

# SYNTHESE FONDÉE SUR LA RÉCURSIVITÉ FRÉQUENTIELLE D'UN DÉRIVATEUR D'ORDRE NON ENTIER BORNÉ EN FRÉQUENCE RÉALISÉ EN TECHNOLOGIE HYDROPNEUMATIQUE

X. MOREAU, P. SERRIER et A. OUSTALOUP



Équipe CRONE

Commande - Robotique  
Ordres Non Entiers



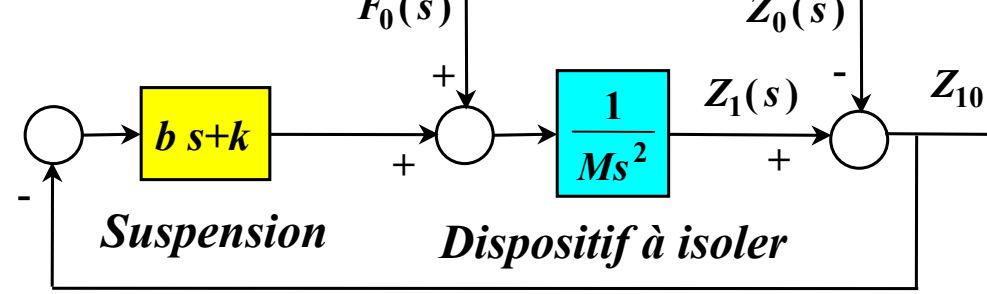
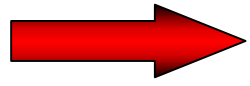
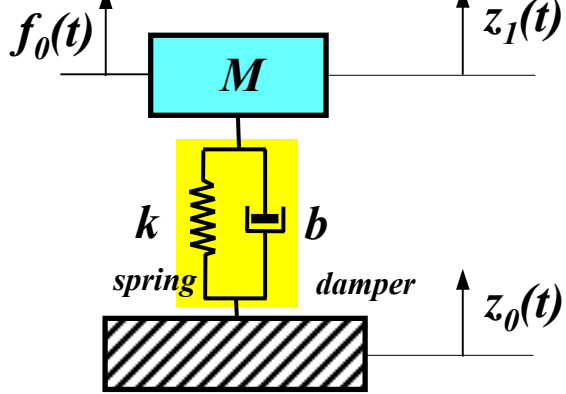
UMR 5131

*LAP – UMR 5131 CNRS – Université Bordeaux 1 – ENSEIRB  
351, Cours de la Libération – 33405 Talence Cedex – France  
Tél. +33 (0)5 40 00 24 00 / 65 30 – Fax +33 (0)5 40 00 66 44  
email : [prenom.nom@laps.u-bordeaux1.fr](mailto:prenom.nom@laps.u-bordeaux1.fr)  
URL : <http://www.laps.u-bordeaux1.fr>*

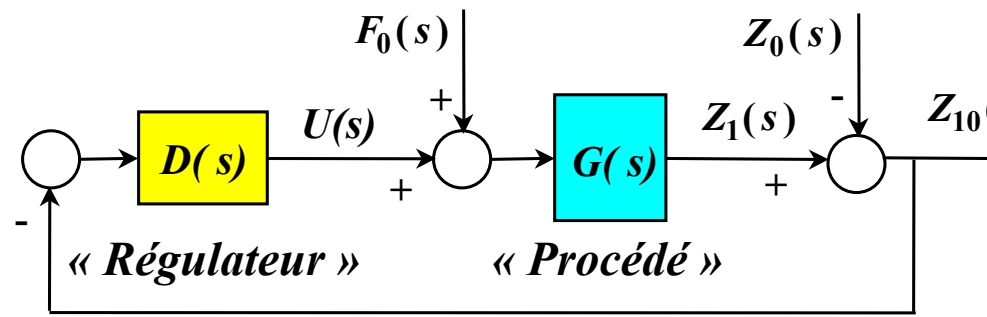
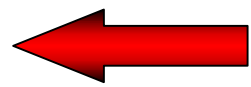
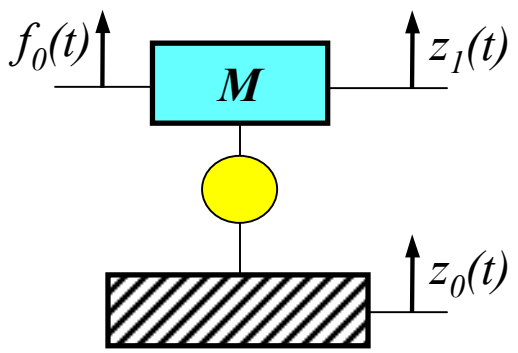


# SOMMAIRE

- **1 - INTRODUCTION**
- **2 - METHODES DE SYNTHESE : RAPPEL**
- **3 - METHODES FONDEES SUR LA RECURSIVITE FREQUENTIELLE**
- **4 - CONCLUSION**

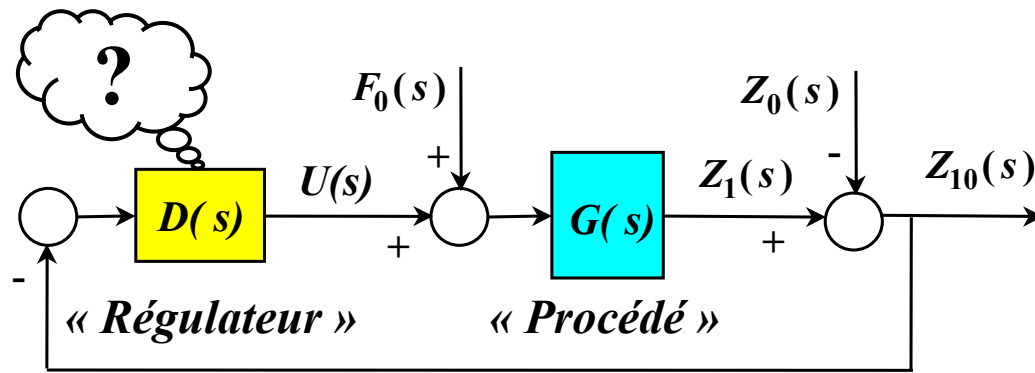


## Généralisation



$$U(s) = - D(s) Z_{10}(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{M s^2}$$



**Objectif :**

Définir une *démarche de conception du dispositif de suspension*

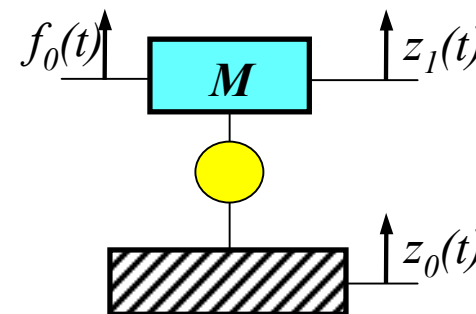
**Stratégie :**

Utiliser les *outils et les méthodes modernes d'analyse et de synthèse* développés en *commande robuste*, en particulier en *commande CRONE*

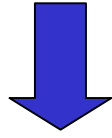
**Résultat :**



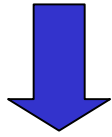
**Suspension CRONE**



# Commande CRONE



*Dérivateur d'ordre non entier  
borné en fréquence*



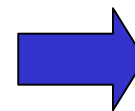
*Forme idéale :*

$$D(s) = D_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m$$

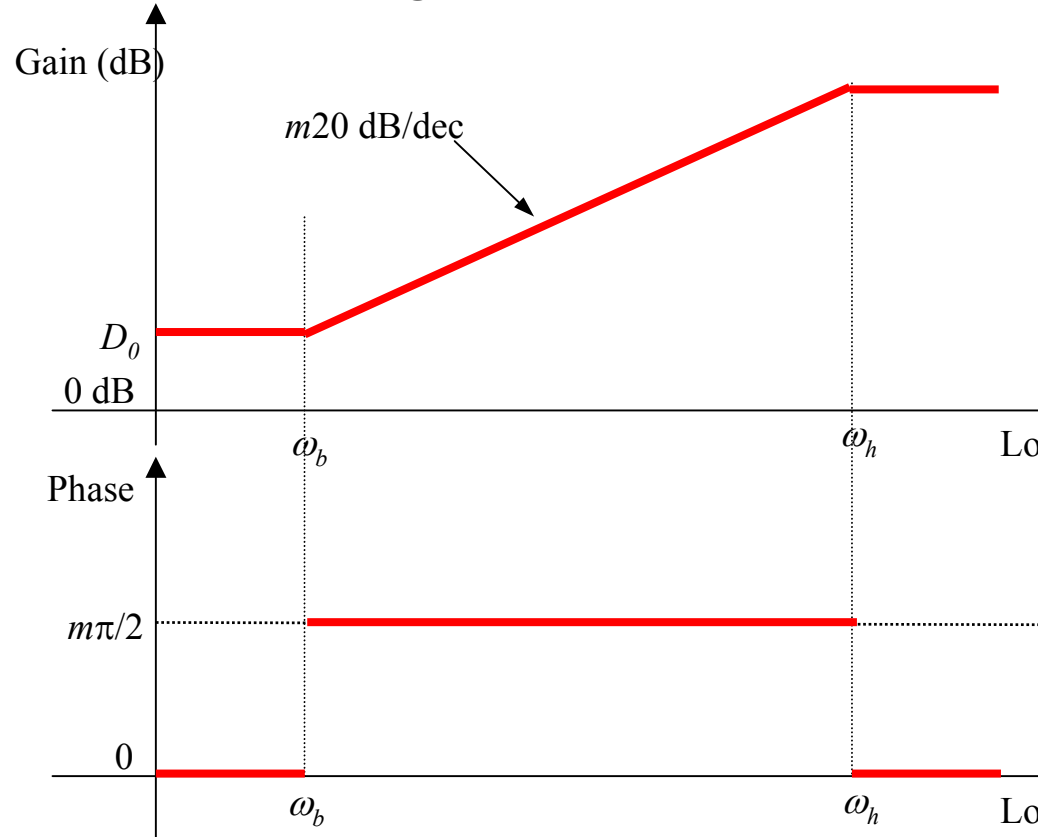
$D_0$  : gain statique

$m$  : ordre de dérivation compris entre 0 et 1

$\omega_b$  et  $\omega_h$  : fréquences transitionnelles basse et haute



## Diagrammes de Bode



**4 paramètres de synthèse  
de haut niveau**

# SOMMAIRE

- 1 - INTRODUCTION
- **2 - METHODES DE SYNTHESE : RAPPEL**
- 3 - METHODES FONDEES SUR LA RECURSIVITE FREQUENTIELLE
- 4 - CONCLUSION



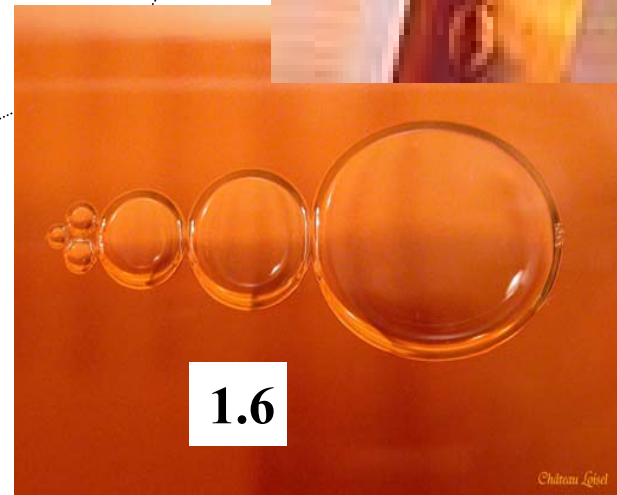
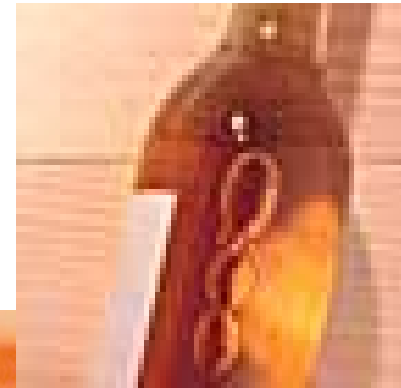
2



1.5

Récurtivité

DERIVATEUR  
d'ORDRE NON ENTIER  
BORNE en FREQUENCE



1.6

# Définition de la récursivité fréquentielle

La synthèse repose sur une *distribution récursive de  $N$  zéros et  $N$  pôles réels*, soit :

$$D(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s),$$

avec

$$D_N(s) = D_0 \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i'}} \right)$$

où

$$\frac{\omega_{i+1}'}{\omega_i'} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \alpha \eta > 1,$$

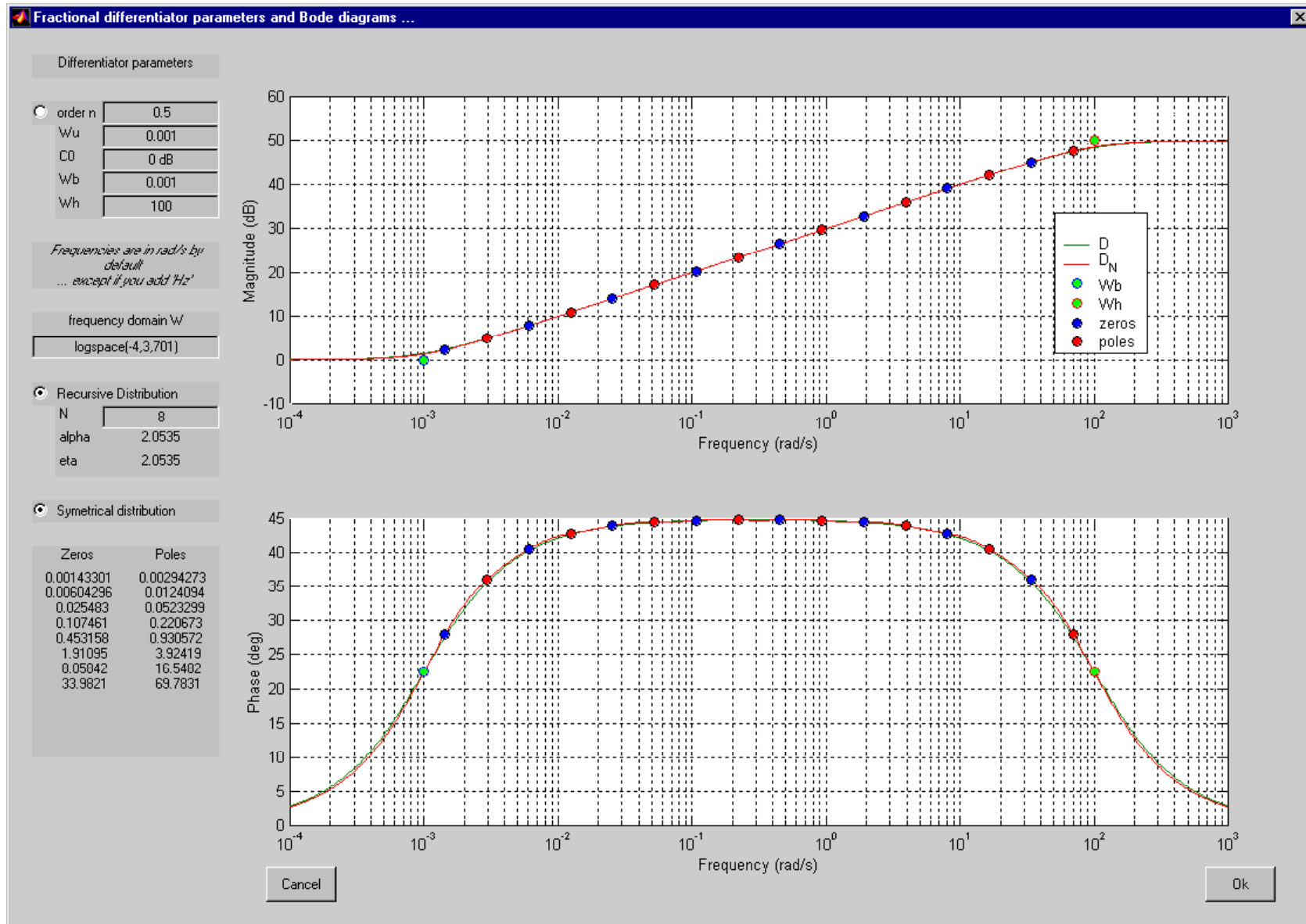
$$\frac{\omega_i}{\omega_i'} = \alpha > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_{i+1}'}{\omega_i} = \eta > 1$$

$$\alpha \eta = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad \eta = (\alpha \eta)^{1-m}, \quad \alpha = (\alpha \eta)^m, \quad \omega_1' = \sqrt{\eta} \omega_b \quad \text{et} \quad \omega_N = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \omega_h$$

**$N$  : nombre de cellules**

**$\alpha$  et  $\eta$  : facteurs récursifs**

# Illustration de la récursivité fréquentielle



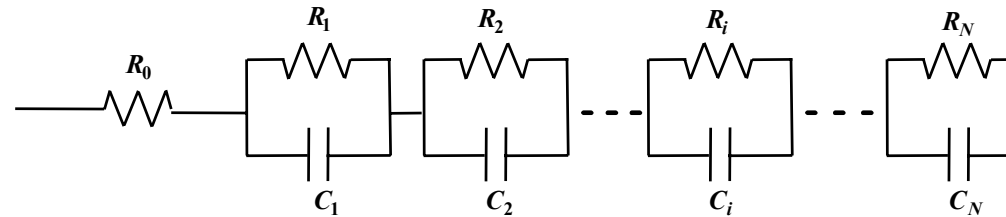
Un **dérivateur non entier** peut également être réalisé par une **distribution récursive des paramètres physiques** des éléments le constituant : **récursivité systémique**.

# Applications

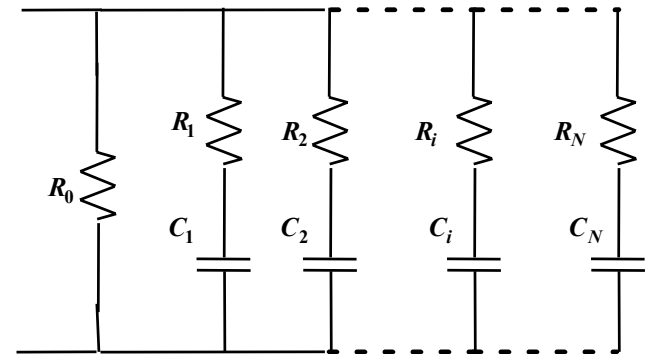
- *simulations numériques*
- *simulations analogiques*
- *réalisations technologiques*

## Domaine électrique

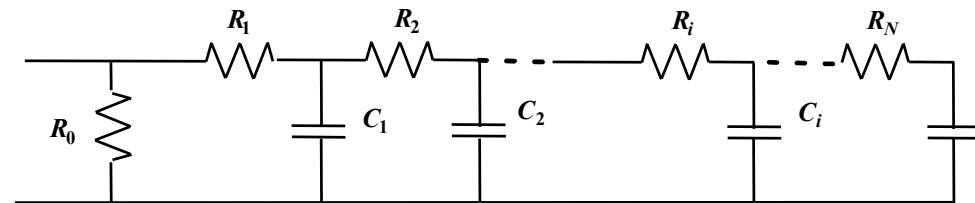
*Arrangement série  
de cellules RC en parallèle*



*Arrangement parallèle  
de cellules RC en série*

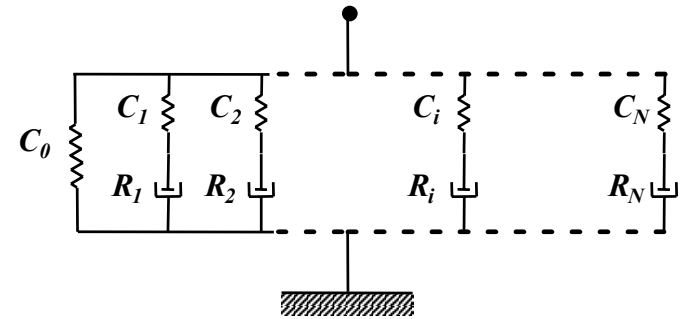
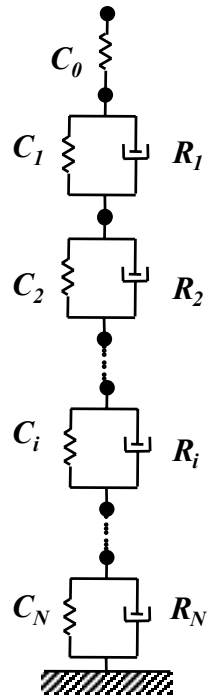


*Arrangement en cascade  
de cellules RC en gamma*



**des systèmes linéaires non entiers**

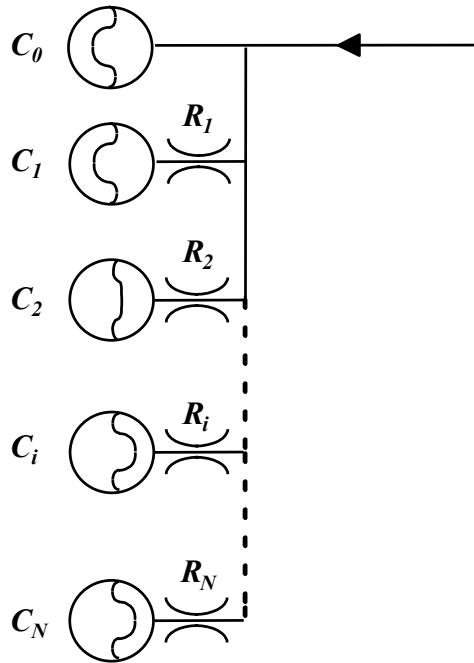
# Domaine de la mécanique



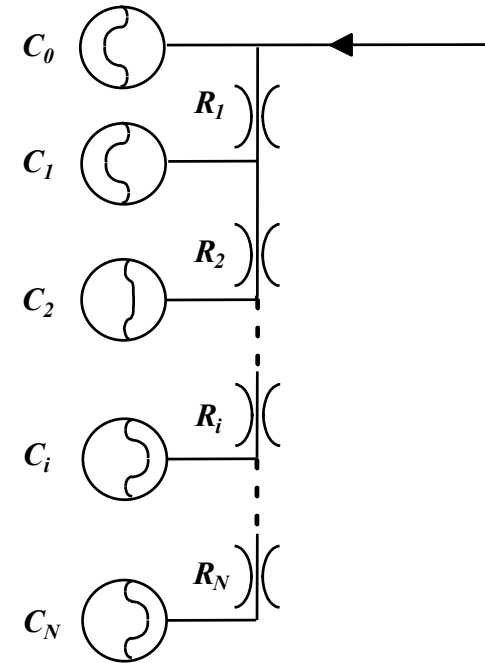
*Arrangement série de cellules RC en parallèle  
modèle de Maxwell généralisé*

*Arrangement parallèle de cellules RC en série :  
modèle de Kelvin-Voigt généralisé*

## *Domaine de l'hydraulique*

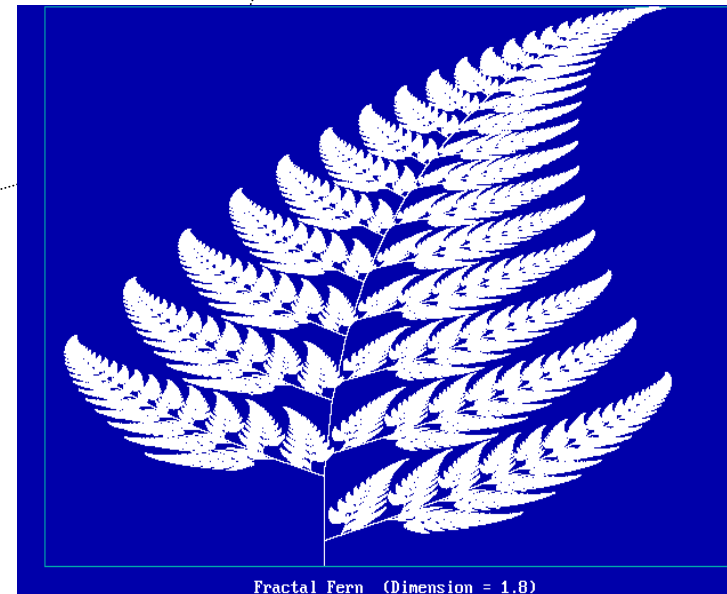
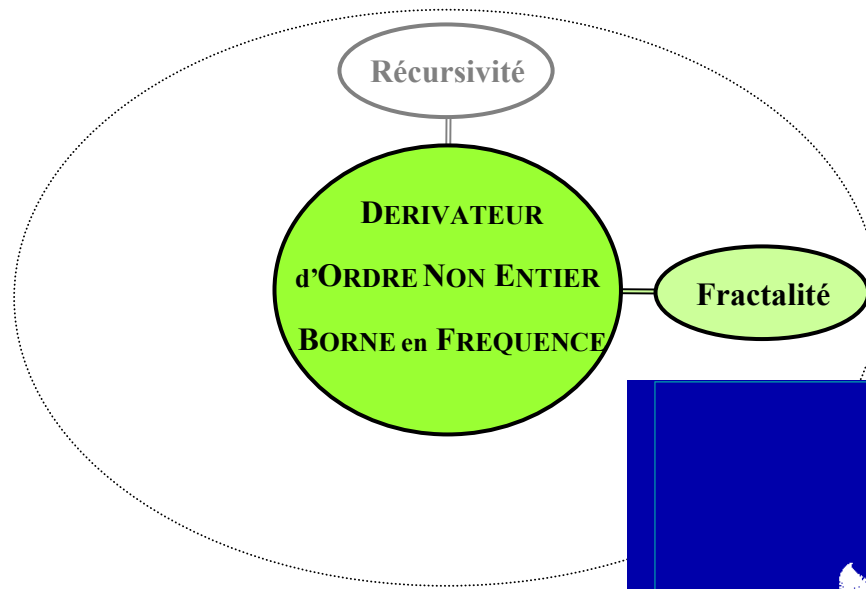


*Arrangement parallèle  
de cellules RC en série*



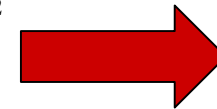
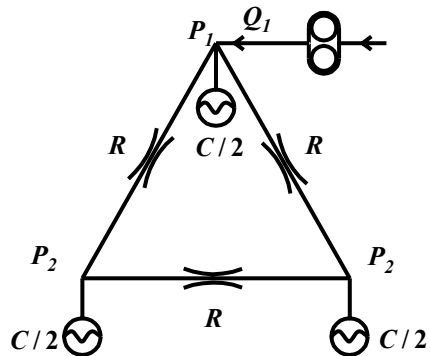
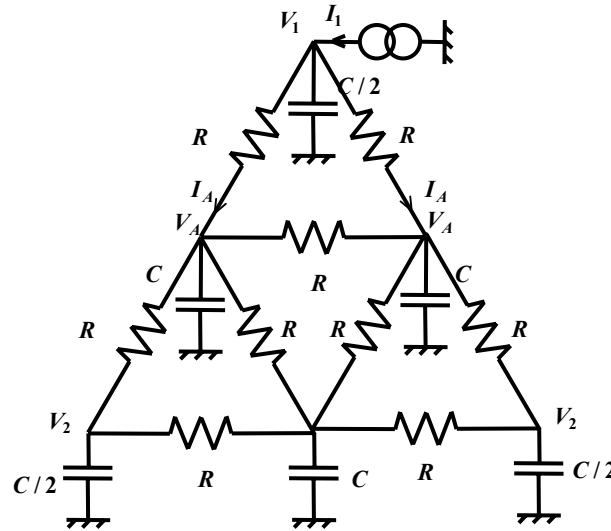
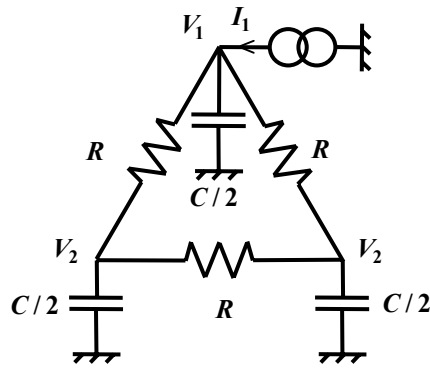
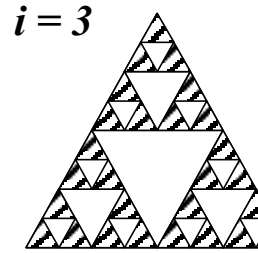
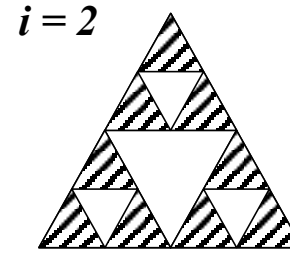
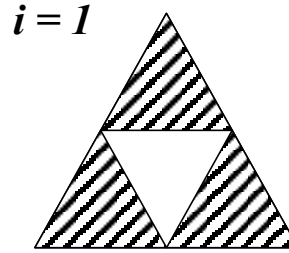
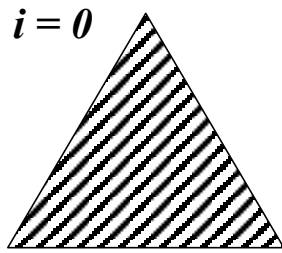
*Arrangement en cascade  
de cellules RC en gamma*

*Mais aussi les domaines de la thermique, de l'électromagnétisme, ...*



Fractal Fern (Dimension = 1.8)

# Du tamis de Sierpinski de dimension spatiale $\delta_s = 2$ au réseau de Sierpinski



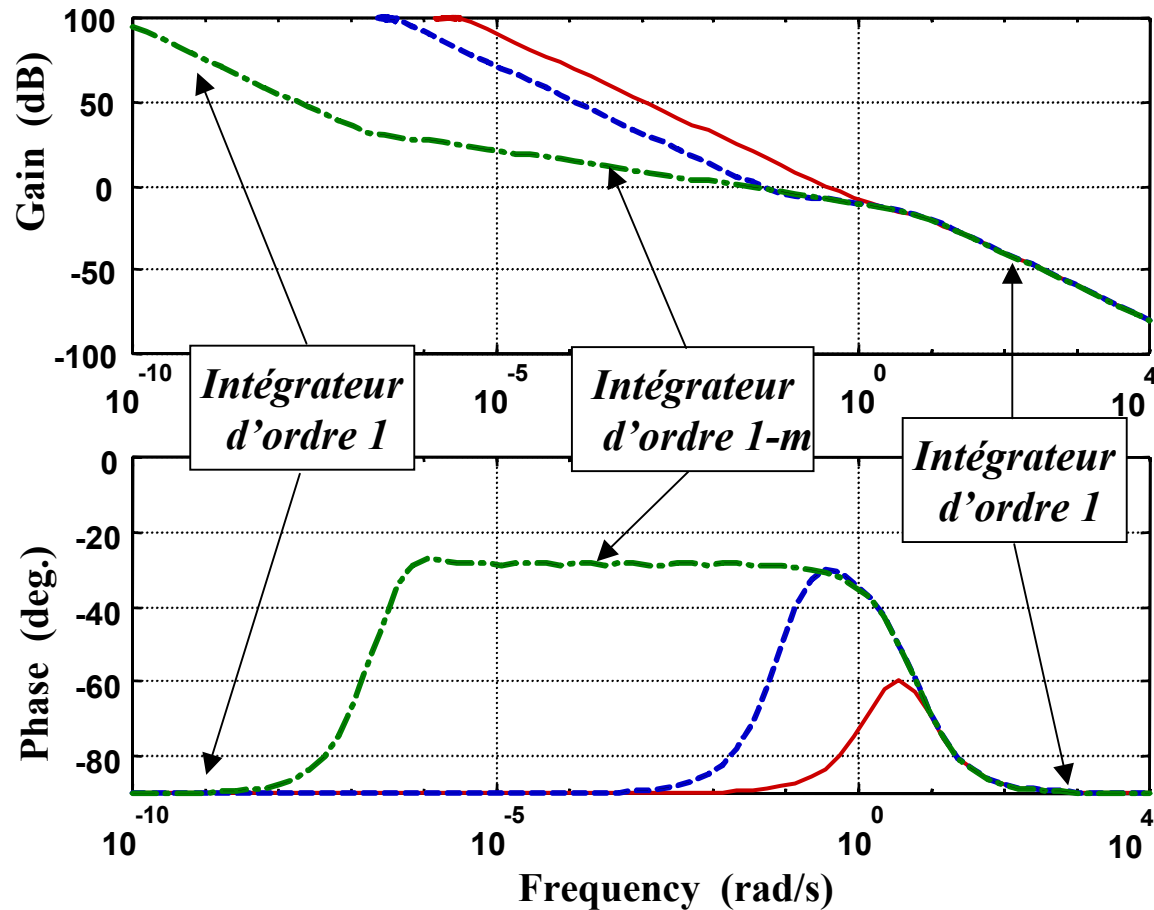
Réseau de Sierpinski  
 $\delta_s = 2$



# Impédance d'entrée

$$R = C = 1$$

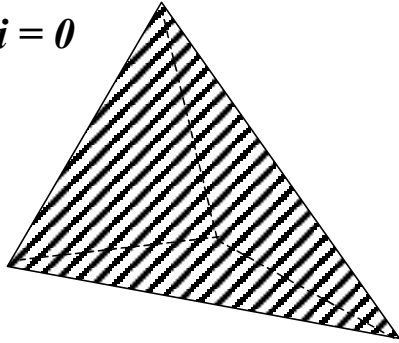
- $i = 0$
- - -  $i = 2$
- · - · -  $i = 10$



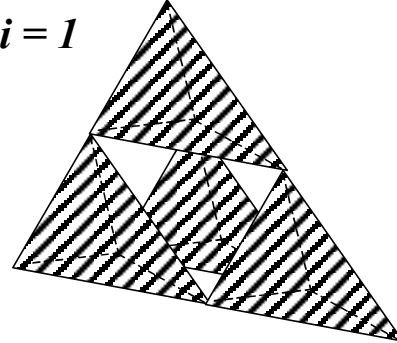
$$I_m(s) = \frac{1}{s} C_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad \text{avec} \quad 1 - m = \frac{-28.57}{-90} = 0.317, \quad \text{soit} \quad m = 0.683$$

# Du tamis de Sierpinski de dimension spatiale $\delta_s = 3$ au réseau de Sierpinski

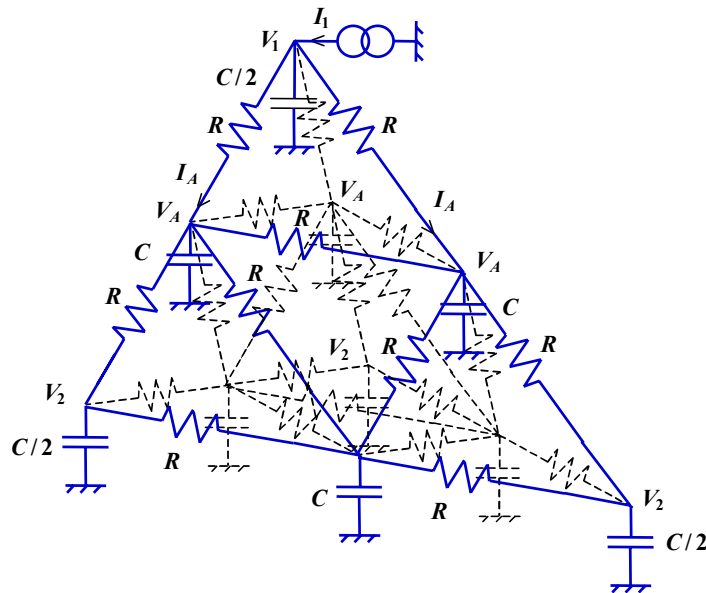
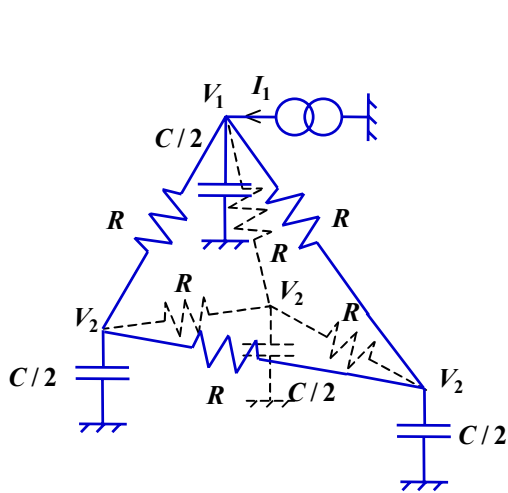
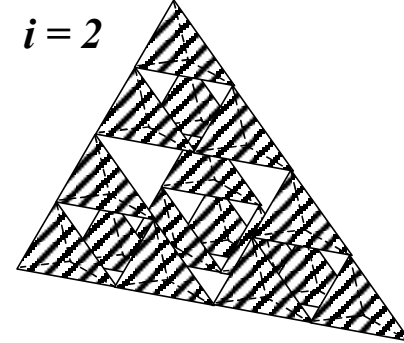
$i = 0$



$i = 1$



$i = 2$

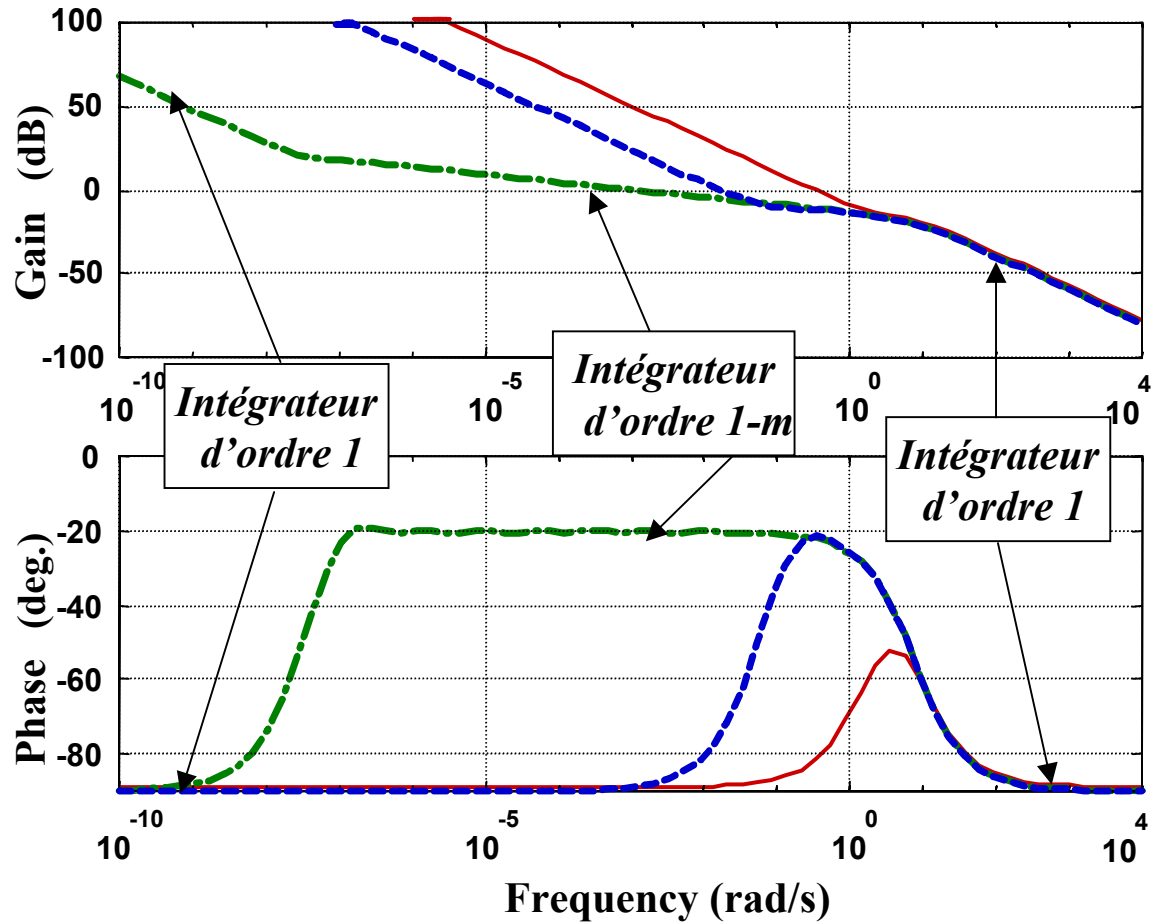


**Réseau de Sierpinski**  
 $\delta_s = 3$

# Impédance d'entrée

$$R = C = 1$$

- $i = 0$
- - -  $i = 2$
- · - · -  $i = 10$



$$I_m(s) = \frac{1}{s} C_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad \text{avec} \quad 1 - m = \frac{-20.37}{-90} = 0.226, \quad \text{soit} \quad m = 0.774$$

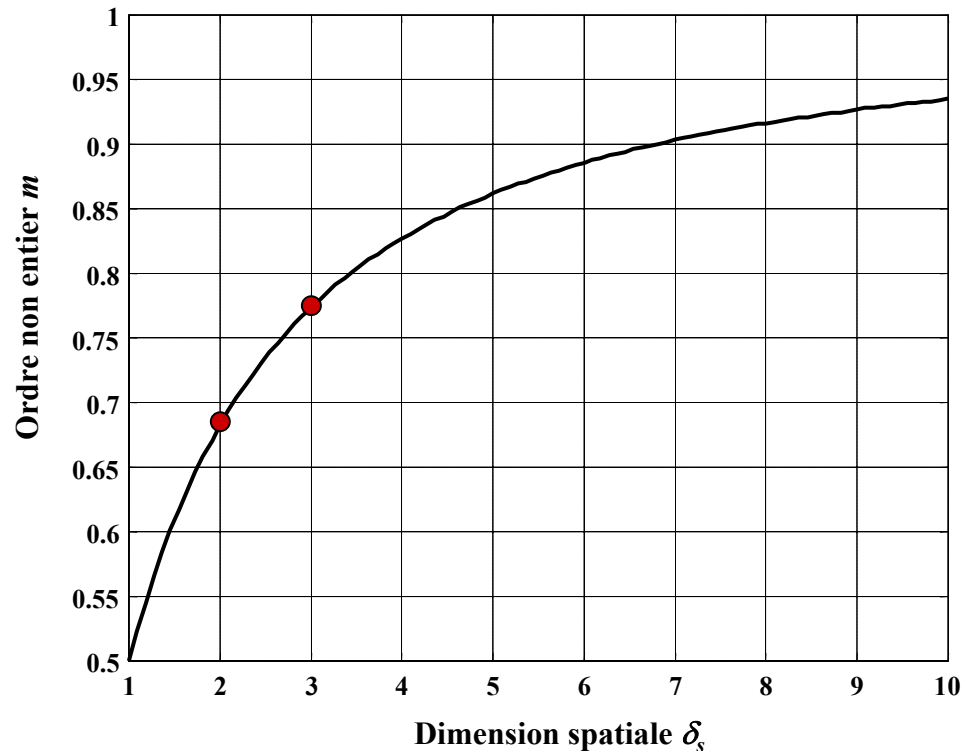
# Généralisation à une dimension spatiale $\delta_s \in \mathbb{R}^+$

C. RAMUS-SERMENT, X. MOREAU, M. NOUILLANT, A. OUSTALOUP and F. LEVRON

*Generalised approach on fractional response of fractal networks*

Journal of Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 14, pp. 479-488, 2002

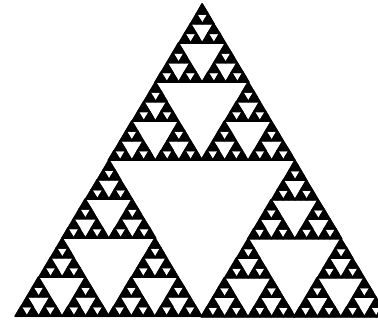
$$m = 1 - \frac{\ln\left[\frac{(\delta_s + 3)}{(\delta_s + 1)}\right]}{\ln(\delta_s + 3)}$$



# Conclusion

*Dimension fractale  $d$*

**Sur le plan théorique**



*Dimension spatiale  $\delta_s$*

*Ordre non entier  $m$*

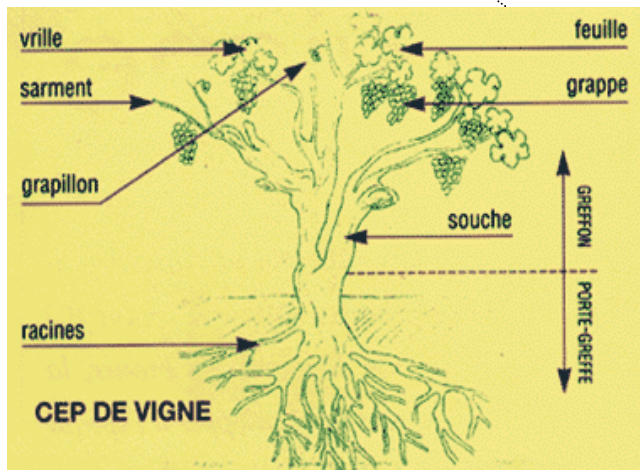
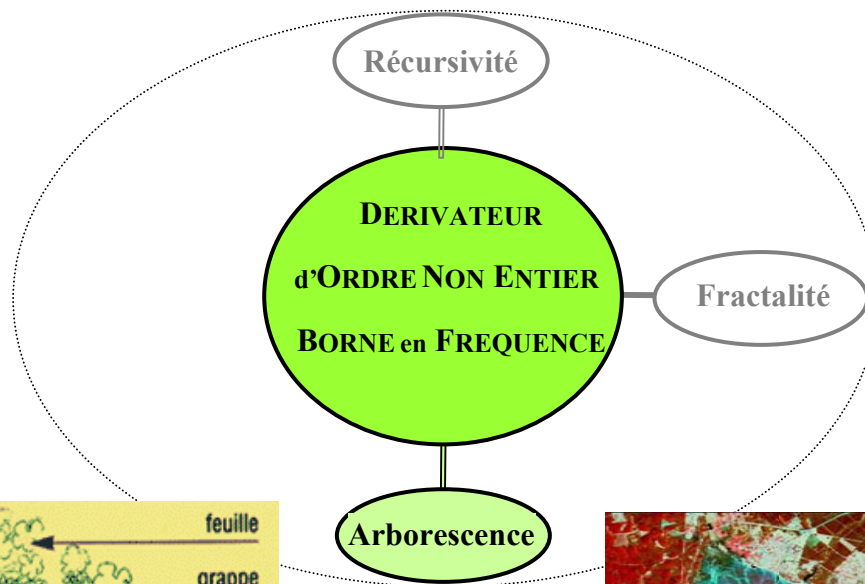
*Réalisation complexe*

**Sur le plan applicatif**

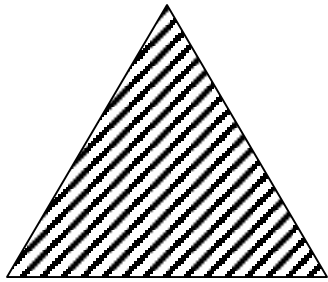
*Choix de l'ordre  $m$  limité à 2 valeurs*

$$m(\delta_s = 2) = 0.683$$

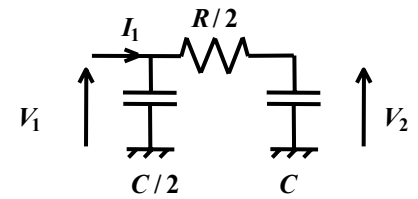
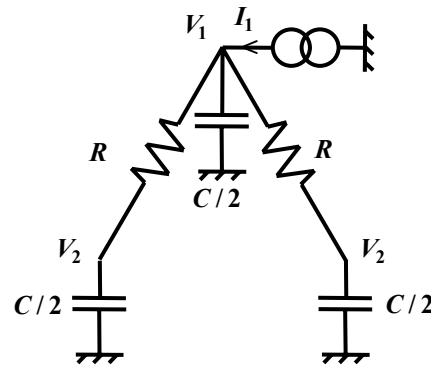
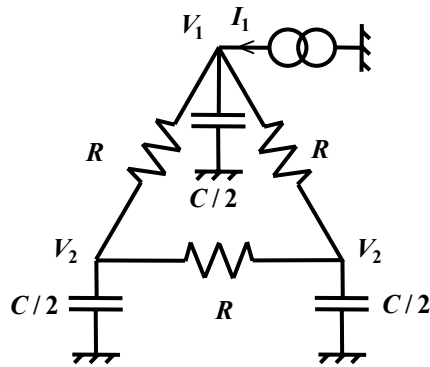
$$m(\delta_s = 3) = 0.774$$



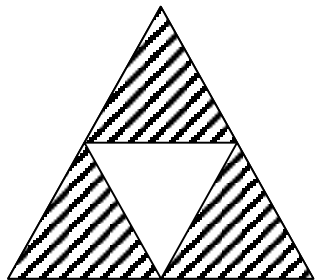
# D'un tamis de Sierpinski à une structure arborescente



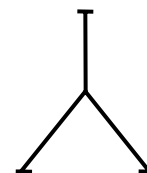
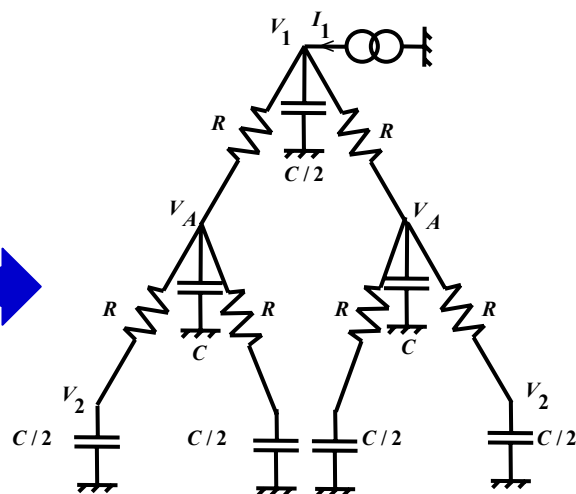
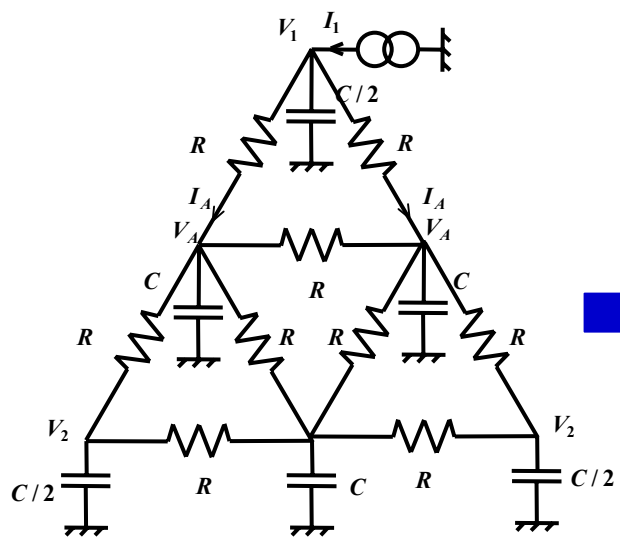
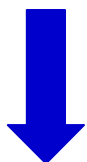
$i = 0$



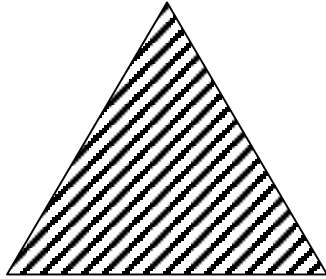
*Représentation symbolique*  $\left[ \left( \frac{C}{2}, \frac{R}{2}, C \right) \right]$



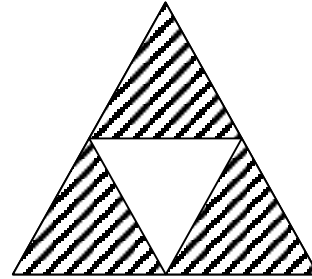
$i = 1$



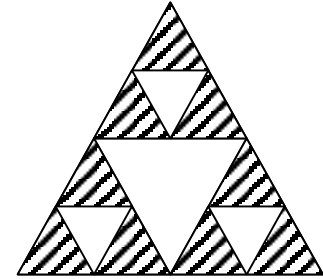
$i = 0$



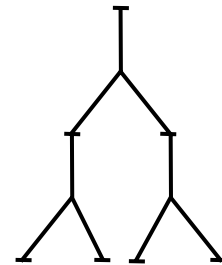
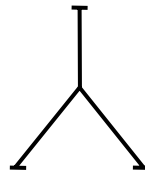
$i = 1$



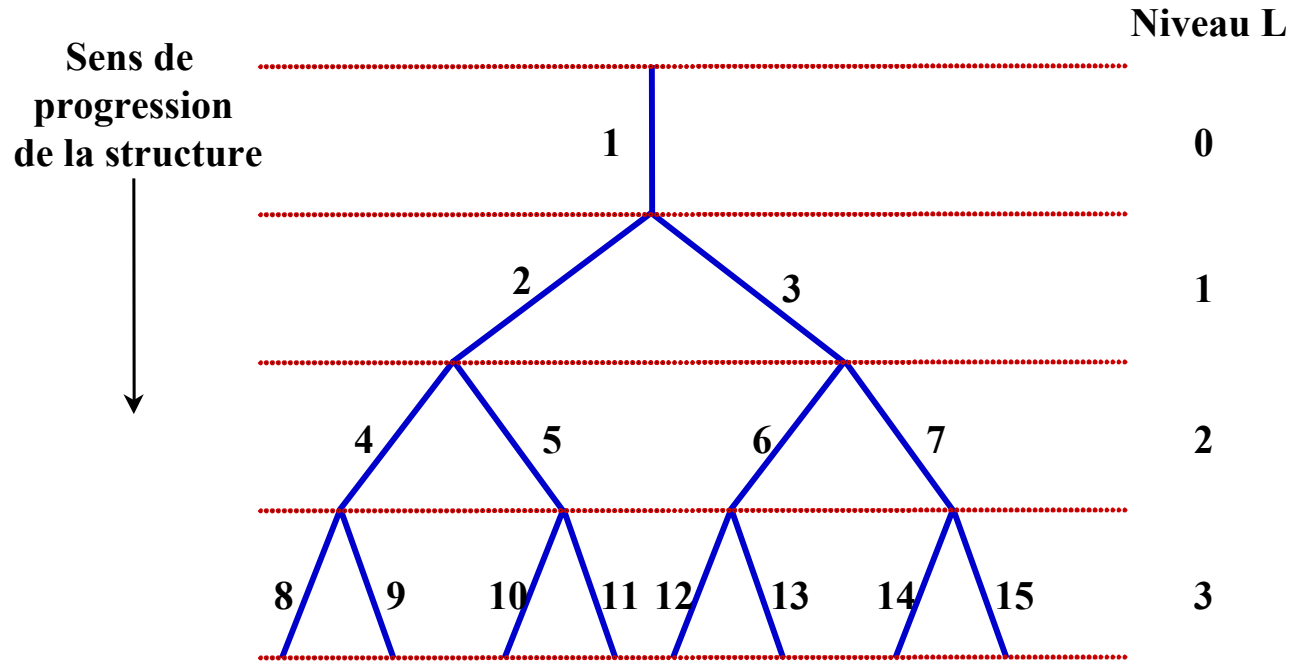
$i = 2$



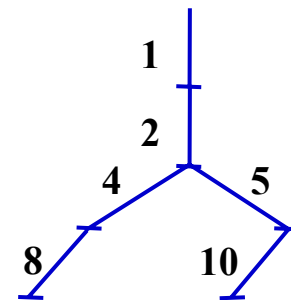
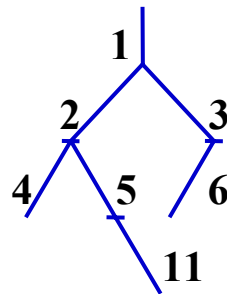
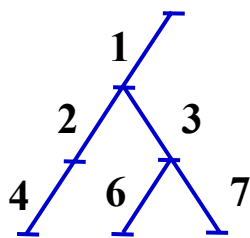
$$\left[ \left( \frac{C}{2}, \frac{R}{2}, C \right) \right]$$



# Méthode d'analyse



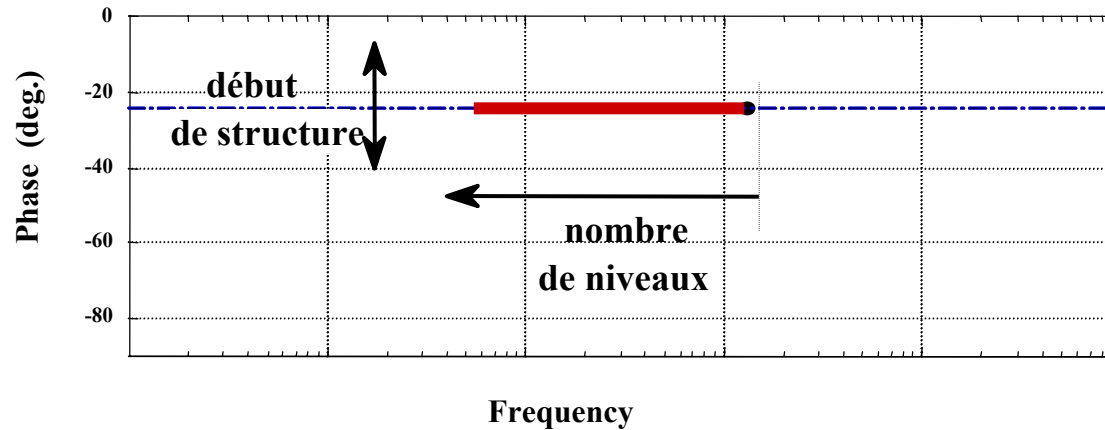
## Générateur Automatique de Structures Arborescentes



## Résultats de l'analyse

Le début de la structure fixe la *valeur du blocage de phase*.

Ainsi, plus la première ramification apparaît loin dans la structure, plus *valeur* du blocage de phase est *faible*.



Pour un même début de structure, la *longueur du blocage de phase* dépend du *nombre de niveaux* de la structure.

En effet, plus ce *nombre* est important plus la *longueur* du blocage de phase est *grande*.

## *Méthode de synthèse*

$$H(s) = \frac{C_0}{s} \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m$$



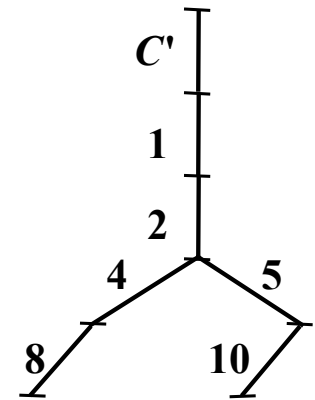
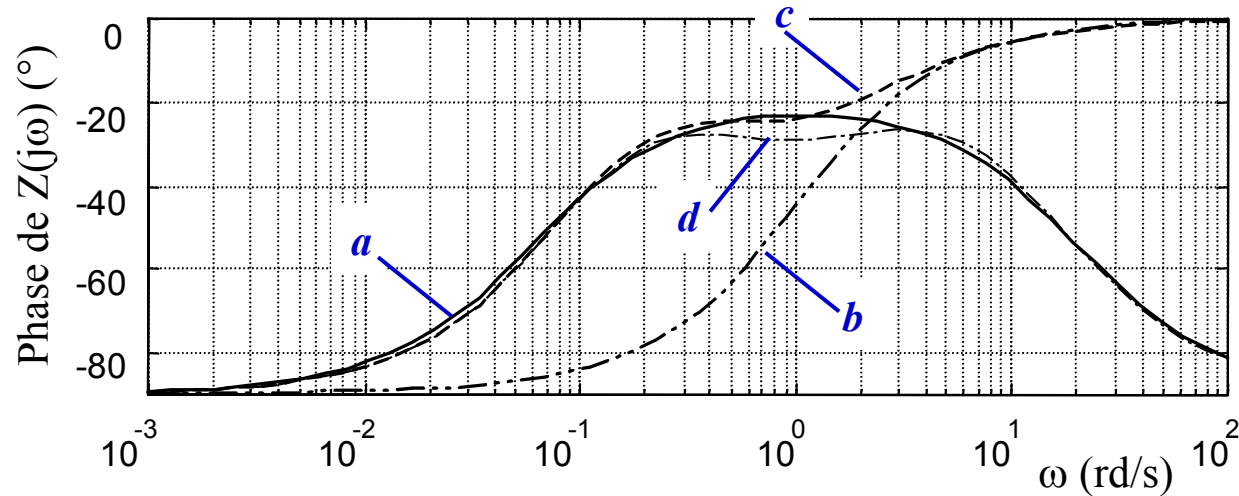
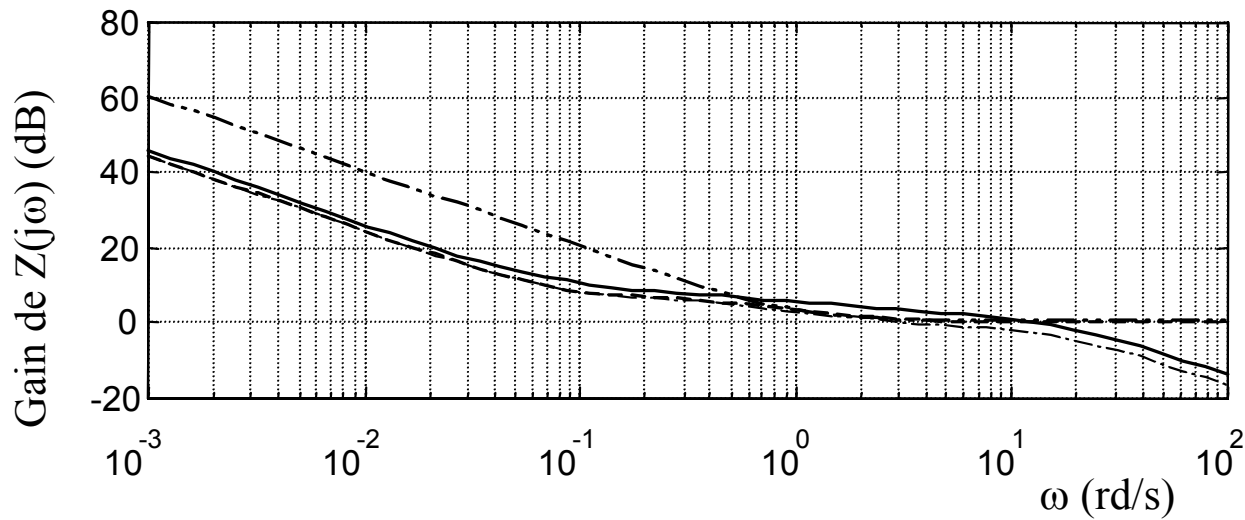
**Spécification des valeurs des 4 paramètres de synthèse de haut niveau  
 $C_0$ ,  $\omega_b$ ,  $\omega_h$  et  $m$**



**Par progression dans la structure  
minimisation de l'écart entre  
la courbe de phase souhaitée et la courbe de phase issue de la structure**

# Exemple

$C_0 = 0.2 \text{ dB};$      $m = 0.8;$      $\omega_b = 0.06 \text{ rd/s};$      $\omega_h = 20 \text{ rd/s}$



- a* : spécification
- b* : 1 cellule
- c* : structure sans  $C'$
- d* : structure avec  $C'$

# Conclusion

**Sur le plan méthodologique**

*Méthode « gourmande » en temps de calcul*

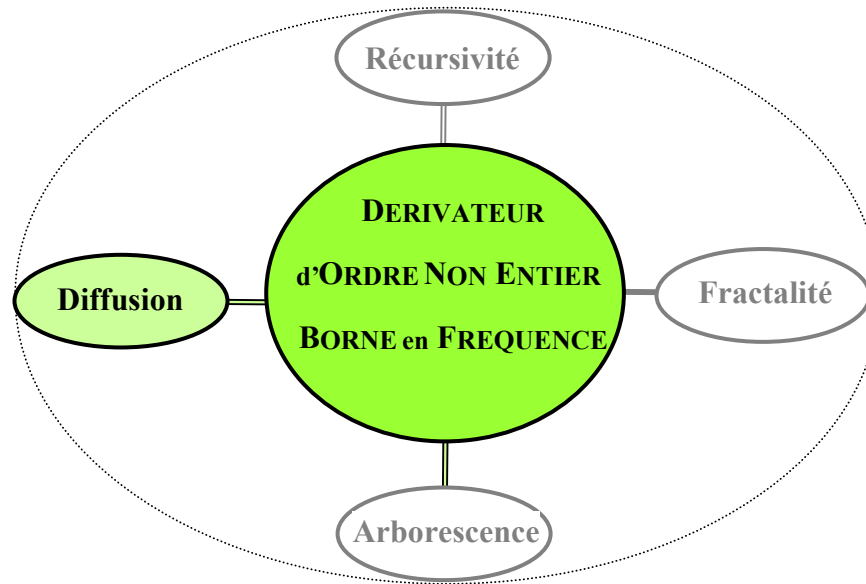
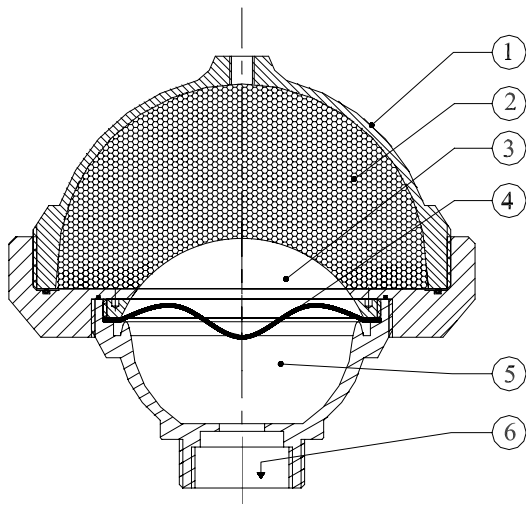
*Choix de l'ordre  $m$  non limité*

**Sur le plan applicatif**

*Diminution du nombre de cellules*

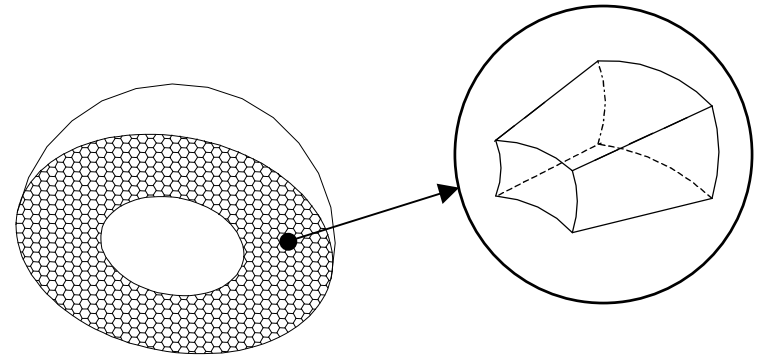
*Exemple comparatif :*

*réseau Sierpinski  $\delta_s = 3 \implies 96$  cellules RC,  
soit 14 fois plus que la structure arborescente*



### ***Objectif initial :***

Réaliser dans le domaine de *l'hydraulique* un dérivateur d'ordre non entier réel borné en fréquence à partir de l'étude de la *diffusion d'un fluide viscoélastique dans un massif poreux*.



Si l'on admet que la dimension des billes devient faible devant les dimensions du massif, alors il est possible de supposer qu'il existe une loi homogénéisée : à niveau de l'élément différentiel, à savoir une capacité élémentaire du milieu par unité de volume, notée  $c_0$ , et une conductivité hydraulique élémentaire du milieu par unité de surface, notée  $k$ .



**Approche par discrétisation**



**Approche par les EDP**

# Approche par les EDP

*Inventaire des débits dans les directions :*

*- radiale*

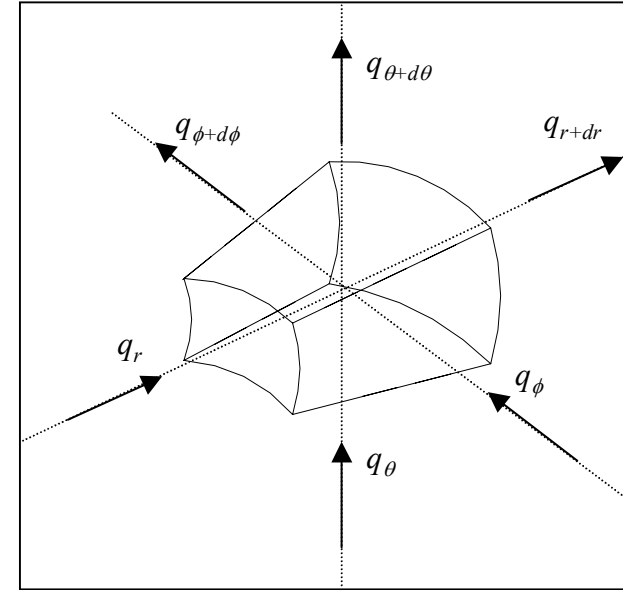
$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \quad \longrightarrow \quad q_r - q_{r+dr} = -\frac{\partial q_r}{\partial r} dr$$

*- polaire*

$$q_{\theta+d\theta} = q_\theta + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta \quad \longrightarrow \quad q_\theta - q_{\theta+d\theta} = -\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta$$

*- azimutale*

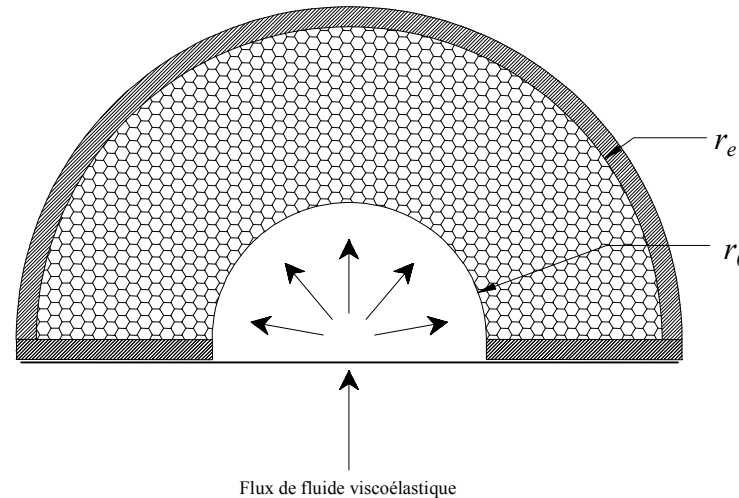
$$q_{\phi+d\phi} = q_\phi + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi \quad \longrightarrow \quad q_\phi - q_{\phi+d\phi} = -\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi$$



**Equation de diffusion en coordonnées sphériques :**

$$\frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} = \frac{c_0}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$

Dans le cas d'une demi-sphère perfusée par son centre, la symétrie de l'écoulement conduit à une pression indépendante de  $\theta$  et  $\phi$ .



Finalement, l'équation aux dérivées partielles décrivant en coordonnées sphériques le comportement dynamique du système est définie par une équation de diffusion de la forme :

$$\frac{2}{r} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial r^2} - \frac{c_0}{k} \frac{\partial P(r,t)}{\partial t} = 0 .$$

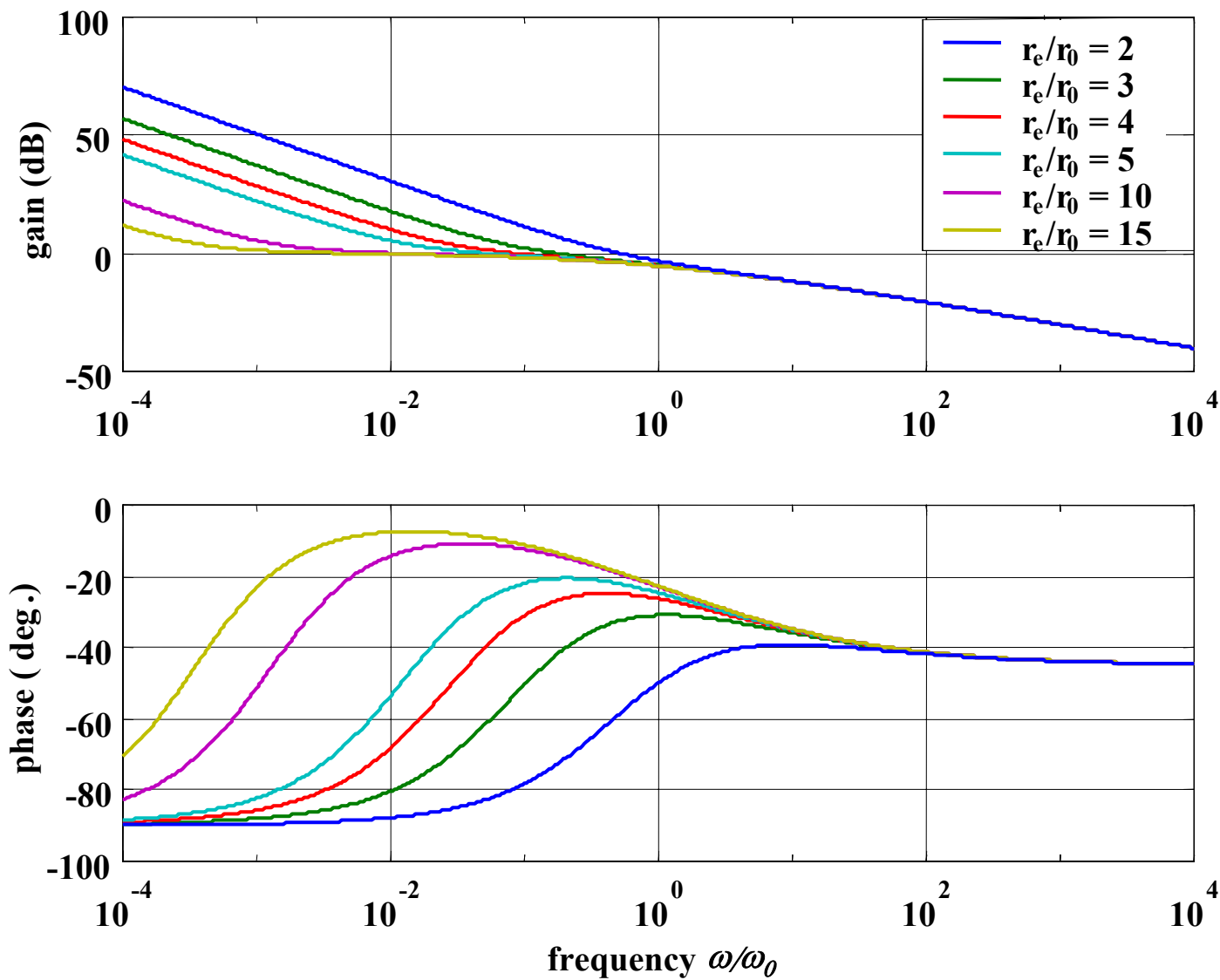
**La résolution par l'utilisation de la transformée de Laplace et des conditions aux limites conduit à un transfert de la forme :**

$$H(r,s) = \frac{\bar{P}(r,s)}{\bar{q}(s)} = \frac{1}{2\pi k r} \frac{\left( \frac{r_e \sqrt{\frac{s}{\alpha}} - 1}{r_e \sqrt{\frac{s}{\alpha}} + 1} \right) \exp\left( (2r_e - r) \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \right) + \exp\left( r \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \right)}{\left( \frac{r_e \sqrt{\frac{s}{\alpha}} - 1}{r_e \sqrt{\frac{s}{\alpha}} + 1} \right) \left( 1 + r_0 \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \right) \exp\left( (2r_e - r) \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \right) + \left( 1 - r_0 \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \right) \exp\left( r_0 \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \right)}$$

**en posant :**

$$G_0(r) = \frac{1}{2\pi k r}, \quad a = \left( \frac{r_e}{r_0} \right)^2 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{\alpha}{r_0^2}$$

# *Impédance d'entrée*



# SOMMAIRE

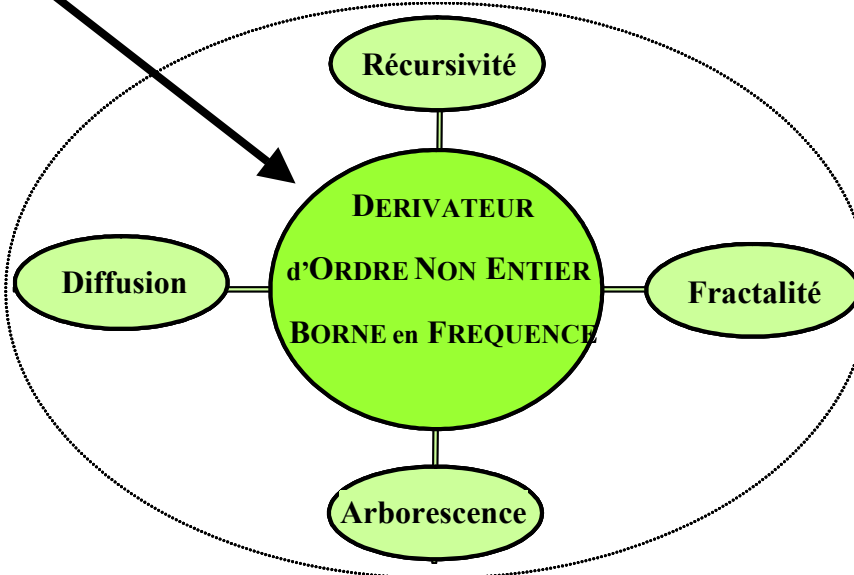
- 1 - INTRODUCTION
- 2 - METHODES DE SYNTHESE : RAPPEL
- **3 - METHODES FONDEES SUR LA RECURSIVITE  
FREQUENTIELLE**
- 4 - CONCLUSION

**Forme idéale :**

$$D(s) = D_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m$$

**Forme réelle :**

$$D_N(s) = D_0 \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_i'}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \right)$$



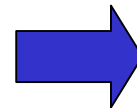
$$\frac{\omega_{i+1}'}{\omega_i'} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \alpha\eta > 1$$

$$\frac{\omega_i'}{\omega_i} = \alpha > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_{i+1}'}{\omega_i}$$

**N : nombre de cellules**

**$\alpha$  et  $\eta$  : facteurs récursifs**

**Paramètres forme idéale**

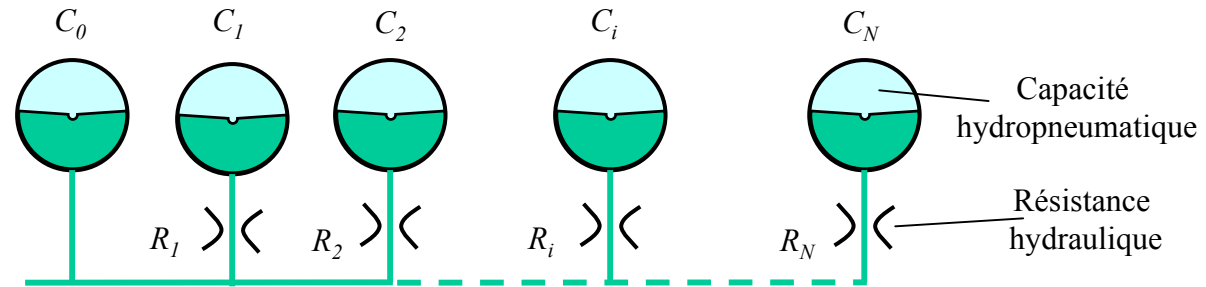


**Paramètres forme réelle**

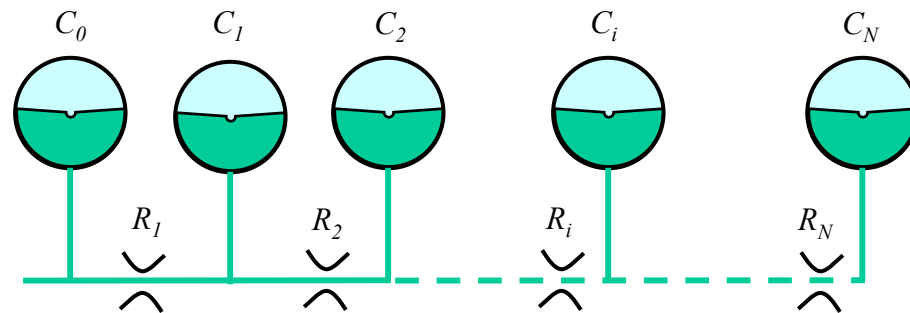
$$\alpha\eta = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad \eta = (\alpha\eta)^{1-m}, \quad \alpha = (\alpha\eta)^m, \quad \omega_1' = \sqrt{\eta} \omega_b \quad \text{et} \quad \omega_N = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \omega_h$$

En *isolation vibratoire* et en particulier dans le *domaine des suspensions de véhicules*, dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence est réalisé en technologie hydropneumatique.

*Arrangement parallèle de cellules RC en série*

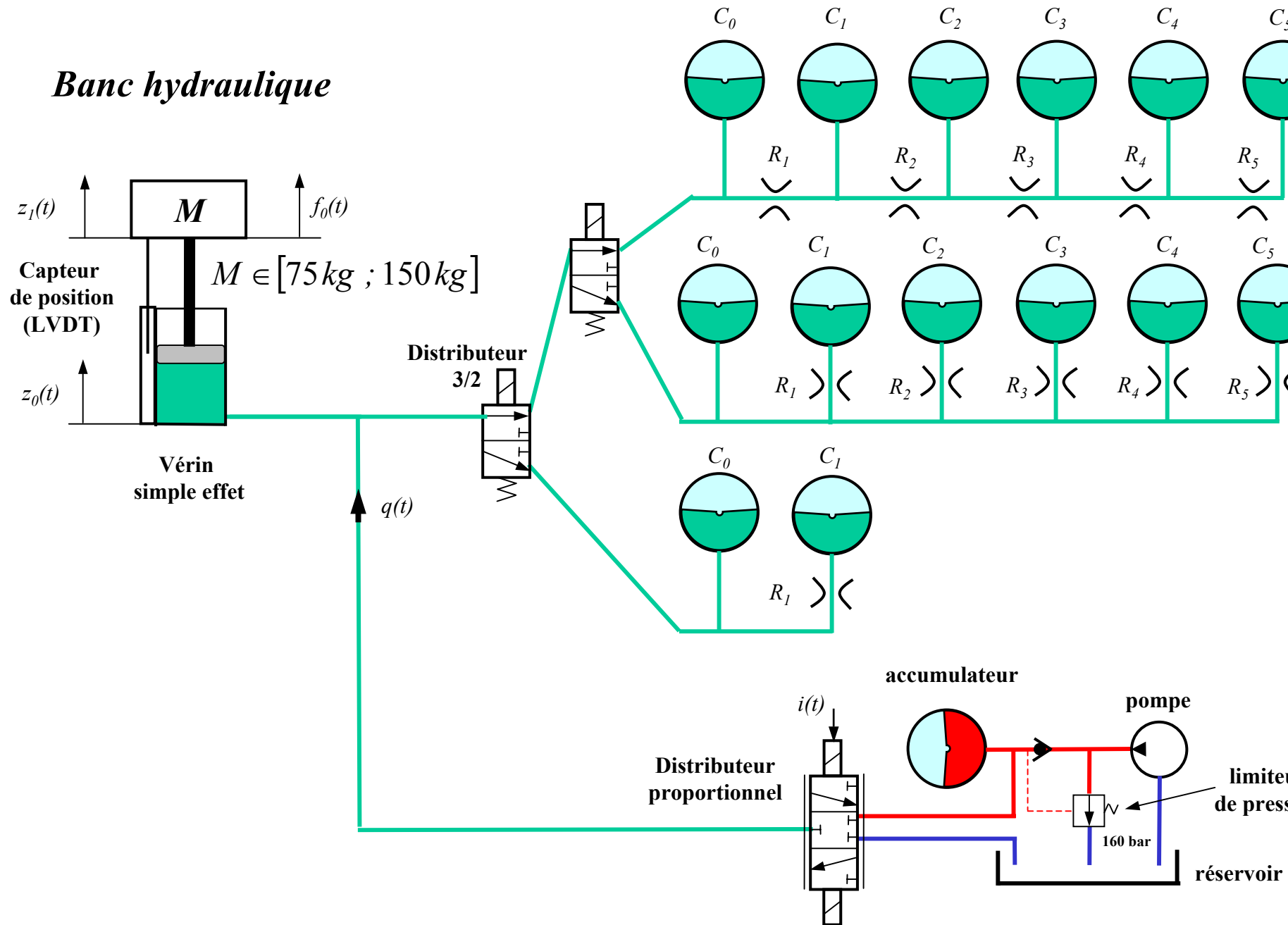


*Arrangement en cascade de cellules RC en gamma*

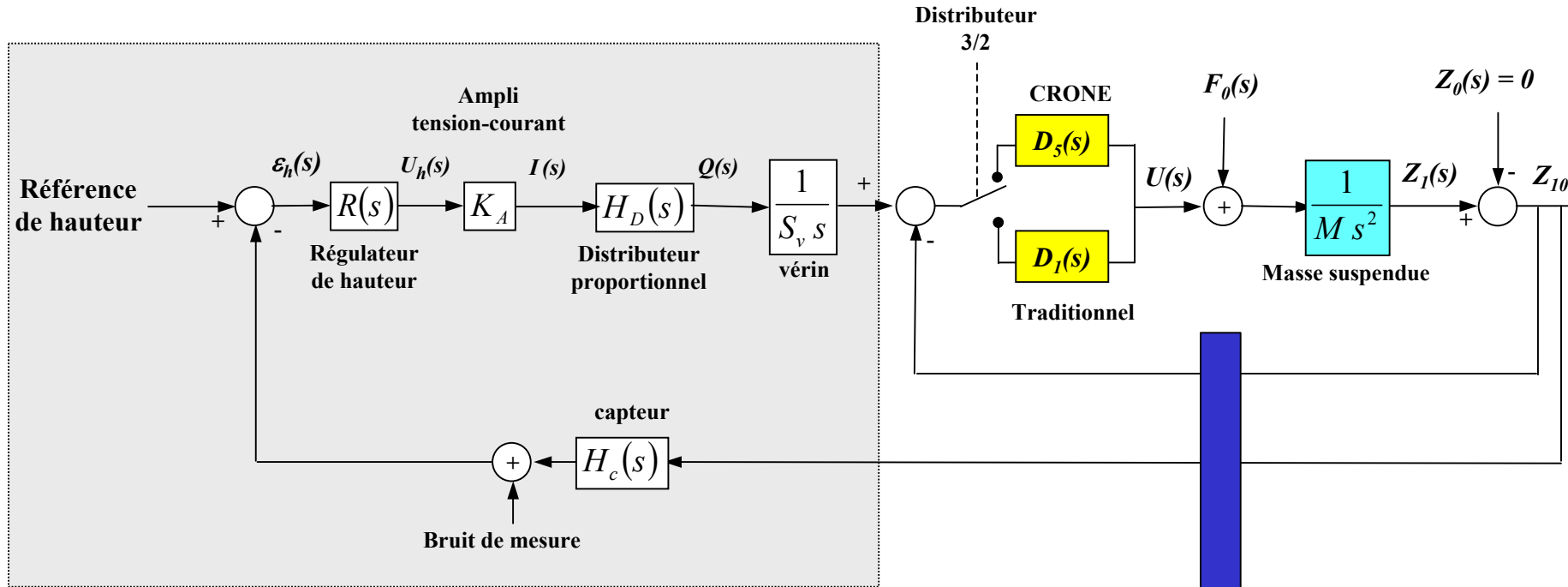


# Description du dispositif expérimental

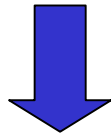
## Banc hydraulique



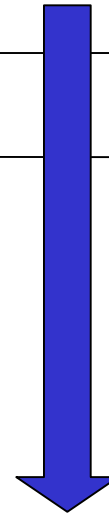
# Schéma de commande



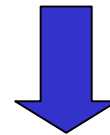
Régulation de la position d'équilibre statique



Bande passante : [0 ; 0.1 rad/s]  
(correcteur d'assiette Citroën)



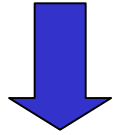
Bande passante : [0 ; 6 rad/s]  
(mode de pompage de caisse)



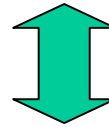
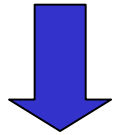
**Découplage dynamique des deux boucles**

# Démarche de conception

## Méthodologie de la commande CRONE



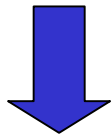
**Forme idéale** : 4 paramètres de synthèse de haut niveau



**Relations établies**

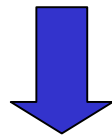
**Forme réelle** :  $N$  pôles et  $N$  zéros ( $2N$  paramètres)

**1<sup>er</sup> cas :**



**Relations ???**

**Arrangement parallèle de cellules RC série** :  $N$  résistances et  $N+1$  capacités ( $2N+1$  paramètres)

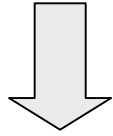


**Relations ???**

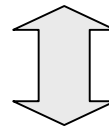
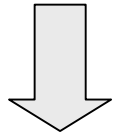
**Technologie hydropneumatique** :  $2N$  paramètres technologiques pour les  $R$   
 $2(N+1)$  paramètres technologiques pour les  $C$   
( $2(2N+1)$  paramètres, soit 22 pour  $N=$

# Démarche de conception

## Méthodologie de la commande CRONE



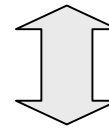
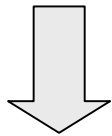
Forme idéale : 4 paramètres de synthèse de haut niveau



Relations établies

Forme réelle :  $N$  pôles et  $N$  zéros

( $2N$  paramètres)

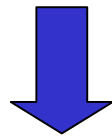


Relations ???

**1<sup>er</sup> cas :**

**Arrangement parallèle de cellules RC série :**  $N$  résistances et  $N+1$  capacités

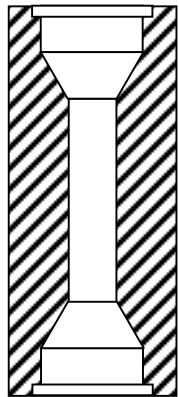
( $2N+1$  paramètres)



**Relations ???**

**Technologie hydropneumatique :**  $2N$  paramètres technologiques pour les  $R$   
 $2(N+1)$  paramètres technologiques pour les  $C$   
( $2(2N+1)$  paramètres, soit 22 pour  $N=$

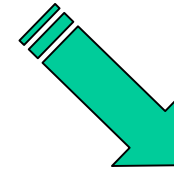
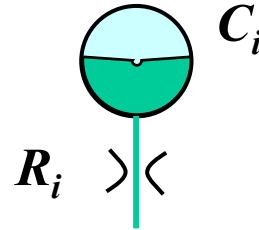
# Relations entre les paramètres physiques et les paramètres technologiques



**Résistance hydraulique**  
(régime laminaire)

$$R_i = \frac{128}{\pi} \mu \frac{l_{Ri}}{d_{Ri}^4}$$

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide  
 $l_{Ri}$  : longueur utile de la résistance  
 $d_{Ri}$  : diamètre utile de la résistance



**Capacité hydropneumatique**  
(linéarisé-tangent courbe P-V)

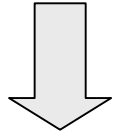
$$C_i = \frac{P_{0i} V_{0i}}{\gamma P_s^2} = \frac{S_v^2 P_{0i} V_{0i}}{\gamma (Mg)^2}$$

$P_{0i}$  : pression de gonflage de l'accumulateur  
 $V_{0i}$  : volume de l'accumulateur  
 $P_s$  : pression statique  
 $S_v$  : section du vérin

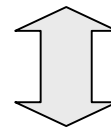
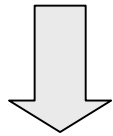
**Paramètres technologiques**

# Démarche de conception

## Méthodologie de la commande CRONE

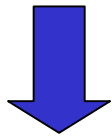


Forme idéale : 4 paramètres de synthèse de haut niveau



Relations établies

Forme réelle :  $N$  pôles et  $N$  zéros (  $2N$  paramètres )

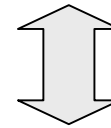
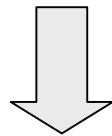


1<sup>er</sup> cas :



Relations ???

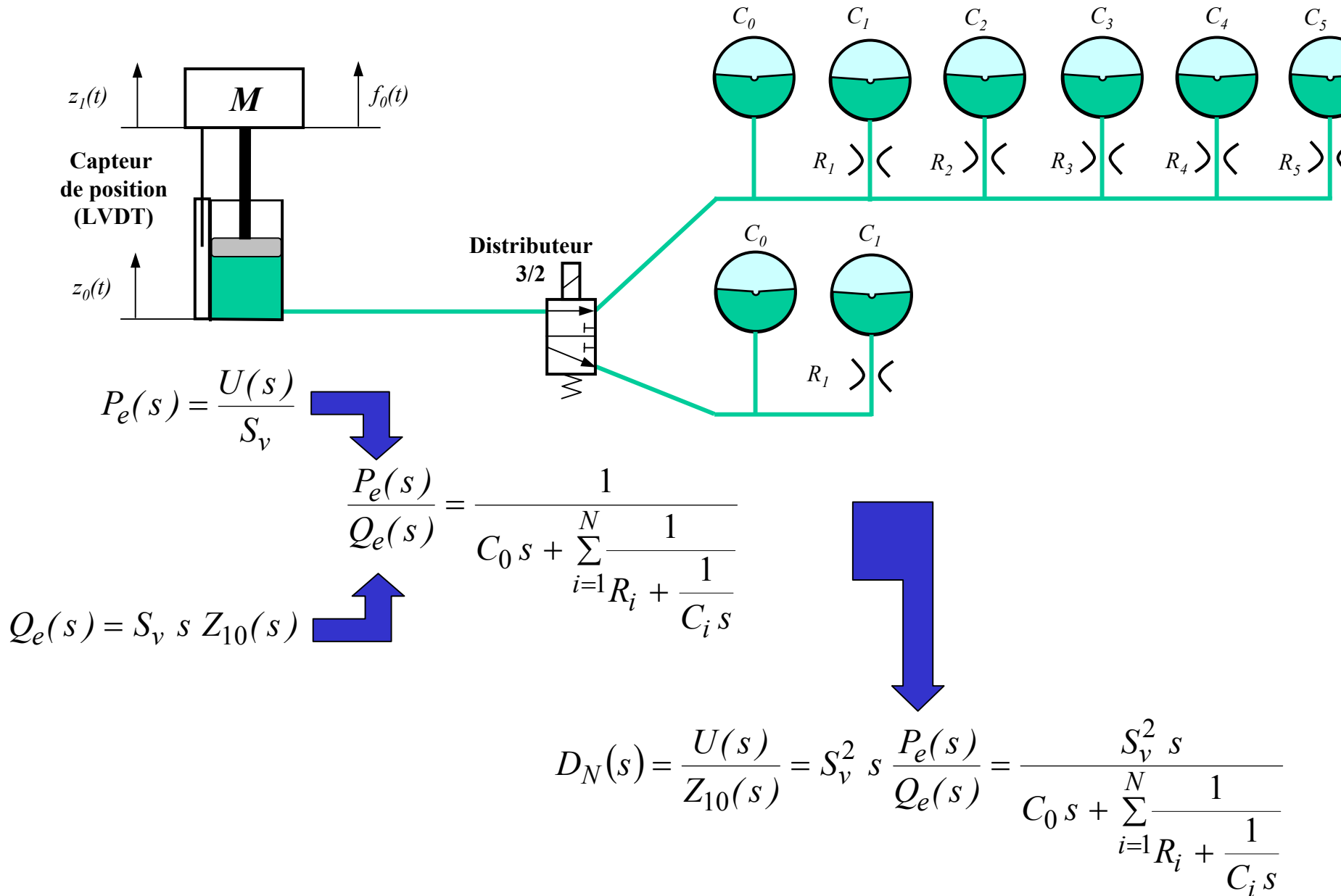
Arrangement parallèle de cellules RC série :  $N$  résistances et  $N+1$  capacités (  $2N+1$  paramètres )



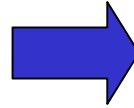
Relations établies

Technologie hydropneumatique :  $2N$  paramètres technologiques pour les  $R$   
 $2(N+1)$  paramètres technologiques pour les  $C$   
(  $2(2N+1)$  paramètres, soit 22 pour  $N=$

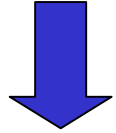
# Relations entre les paramètres de la forme réelle et les paramètres physiques



$$D_N(s) = \frac{S_v^2 s}{C_0 s + \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i + \frac{1}{C_i s}}}$$



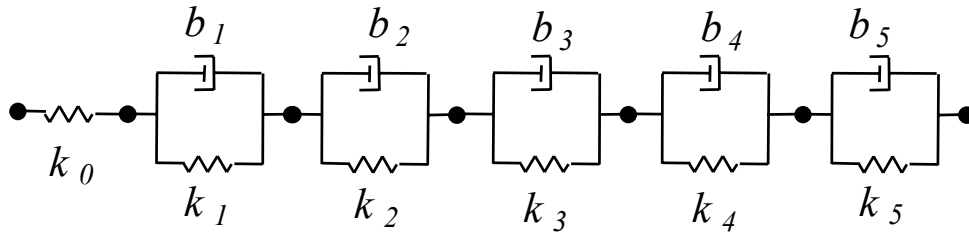
$$D_N(s) = \frac{1}{\frac{C_0}{S_v^2} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i S_v^2 s + \frac{S_v^2}{C_i}}}$$



$$D_N(s) = \frac{1}{\frac{1}{k_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{b_i s + k_i}}$$

***Relations entre  
les paramètres mécaniques et hydropneumatiques***

$$k_0 = \frac{S_v^2}{C_0}, \quad k_i = \frac{S_v^2}{C_i} \quad \text{et} \quad b_i = S_v^2 R_i$$

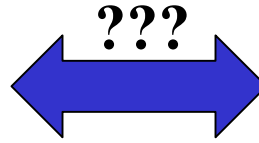


$$D_N(s) = \frac{1}{\frac{1}{k_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1/b_i}{s + \omega_{zi}}}$$

avec  $\omega_{zi} = \frac{k_i}{b_i}$

**Forme issue de l'arrangement  
parallèle de cellules RC série**

$$D_N(s) = \frac{1}{\frac{1}{k_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1/b_i}{s + \omega_{zi}}}$$



**Forme réelle**

$$D_N(s) = D_0 \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i'}} \right)$$

**Inverse**

$$D_N^{-1}(s) = \frac{1}{k_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1/b_i}{s + \omega_{zi}}$$

$$D_N^{-1}(s) = \frac{1}{D_0} \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i'}} \right)$$

**Décomposition en éléments simples**

$$D_N^{-1}(s) = \frac{1}{D_0} \prod_{i=1}^N \frac{\omega_i'}{\omega_i} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s + \omega_i}$$

**Relations entre les paramètres de la  
forme réelle et les paramètres physiques**

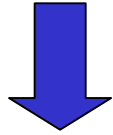
$$k_0 = D_0 \prod_{i=1}^N \frac{\omega_i'}{\omega_i}, \quad b_i = \frac{1}{A_i} \quad \text{et} \quad k_i = \omega_i' b_i$$

**avec**

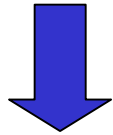
$$A_i = \frac{1}{D_0} \left( \prod_{l=1}^N \frac{\omega_l'}{\omega_l} \right) \left( \frac{\prod_{l=1}^N (\omega_l - \omega_i')}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (\omega_l' - \omega_i)} \right)$$

# Démarche de conception

## Méthodologie de la commande CRONE

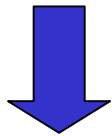


**Forme idéale : 4 paramètres de synthèse de haut niveau**



**Relations établies**

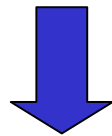
**Forme réelle :  $N$  pôles et  $N$  zéros ( $2N$  paramètres)**



**Relations établies**

**1<sup>er</sup> cas :**

**Arrangement parallèle de cellules RC série :  $N$  résistances et  $N+1$  capacités ( $2N+1$  paramètres)**

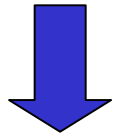


**Relations établies**

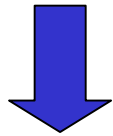
**Technologie hydropneumatique :  $2N$  paramètres technologiques pour les  $R$   
 $2(N+1)$  paramètres technologiques pour les  $C$   
( $2(2N+1)$  paramètres, soit 22 pour  $N=$**

# Démarche de conception

## Méthodologie de la commande CRONE



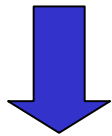
**Forme idéale : 4 paramètres de synthèse de haut niveau**



**Relations établies**

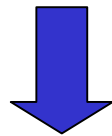
**Forme réelle :  $N$  pôles et  $N$  zéros ( $2N$  paramètres)**

**2<sup>eme</sup> cas :**



**Relations ???**

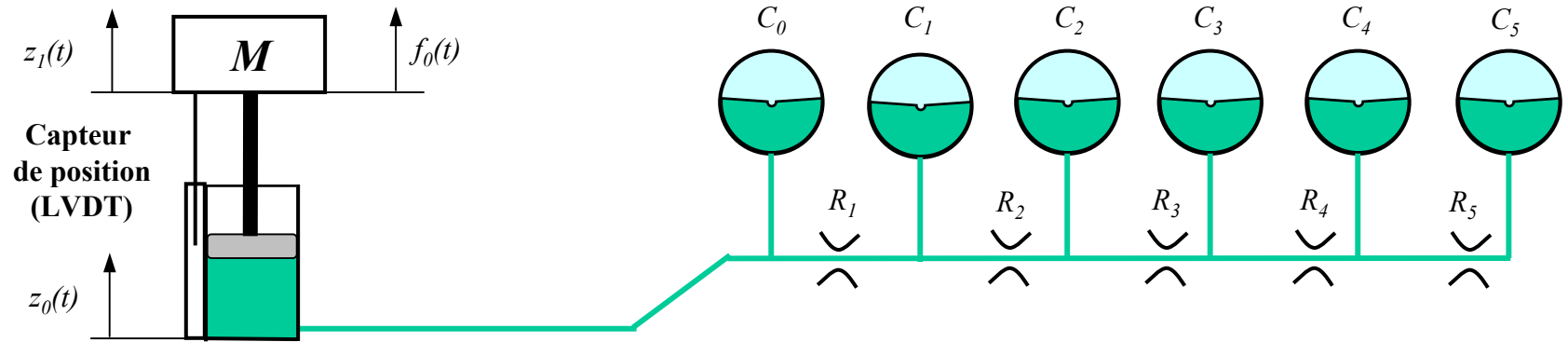
**Arrangement cascade de cellules RC gamma :  $N$  résistances et  $N+1$  capacités ( $2N+1$  paramètres)**



**Relations établies**

**Technologie hydropneumatique :  $2N$  paramètres technologiques pour les  $R$   
 $2(N+1)$  paramètres technologiques pour les  $C$   
( $2(2N+1)$  paramètres, soit 22 pour  $N=$**

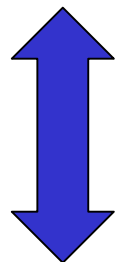
# Relations entre les paramètres de la forme réelle et les paramètres physiques



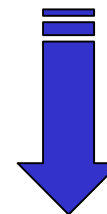
$$\frac{P_e(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{C_2 s + \frac{1}{\dots + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{C_5 s}}}}}}}}$$

# Forme issue de l'arrangement cascade de cellules RC gamma

$$\frac{P_e(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{C_2 s + \frac{1}{\dots + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{C_5 s}}}}}}}}$$



???



## Forme réelle

$$\frac{P_e(s)}{Q_e(s)} = \frac{D_N(s)}{S_v^2 s} = \frac{D_0}{S_v^2 s} \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \right)$$



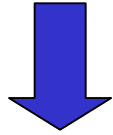
Décomposition sous forme d'une fraction continue simple

$$\frac{P_e(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{A_0 s + B_0 + \frac{1}{A_1 s + B_1 + \frac{1}{A_2 s + B_2 + \frac{1}{A_3 s + B_3 + \frac{1}{A_4 s + B_4 + \frac{1}{A_5 s + B_5}}}}}}$$

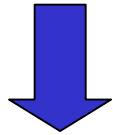
$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = C_0 \\ A_1 = R_1^2 C_1 \\ A_2 = \frac{R_2^2}{R_1^2} C_2 \\ A_3 = \frac{R_1^2 R_3^2}{R_2^2} C_3 \\ A_4 = \frac{R_4^2 R_2^2}{R_1^2 R_3^2} C_4 \\ A_5 = \frac{R_1^2 R_3^2 R_5^2}{R_4^2 R_2^2} C_5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0 = \frac{1}{R_1} \\ B_1 = \frac{R_1 (R_1 + R_2)}{R_2} \\ B_2 = \frac{R_2 (R_2 + R_3)}{R_1^2 R_3} \\ B_3 = \frac{R_1^2 R_3 (R_3 + R_4)}{R_2^2 R_4} \\ B_4 = \frac{R_2^2 R_4 (R_5 + R_4)}{R_1^2 R_3^2 R_5} \\ B_5 = \frac{R_1^2 R_3^2 R_5}{R_4^2 R_2^2} \end{array} \right.$$

# Démarche de conception

## Méthodologie de la commande CRONE

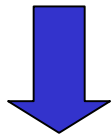


**Forme idéale : 4 paramètres de synthèse de haut niveau**



**Relations établies**

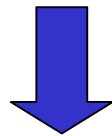
**Forme réelle :  $N$  pôles et  $N$  zéros ( $2N$  paramètres)**



**Relations établies**

**2<sup>eme</sup> cas :**

**Arrangement cascade de cellules RC gamma :  $N$  résistances et  $N+1$  capacités ( $2N+1$  paramètres)**



**Relations établies**

**Technologie hydropneumatique :  $2N$  paramètres technologiques pour les  $R$   
 $2(N+1)$  paramètres technologiques pour les  $C$   
( $2(2N+1)$  paramètres, soit 22 pour  $N=$**

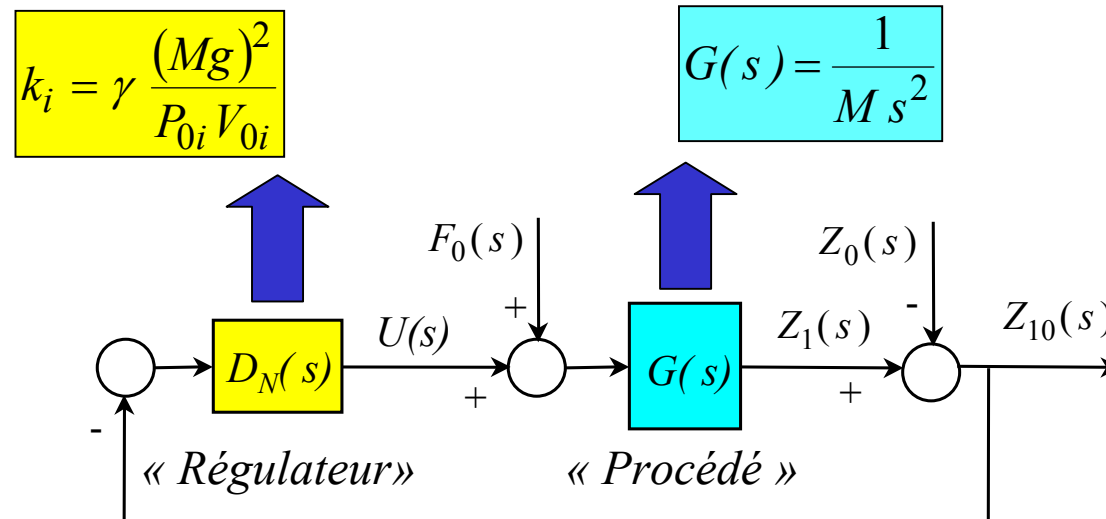
# Performances

## Spécifications

- pour la **rapidité**, une fréquence au gain unité en boucle ouverte  $\omega_u$  de **6 rad/s**
- pour le **degré de stabilité**, une marge de phase  $M_\phi$  de **45°**
- pour les incertitudes,  $M \in [75 \text{ kg} ; 150 \text{ kg}]$

## Remarque importante

$$M \in [M_{min} ; M_{max}]$$



# Suspension traditionnelle ( $N = 1$ ) $\Leftrightarrow$ Régulateur à avance de phase

pour  $M_{min} = 75 \text{ kg}$

$$D_1(s) = D_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_1}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \right)$$

## Paramètres du régulateur à avance de phase

$$\omega_1' = 2.485 \text{ rad} / s, \quad \omega_1 = 14.5 \text{ rad} / s \quad \text{et} \quad D_0 = 1118 \text{ N} / m$$

## Paramètres physiques

$$k_0 = 6518 \text{ N} / m, \quad k_1 = 1350 \text{ N} / m, \quad b_1 = 543 \text{ Ns} / m.$$

## Paramètres technologiques

$$P_{00} = 11.5 \text{ bar}, \quad V_{00} = 75 \text{ cm}^3,$$

$$P_{01} = 10.5 \text{ bar}, \quad V_{01} = 400 \text{ cm}^3,$$

$$d_{R1} = 5 \text{ mm}, \quad l_{R1} = 23.45 \text{ mm}.$$

# Suspension CRONE

$$D(s) = D_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m$$

pour  $M_{min} = 75$  kg

## Paramètres de synthèse de haut niveau

$$m = 0.5, \omega_b = 0.1 \text{ rad} / s, \omega_h = 90 \text{ rad} / s \text{ et } D_0 = 349 \text{ N} / m$$

## Paramètres de la forme réelle ( $N = 5$ )

$$\alpha = \eta = 1.975,$$

$$\omega_1' = 0.1405 \text{ rad} / s, \omega_1 = 0.2774 \text{ rad} / s,$$

$$\omega_2' = 0.5477 \text{ rad} / s, \omega_2 = 1.081 \text{ rad} / s,$$

$$\omega_3' = 2.1350 \text{ rad} / s, \omega_3 = 4.215 \text{ rad} / s,$$

$$\omega_4' = 8.3265 \text{ rad} / s, \omega_4 = 16.432 \text{ rad} / s,$$

$$\omega_5' = 32.440 \text{ rad} / s, \omega_5 = 65.05 \text{ rad} / s.$$

# Arrangement parallèle de cellules RC en série

## Paramètres physiques

$$k_0 = 10468 \text{ N/m},$$

$$k_1 = 578 \text{ N/m}, \quad b_1 = 4111 \text{ Ns/m},$$

$$k_2 = 1722 \text{ N/m}, \quad b_2 = 3144 \text{ Ns/m},$$

$$k_3 = 3681 \text{ N/m}, \quad b_3 = 1724 \text{ Ns/m},$$

$$k_4 = 7649 \text{ N/m}, \quad b_4 = 919 \text{ Ns/m},$$

$$k_5 = 17749 \text{ N/m}, \quad b_5 = 547 \text{ Ns/m}.$$

## Paramètres technologiques

### *Accumulateurs*

$$P_{00} = 7 \text{ bar}, \quad V_{00} = 75 \text{ cm}^3,$$

$$P_{01} = 13 \text{ bar}, \quad V_{01} = 750 \text{ cm}^3,$$

$$P_{02} = 8 \text{ bar}, \quad V_{02} = 400 \text{ cm}^3,$$

$$P_{03} = 15 \text{ bar}, \quad V_{03} = 100 \text{ cm}^3,$$

$$P_{04} = 10 \text{ bar}, \quad V_{04} = 75 \text{ cm}^3,$$

$$P_{05} = 5 \text{ bar}, \quad V_{05} = 75 \text{ cm}^3.$$

### *Résistances*

$$d_{R1} = 3 \text{ mm}, \quad l_{R1} = 23 \text{ mm},$$

$$d_{R2} = 3 \text{ mm}, \quad l_{R2} = 17.6 \text{ mm},$$

$$d_{R3} = 3.5 \text{ mm}, \quad l_{R3} = 17.87 \text{ mm},$$

$$d_{R4} = 4 \text{ mm}, \quad l_{R4} = 16.25 \text{ mm},$$

$$d_{R5} = 4.5 \text{ mm}, \quad l_{R5} = 15.5 \text{ mm}.$$

# Arrangement cascade de cellules RC en gamma

## Paramètres physiques

$$k_0 = 10\,625 \text{ N/m},$$

$$k_1 = 4\,231 \text{ N/m}, \quad b_1 = 244.5 \text{ Ns/m},$$

$$k_2 = 2\,595 \text{ N/m}, \quad b_2 = 371 \text{ Ns/m},$$

$$k_3 = 1\,521 \text{ N/m}, \quad b_3 = 703 \text{ Ns/m},$$

$$k_4 = 1\,109 \text{ N/m}, \quad b_4 = 1\,648 \text{ Ns/m},$$

$$k_5 = 1\,694 \text{ N/m}, \quad b_5 = 6\,737 \text{ Ns/m}.$$

## Paramètres technologiques

### *Accumulateurs*

$$P_{00} = 7 \text{ bar}, \quad V_{00} = 75 \text{ cm}^3,$$

$$P_{01} = 18 \text{ bar}, \quad V_{01} = 75 \text{ cm}^3,$$

$$P_{02} = 5.5 \text{ bar}, \quad V_{02} = 400 \text{ cm}^3,$$

$$P_{03} = 9 \text{ bar}, \quad V_{03} = 400 \text{ cm}^3,$$

$$P_{04} = 13 \text{ bar}, \quad V_{04} = 400 \text{ cm}^3,$$

$$P_{05} = 8 \text{ bar}, \quad V_{05} = 400 \text{ cm}^3.$$

### *Résistances*

$$d_{R1} = 6 \text{ mm}, \quad l_{R1} = 21.88 \text{ mm},$$

$$d_{R2} = 5.5 \text{ mm}, \quad l_{R2} = 23.44 \text{ mm},$$

$$d_{R3} = 4.5 \text{ mm}, \quad l_{R3} = 19.90 \text{ mm},$$

$$d_{R4} = 3.5 \text{ mm}, \quad l_{R4} = 17.08 \text{ mm},$$

$$d_{R5} = 2.5 \text{ mm}, \quad l_{R5} = 18.18 \text{ mm}.$$

pour  $M_{max} = 150 \text{ kg}$

$$k_{i_{max}} = \gamma \frac{(M_{max} g)^2}{P_{0i} V_{0i}}$$

$$C_{i_{max}} = \frac{S_v^2}{k_{i_{max}}}$$

**1<sup>er</sup> cas**

$$D_N(s) = \frac{U(s)}{Z_{10}(s)} = \frac{S_v^2 s}{C_0 s + \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i + \frac{1}{C_i s}}}$$

**2<sup>eme</sup> cas**

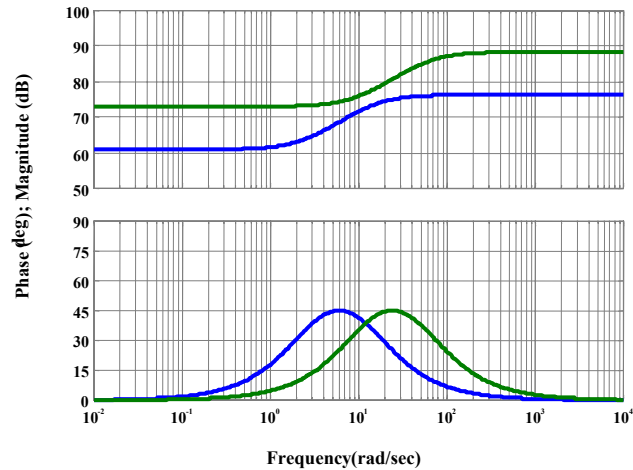
$$D_N(s) = \frac{S_v^2 s}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{C_2 s + \frac{1}{\dots + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{C_5 s}}}}}}}}$$

# Réponses fréquentielles

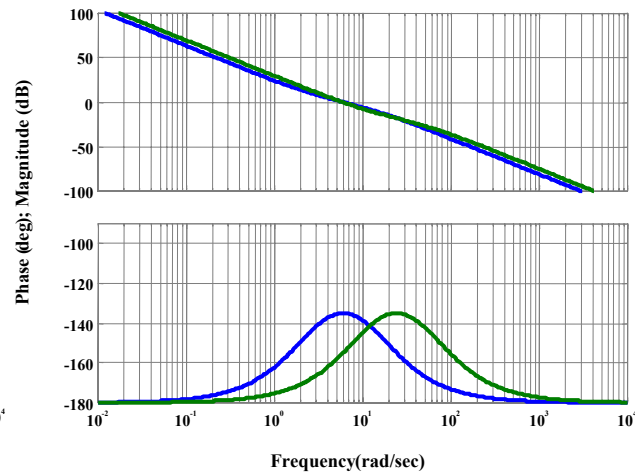
$M_{min} = 75 \text{ kg}$

$M_{max} = 150 \text{ kg}$

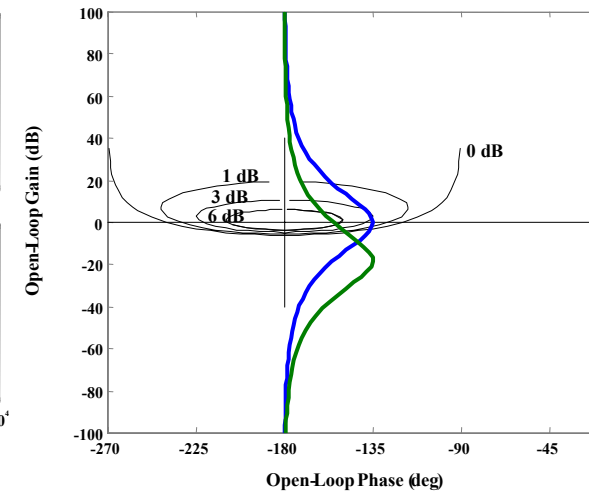
## Bode régulateur



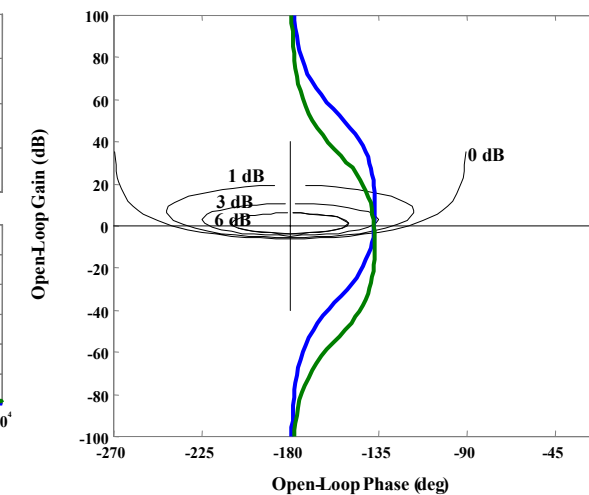
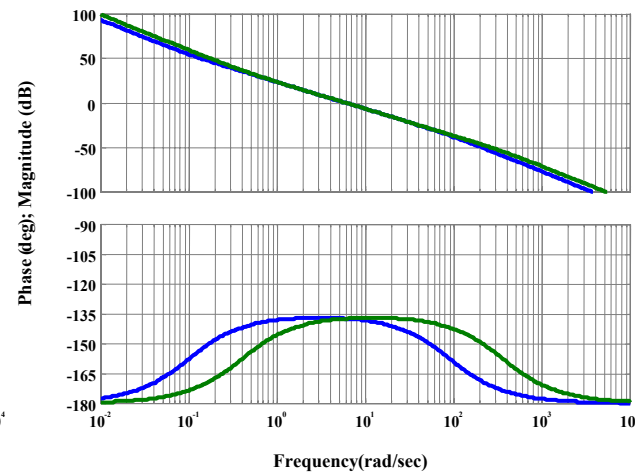
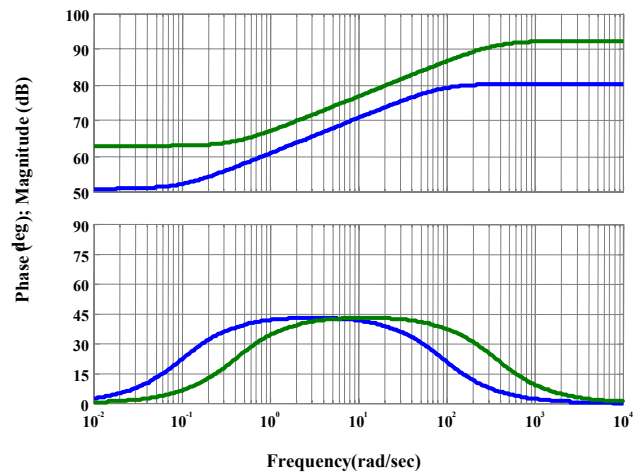
## Bode boucle ouverte



## Nichols boucle ouverte



## Traditionnel



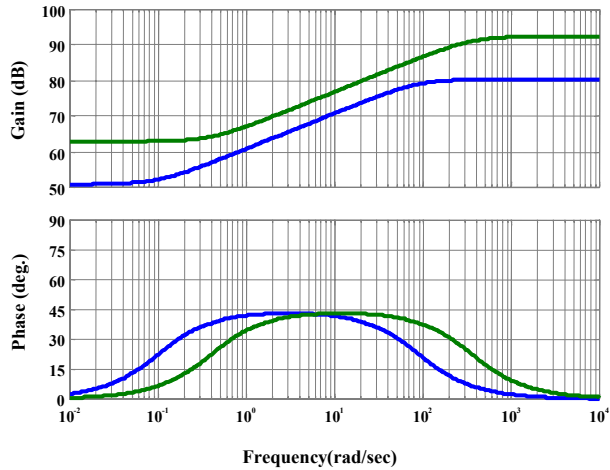
## CRONE (1<sup>er</sup> cas)

# Réponses fréquentielles

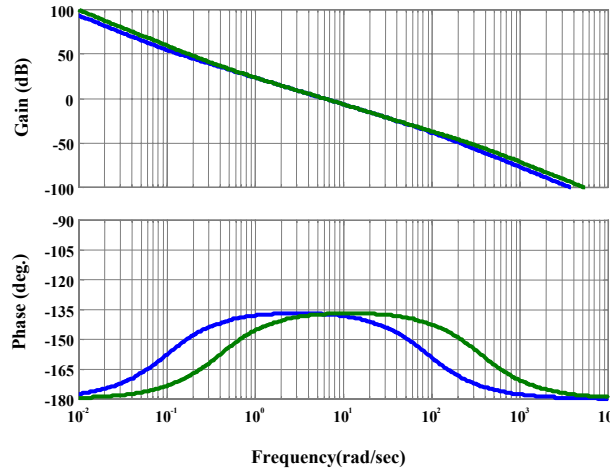
$M_{min} = 75 \text{ kg}$

$M_{max} = 150 \text{ kg}$

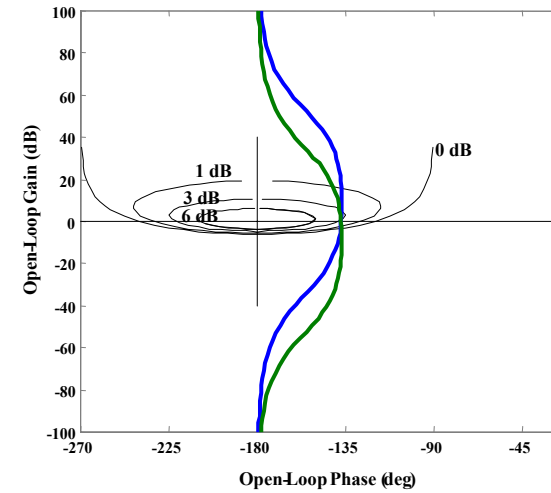
## Bode régulateur



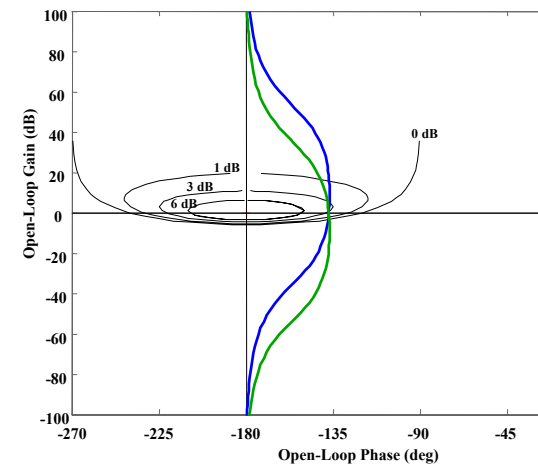
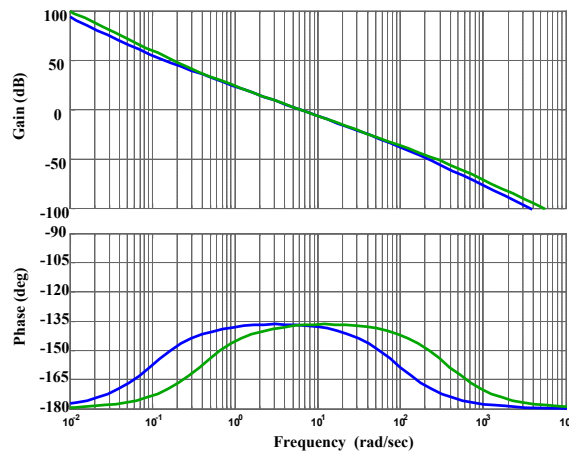
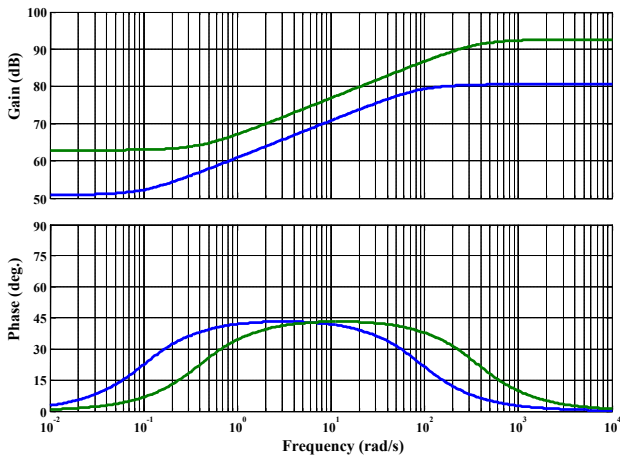
## Bode boucle ouverte



## Nichols boucle ouverte



## CRONE (1<sup>er</sup> cas)



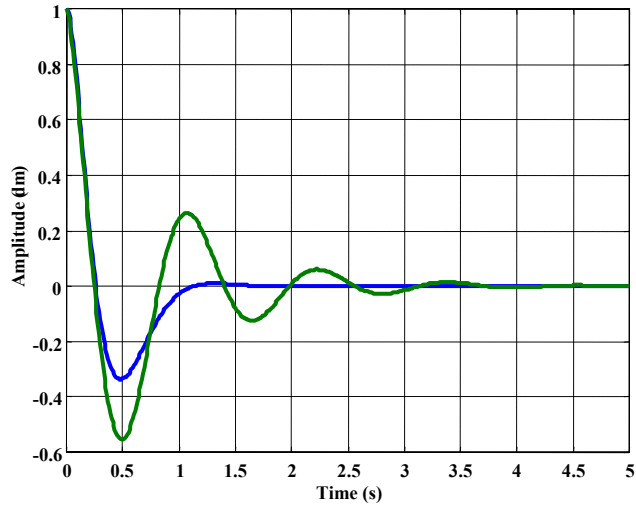
## CRONE (2<sup>eme</sup> cas)

# Réponses temporelles

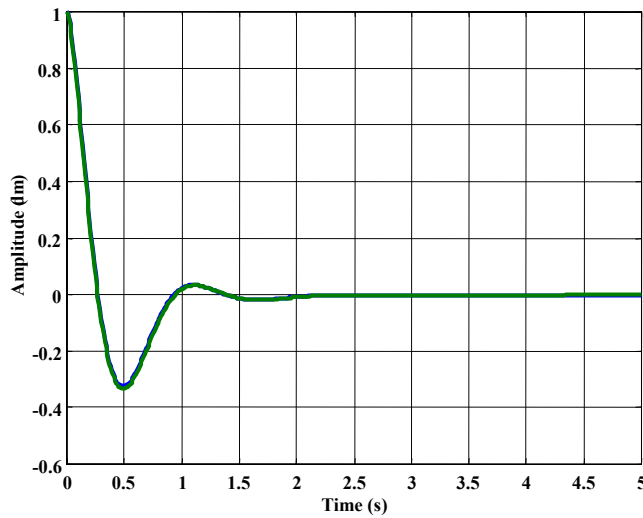
$M_{min} = 75 \text{ kg}$

$M_{max} = 150 \text{ kg}$

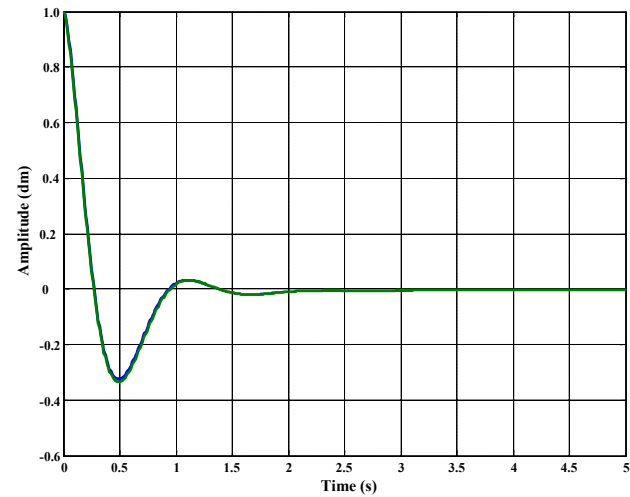
*Traditionnel*



*CRONE*



*1<sup>er</sup> cas*



*2<sup>eme</sup> cas*

# Analyse de la variation des pôles et des zéros

Pour  $M_{min} = 75$  kg

$$D_N(s) = D_0 \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega'_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \right)$$

$$\frac{\omega'_{i+1_{min}}}{\omega'_{i_{min}}} = \frac{\omega_{i+1_{min}}}{\omega_{i_{min}}} = \alpha \eta > 1 ,$$

$$\frac{\omega_{i_{min}}}{\omega'_{i_{min}}} = \alpha > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega'_{i+1_{min}}}{\omega_{i_{min}}} = \eta > 1$$

$$m = \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha \eta)}$$

Pour  $M_{max} = 150$  kg

$$\frac{\omega'_{i+1_{max}}}{\omega'_{i_{max}}} = \frac{\omega_{i+1_{max}}}{\omega_{i_{max}}} = \alpha \eta > 1 ,$$

$$\frac{\omega_{i_{max}}}{\omega'_{i_{max}}} = \alpha > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega'_{i+1_{max}}}{\omega_{i_{max}}} = \eta > 1$$

$$\frac{\omega'_{i+1_{max}}}{\omega'_{i_{max}}} = \frac{\omega'_{i+1_{min}}}{\omega'_{i_{min}}} = \alpha\eta$$

$$k_i = \gamma \frac{(M g)^2}{P_{0i} V_{0i}}$$



$$\frac{\Delta k_i}{k_i} = 2 \frac{\Delta M}{M}$$

## Arrangement parallèle de cellules RC série

$$\omega'_i = \frac{k_i}{b_i}$$



$$\frac{\Delta \omega'_i}{\omega'_i} = 2 \frac{\Delta M}{M}$$

$$\frac{\omega'_{i+1_{max}}}{\omega'_{i_{max}}} = \frac{\omega'_{i+1_{min}} + \Delta \omega'_{i+1}}{\omega'_{i_{min}} + \Delta \omega'_i} = \frac{\omega'_{i+1_{min}}}{\omega'_{i_{min}}} \frac{1 + \frac{\Delta \omega'_{i+1}}{\omega'_{i+1_{min}}}}{1 + \frac{\Delta \omega'_i}{\omega'_{i_{min}}}} = \frac{\omega'_{i+1_{min}}}{\omega'_{i_{min}}} \frac{1 + 2 \frac{\Delta M}{M_{min}}}{1 + 2 \frac{\Delta M}{M_{min}}} = \frac{\omega'_{i+1_{min}}}{\omega'_{i_{min}}}$$

$$\frac{\omega'_{i+1_{max}}}{\omega'_{i_{max}}} = \frac{\omega'_{i+1_{min}}}{\omega'_{i_{min}}} = \alpha\eta$$

$$\frac{\omega_{i_{max}}}{\omega_{i_{min}}} = \alpha > 1$$

# De la décomposition en éléments simples

$$k_0 = \gamma \frac{(M g)^2}{P_{00} V_{00}} \quad \downarrow$$

$$\prod_{i=1}^N \frac{\omega_i}{\omega_i} = \frac{k_0}{D_0} \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^N \frac{\omega_i}{\omega_i} = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{P_{0i} V_{0i}}{P_{00} V_{00}} = cste$$

$$\frac{1}{D_0} = \sum_{i=0}^N \frac{1}{k_i} = \sum_{i=0}^N \frac{P_{0i} V_{0i}}{\gamma (M g)^2} \quad \uparrow$$

Pour  $M_{min} = 75 \text{ kg}$

Pour  $M_{max} = 150 \text{ kg}$

$$\prod_{i=1}^N \frac{\omega_{i_{min}}}{\omega_{i_{min}}} = \alpha^N$$

$$\prod_{i=1}^N \frac{\omega_{i_{max}}}{\omega_{i_{max}}} = \prod_{i=1}^N \frac{\omega_{i_{min}}}{\omega_{i_{min}}} \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{\Delta\omega_i}{\omega_{i_{min}}}}{1 + \frac{\Delta\omega_i}{\omega_{i_{min}}}} \right) = \alpha^N$$

$$\prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{\Delta\omega_i}{\omega_{i_{min}}}}{1 + \frac{\Delta\omega_i}{\omega_{i_{min}}}} \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{\Delta\omega_i}{\omega_{i_{min}}}}{1 + 2 \frac{\Delta M}{M}} \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{\Delta\omega_i}{\omega_{i_{min}}} = 1 + 2 \frac{\Delta M}{M}$$

# SOMMAIRE

- 1 - INTRODUCTION
- 2 - METHODES DE SYNTHESE : RAPPEL
- 3 - METHODES FONDEES SUR LA RECURSIVITE FREQUENTIELLE
- 4 - **CONCLUSION**

$$M \in [M_{min} ; M_{max}] \quad k_i = \gamma \frac{(Mg)^2}{P_{0i} V_{0i}}$$

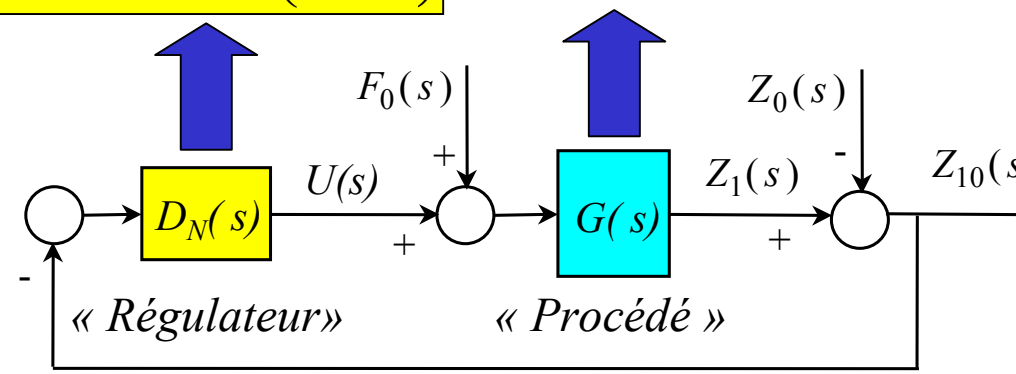
$$\omega_i' = \frac{k_i}{b_i}$$

$$\frac{\omega_{i+1}'}{\omega_i'} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \alpha \eta > 1$$

$$\frac{\omega_i'}{\omega_i} = \alpha > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} \eta > 1$$

$$D_N(s) = D_0 \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \right)$$

$$G(s) = \frac{1}{M s^2}$$



- Les pôles et les zéros varient avec  $M$   $\rightarrow$  les fréquences transitionnelles translate
- Les facteurs récurrents  $\alpha$  et  $\eta$  restent constants  $\rightarrow$  le comportement d'ordre non entier n'est pas modifié (notamment le blocage de phase)

**Robustesse du degré de stabilité : propriété intrinsèque à l'approche CRONE**

- Au voisinage de  $\omega_u$ , compensation des variations de gain du procédé et du régulateur  $\rightarrow \omega_u = \text{constante}$

**Robustesse de la rapidité : propriété intrinsèque à la technologie hydropneumatique**

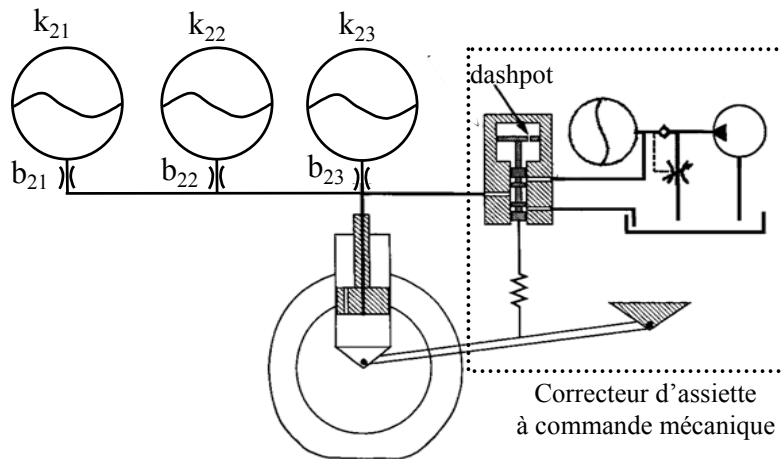
# Domaine d'application



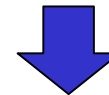
**Les suspensions de véhicules automobiles**  
(en collaboration avec la DRIA de PSA Peugeot Citroën)



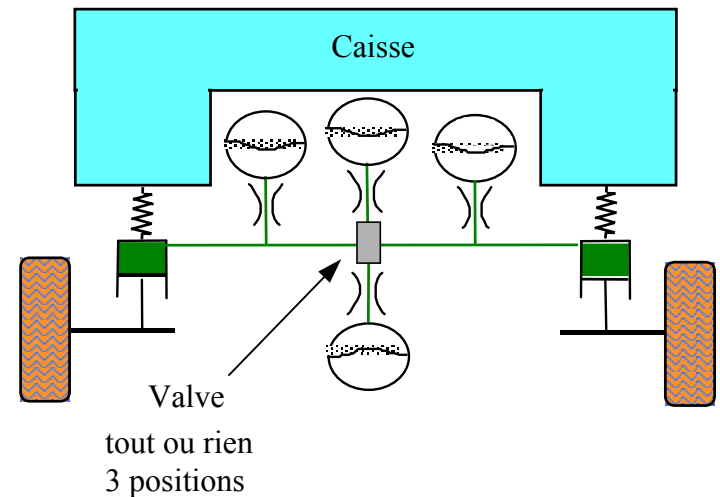
*Suspension CRONE passive multisphère*



**Trophée AFCET'95**



*Suspension CRONE Hydractive*



**3 modes de fonctionnement**