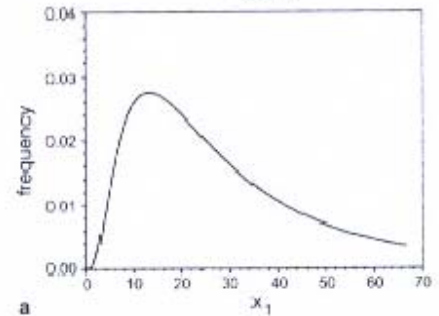
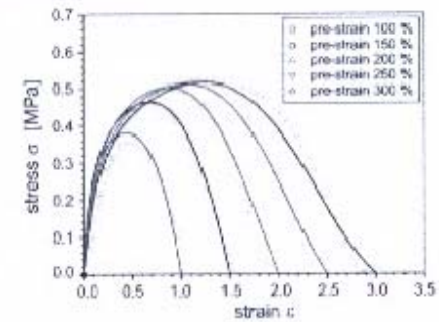


a

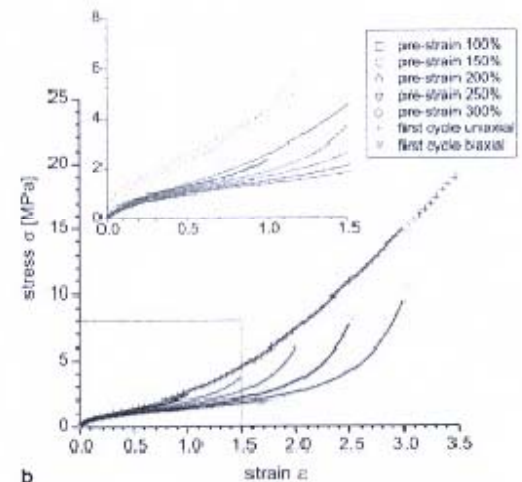


b

**Fig. 45** a Uniaxial stress-strain data (symbols) of S-SBR samples filled with 40 phr N220 at various pre-strains  $\epsilon_{max}$  and simulation curves (lines) of the polymer contribution according to Eqs. (38) and (44). The set of polymer parameters is found as  $G_c=0.176$  MPa,  $G_p=0.2$  MPa, and  $n_p/T_p=100$ . b Stress contributions of the strained filler clusters for the different pre-strains (upper part), obtained by subtracting the polymer contributions from the experimental stress-strain data of a. The solid lines are adaptations of the theoretical stress-strain curves of Eq. (43) and the cluster size distribution Eq. (39) shown



a



b

# Industrial models

# Example Wearing

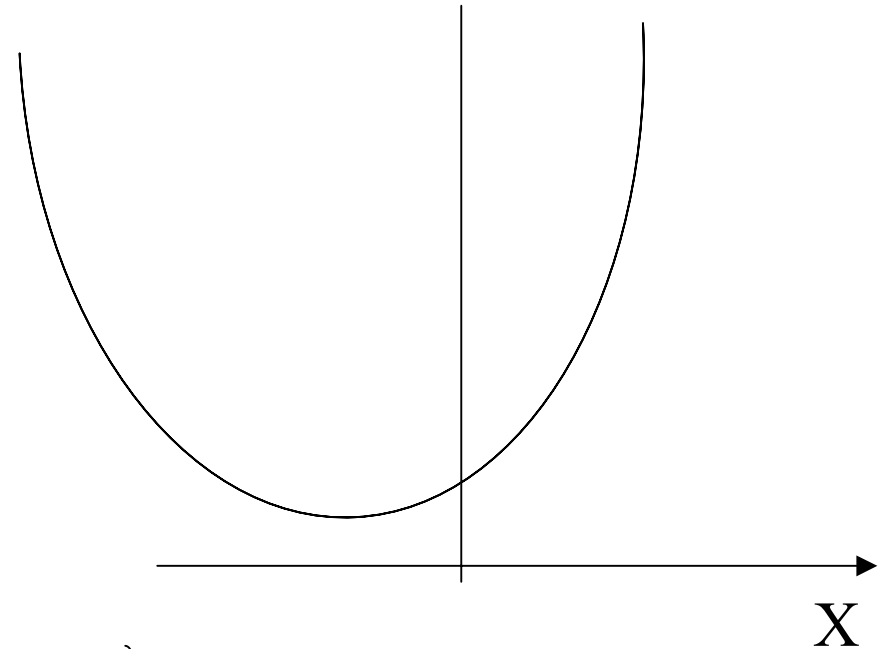
$$V_{us} = \frac{1}{C_{oh}} \mu^{2\alpha+1} P^{\alpha-1} L_{glis}$$

$$L_{glis} = f(\mu\sigma_n); P = \frac{\sigma_n}{\mu};$$

$$U = \frac{1}{C_{oh}} \mu^{\alpha+1} \sigma_t L g_{\%}$$

$$U = \frac{1}{C_{oh}} \mu^{\alpha+1} K^{\alpha-1} L \left( g_{\%} - \frac{\sigma_{cr} - \sigma_{\wedge}}{K_x} \right)^{\alpha}$$

$$A \left( B + \frac{X - C}{k} \right)^{\alpha}$$



computing : car models

pneumatics ( $K_x, g_{\%}, S_{cont} \dots$ )

properties ( $\sigma, \tau_{enta} \dots$ )



A new method for data treatment:

Eigen function method  
(*Devoted to non linear models*)

$$y_{NL} = f(t, \vec{A})$$

$$F(y, y', y'', \dots) = 0$$

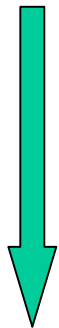
$$Y = \sum_i C_i(\vec{A}) X_i$$

$$(Y, X_i) = h(t, y'(t), y''(t), \dots)$$

Functional data base + Functional N

*Picard Th.*

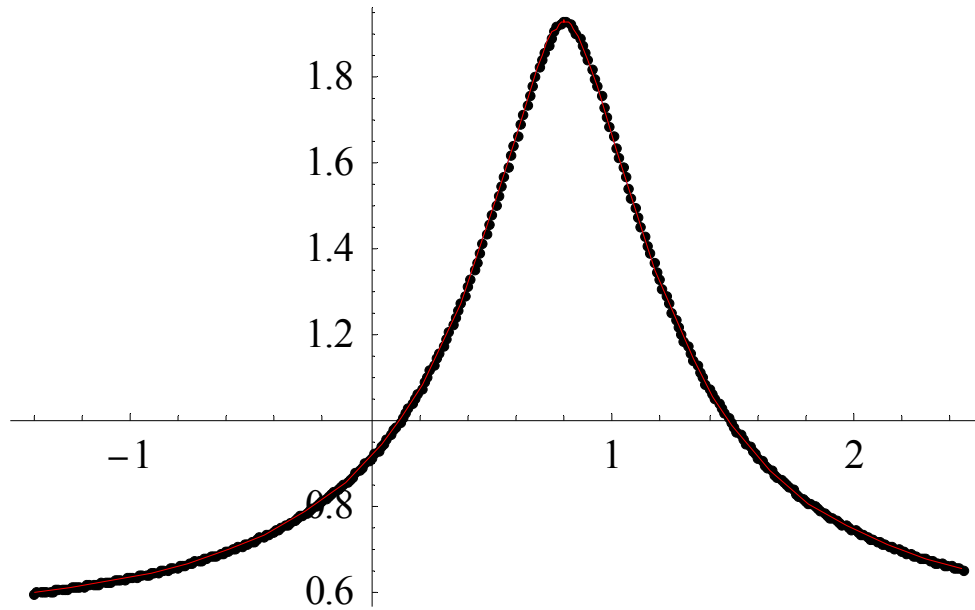
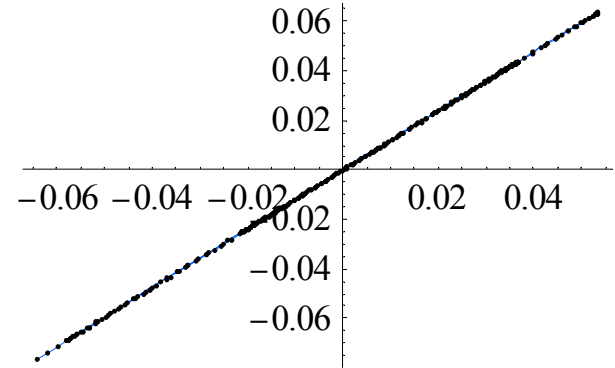
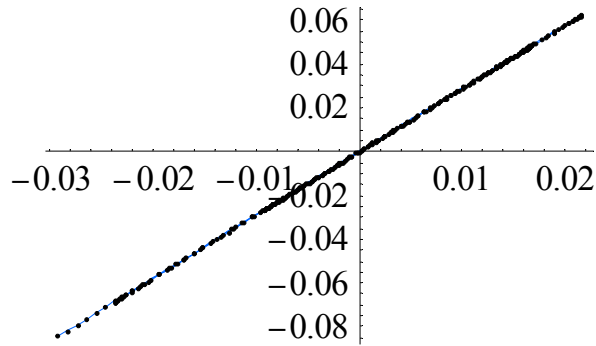
*Conjecture*



Algebraic NL

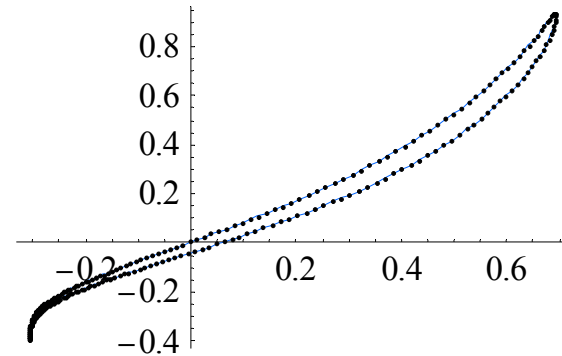
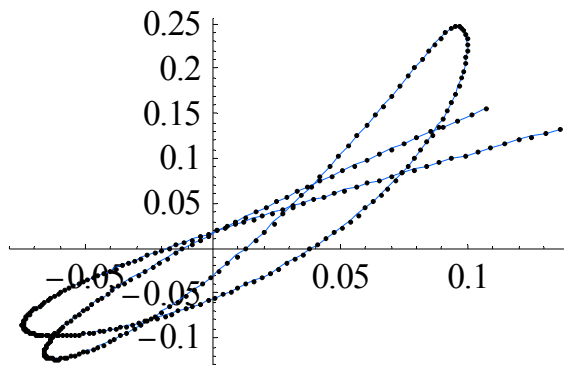
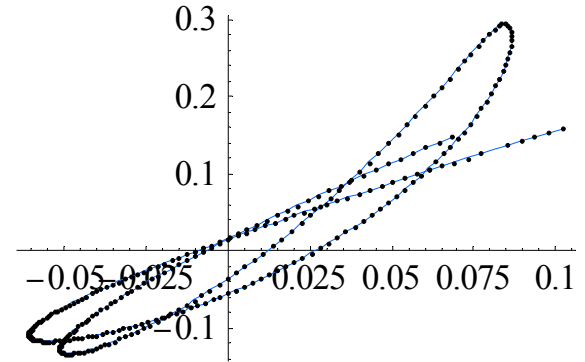
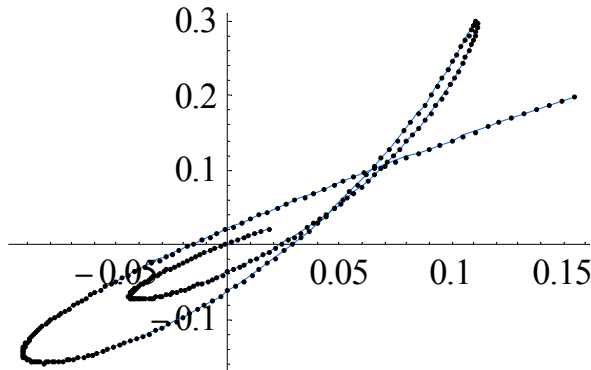
# Right Fitting

$$f(\phi - \phi_0) = c + \frac{1}{a + b|\phi - \phi_0|^\alpha}$$



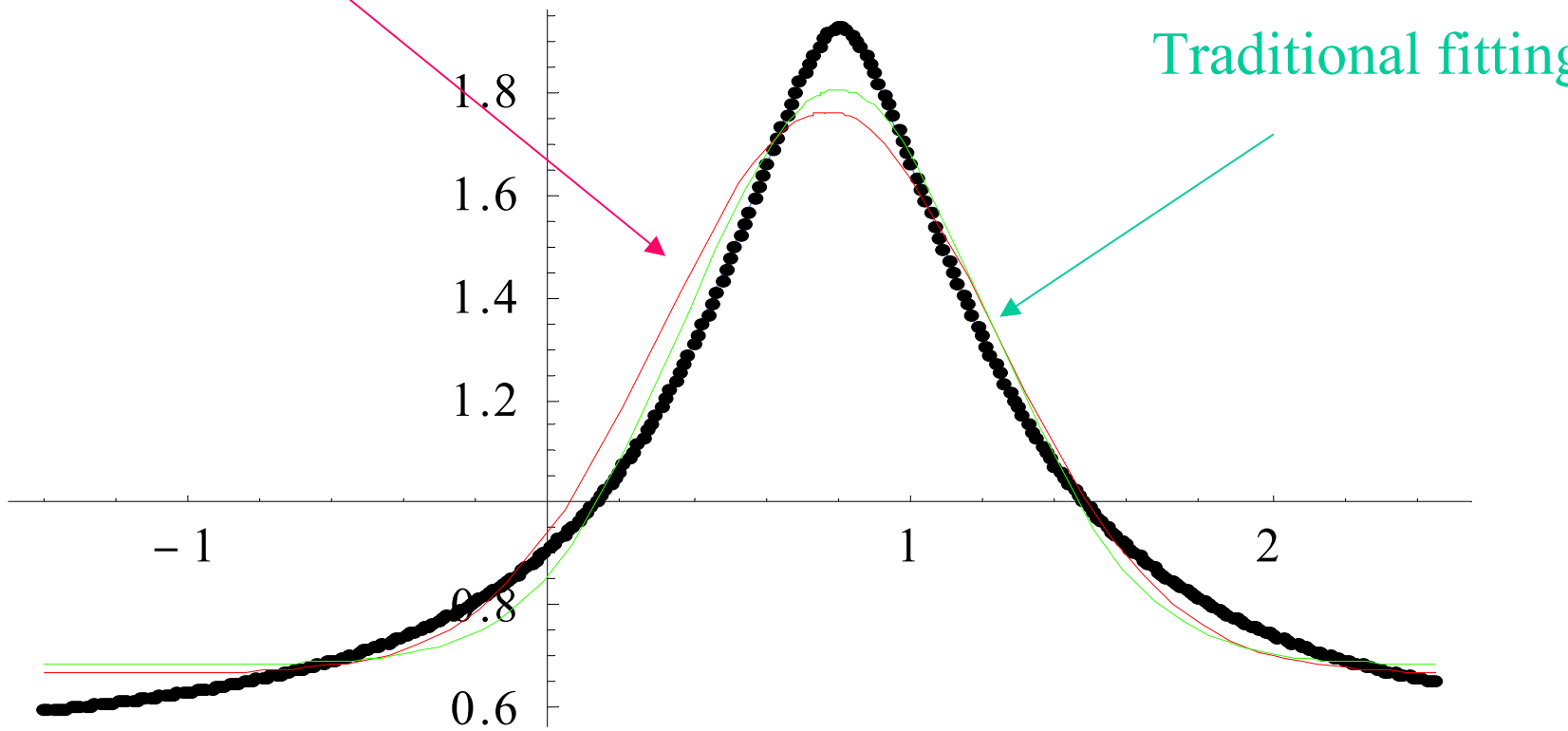
# Non relevant fitting

$$g(t, \vec{A}) = a + be^{-\left(\frac{\phi - \phi_0}{\lambda}\right)}$$



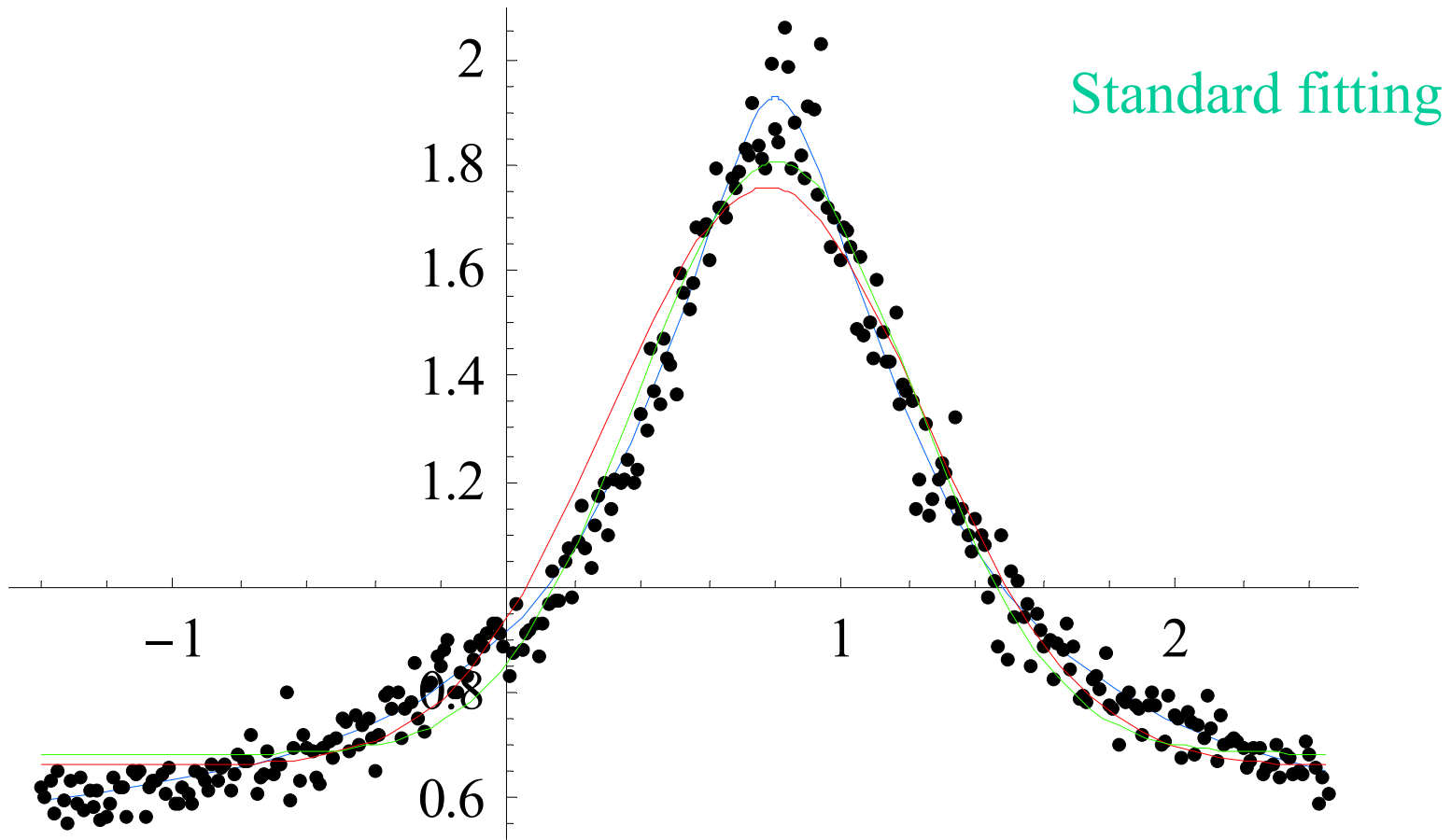
# Discrimination

$$g(t, \vec{A}) = a + be^{-\left(\frac{\phi - \phi_0}{\lambda}\right)}$$



# Wrong fitting with noise

## Discrimination



# GENERAL CONCLUSION AND SUGGESTIONS

## 'ISMANS PROGRAM'

