

Une étude comparative de deux techniques d'identification de systèmes fractionnaires

Jean-Claude TRIGEASSOU et Thierry POINOT

Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle

Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers

40, Ave du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex - FRANCE

Introduction

Approche diffusive

- ◆ Identification par moindres carrés
- ◆ Limitée aux systèmes diffusifs apériodiques
- ◆ Difficile de revenir à l'ordre non entier

Approche par intégrateur non entier

- ◆ Identification par erreur de sortie
- ◆ Fournit directement la valeur de l'ordre
- ◆ S'applique à n'importe quel système fractionnaire

Conclusion (préalable !)

Deux approches radicalement différentes !

Pourtant :

Ces deux approches sont nécessairement liées car l'intégrateur non entier est une réalisation discrète d'une représentation diffusive

Approche diffusive

Représentation diffusive

Soit un système diffusif, de réponse impulsionnelle $h(t)$, alors

$$y(t) = h(t) * u(t)$$

On lui associe une représentation diffusive

$$\mu(\xi) = \mathcal{L}^{-1}(h(t))$$

$$h(t) = \mathcal{L}(\mu(\xi)) = \int_0^{\infty} \mu(\xi) e^{-\xi t} d\xi$$

Ainsi qu'une représentation d'état, à distribution continue $x(\xi, t)$

$$\frac{\partial x(\xi, t)}{\partial t} = -\xi x(\xi, t) + u(t)$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} \mu(\xi) x(\xi, t) d\xi$$

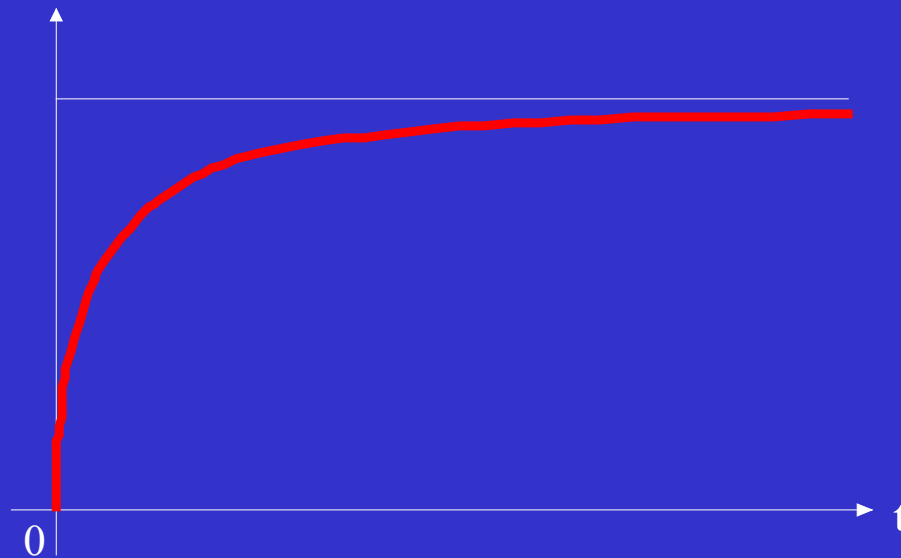
Approche diffusive

Un exemple académique

Soit

$$H(s) = \frac{b}{s^n + a}$$

Réponse indicielle



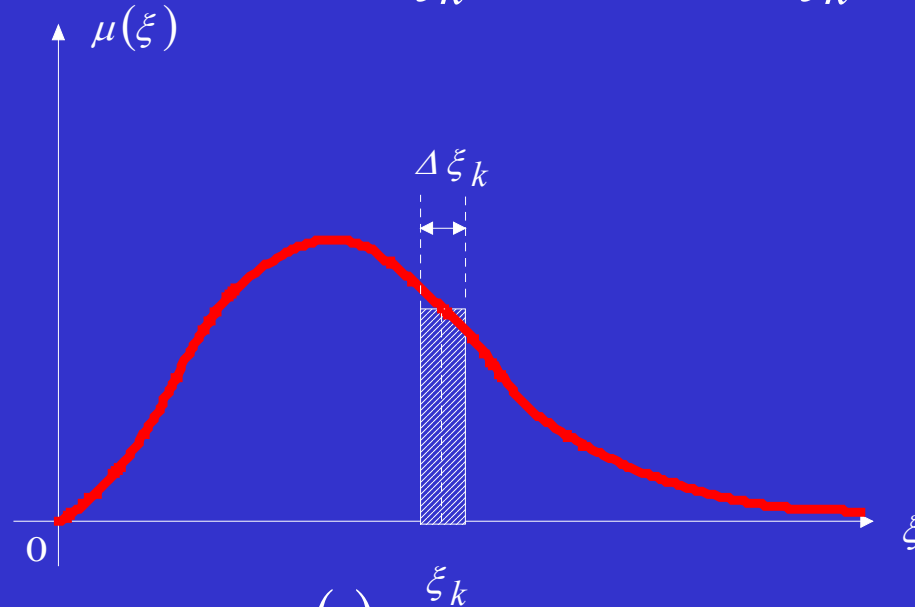
avec

$$\mu(\xi) = \frac{\frac{\sin(n\pi)}{\xi^n} \pi}{\xi^{2n} + 2a \frac{\cos(n\pi)}{\xi^n} + a^2} b$$

Approche diffusive

Réalisation discrète (indispensable à la simulation !)

On discrétise ξ en éléments $\Delta\xi_k$ autour de ξ_k de $k=1$ à K

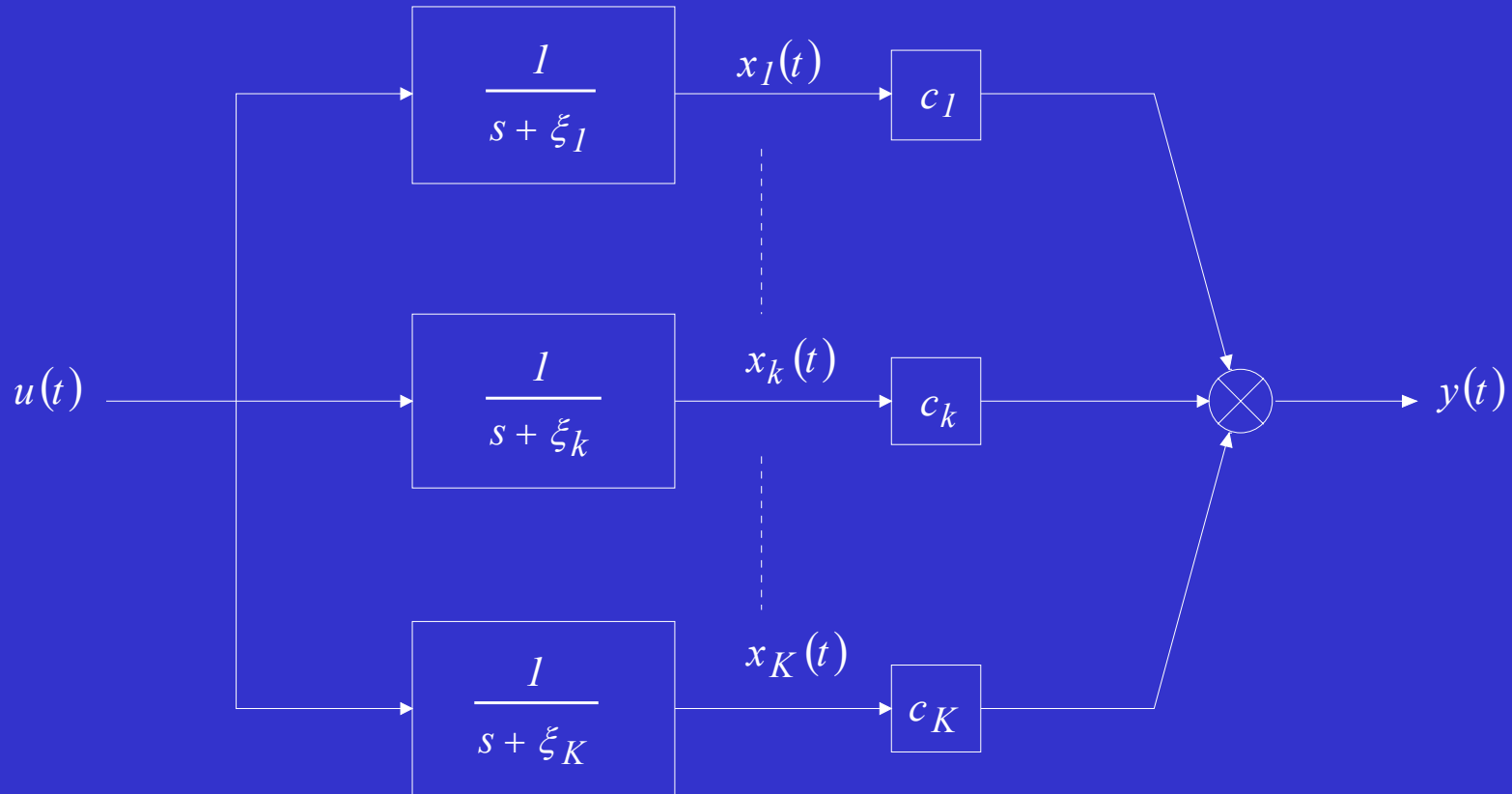


et on définit un état discret $x_k(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_k(t)}{dt} = -\xi_k x_k(t) + u(t) \\ y(t) = \sum_{k=1}^K \underbrace{\mu(\xi_k) \Delta\xi_k}_{c_k} x_k(t) \end{array} \right. \Rightarrow \hat{H}(s) = \sum_{k=1}^K \frac{c_k}{s + \xi_k}$$

Approche diffusive

Schéma de simulation



- ◆ Il faut connaître $\mu(\xi)$
- ◆ Simulation correcte si les ξ_k sont bien répartis
- ◆ Solution non générique

Approche diffusive - Identification

$$H(s) = \frac{b}{s^n + a} \quad \text{approché par} \quad \hat{H}(s) = \sum_{k=1}^K \frac{c_k}{s + \xi_k}$$

c_k et ξ_k sont à estimer :

- ♦ c_k : modèle LP
- ♦ ξ_k : modèle NLP

Solution (triviale) : on fixe les ξ_k . Alors

$$\hat{H}(s) = \sum_{k=1}^K \frac{c_k}{s + \xi_k} \quad \Rightarrow \quad \hat{y}(t) = \sum_{k=1}^K x_k(t) \hat{c}_k$$

où

$$x_k(t) = h_k(t) * u(t)$$

avec $h_k(t) = e^{-\xi_k t}$

Approche diffusive - Identification

Donc

$$\hat{y}(t) = \underline{X}(t)^T \underline{c}$$

avec

$$\underline{X}(t)^T = [x_1(t) \quad \cdots \quad x_K(t)]$$

$$\underline{c}^T = [c_1 \quad \cdots \quad c_K]$$

Conclusion : le modèle de $y(t)$ est LP

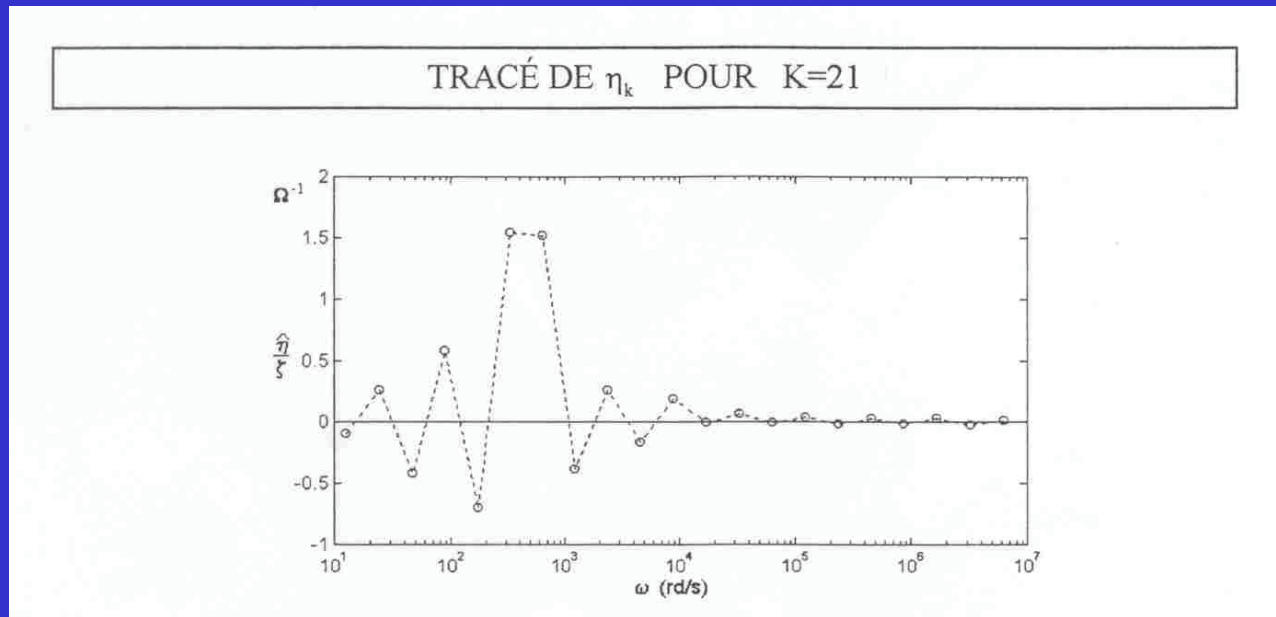
$$\underline{c}_{MC} = \left(\sum_{i=1}^I \underline{X}_i \underline{X}_i^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^I \underline{X}_i y_i$$

avec $t = i T_e$

Approche diffusive - Identification

Exemple

$$\hat{H}(s) = \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\eta}_k}{s + \xi_k}$$



Remarque : les \hat{c}_k "oscillent" car le choix *a priori* des valeurs ξ_k est non optimal

Approche diffusive - Identification

Problèmes :

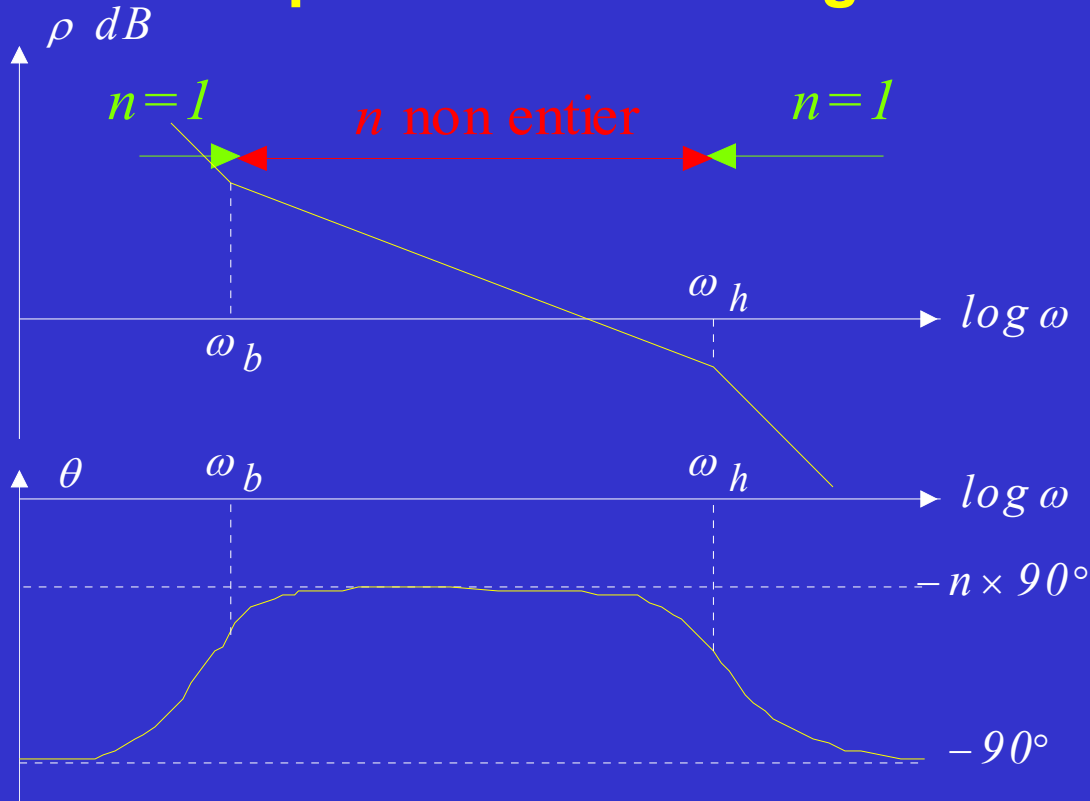
- ◆ Estimation de n : d'après le réponse fréquentielle de $\hat{H}(s)$, mais tout reste à faire
- ◆ Cas des systèmes à "réponse oscillante" : pas de solution (à notre connaissance)

Conclusion :

- ◆ Méthode limitée aux systèmes apériodiques
- ◆ Solution non générique

Approche par intégrateur non entier

Définition fréquentielle de l'intégrateur



$$I_n^*(s) = \frac{G_n}{s} \prod_{k=1}^K \frac{1 + \frac{s}{\omega'_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}}$$

$$\begin{cases} \omega_k = \alpha \omega'_k & \omega'_1 \equiv \omega_b \\ \omega'_{k+1} = \eta \omega_k & \omega_K \equiv \omega_h \end{cases} \quad n = 1 - \frac{\log \alpha}{\log \alpha \eta}$$

Approche par intégrateur non entier

Interprétation diffusive

$I_n^*(s)$ est une réalisation discrète (correcte) de la représentation diffusive de l'intégrateur non entier $I_n(s) = \frac{1}{s^n}$ où

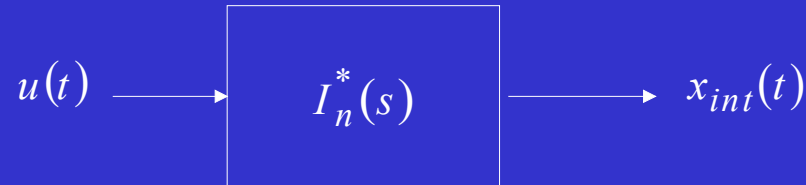
$$\mu(\xi) = \frac{\sin(n\pi)}{\pi} \xi^{-n}$$

avec

$$h(t) = \int_0^{\infty} \mu(\xi) e^{-\xi t} d\xi = \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1}$$

Approche par intégrateur non entier

Soit



$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \underline{x}_I = \underline{A} \underline{x}_I + \underline{B} u(t) \\ x_{int}(t) = \underline{C}^T \underline{x}_I \end{cases}$$

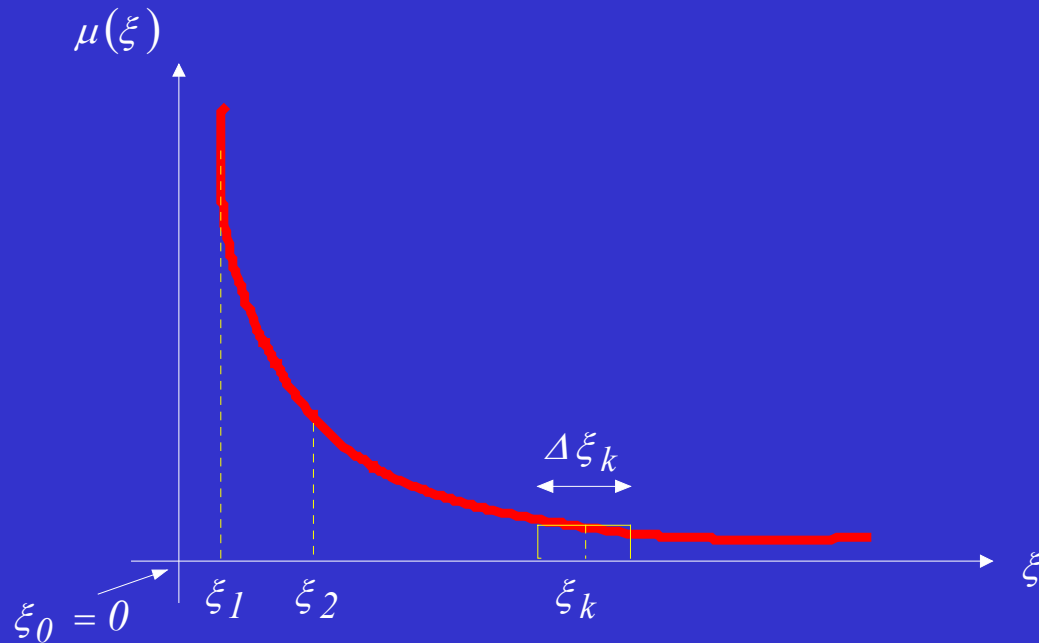
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & -\omega_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & -\omega_K \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} G_n \\ c_1 \\ \vdots \\ c_K \end{bmatrix}$$

Approche par intégrateur non entier

Coefficients c_k



avec $c_k = \mu(\xi_k) \Delta \xi_k$

Remarque (essentielle !):

$$\xi_k = 0 \quad c_0 = G_n$$

Approche par intégrateur non entier

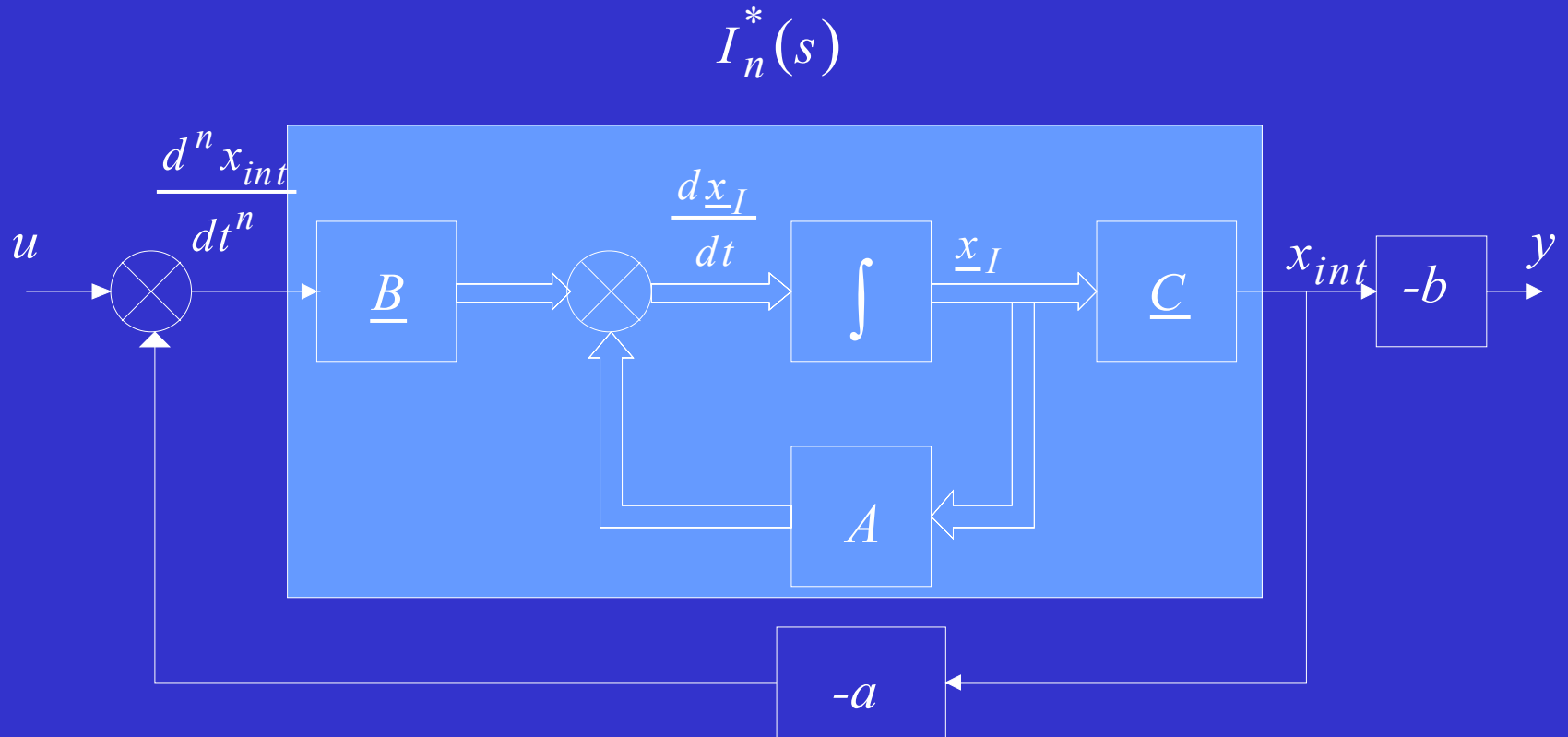
Simulation de $H(s) = \frac{b}{s^n + a}$

On a
$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a y(t) = b u(t)$$

On utilise la "macro"-représentation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^n x(t)}{dt^n} = -a x(t) + u(t) \\ y(t) = b x(t) \end{array} \right. \quad \text{où } x(t) = x_{int}(t)$$

Approche par intégrateur non entier

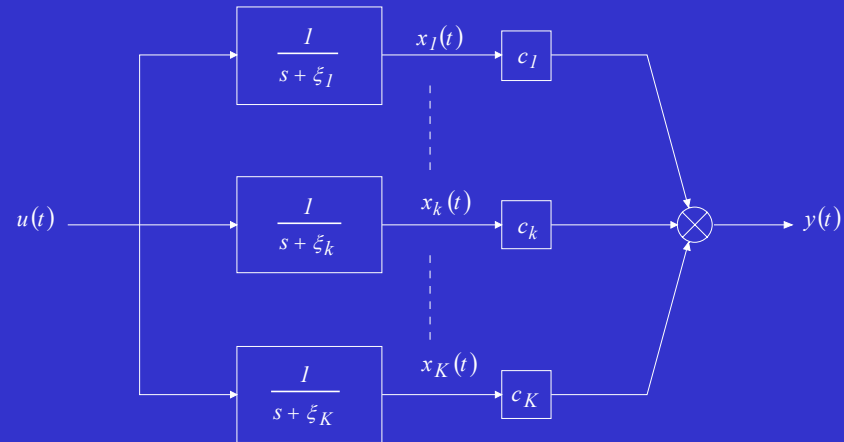


Equivalence des deux simulations

Les deux approches s'appuient sur des réalisations discrètes différentes

Approche diffuse

$$Y(s) = \hat{H}(s)U(s)$$



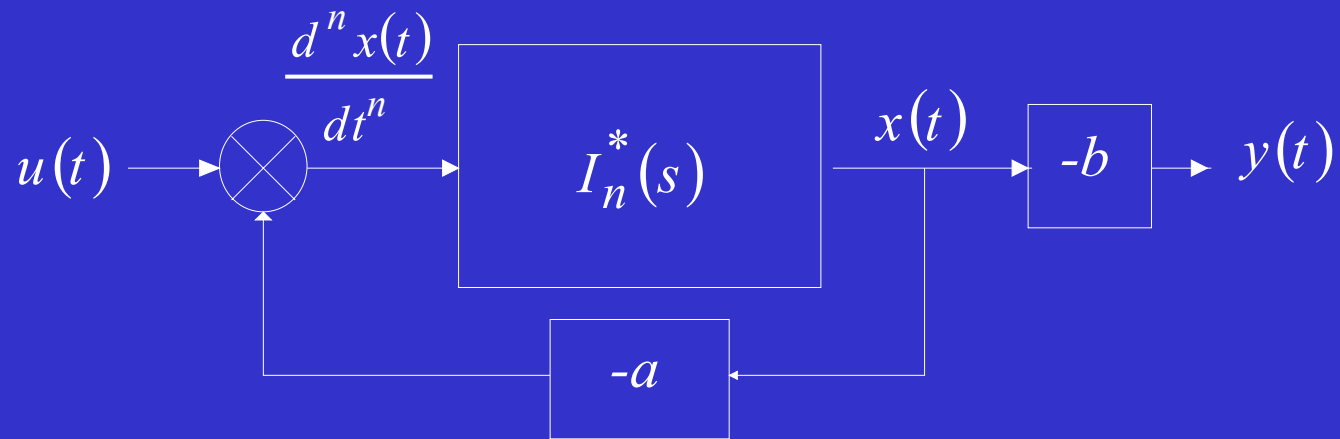
Approche par intégrateur

$$I_n^*(s) = \frac{G_n}{s} \prod_{k=1}^{K-1} \frac{1 + \frac{s}{\omega'_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}}$$

Attention K-1 !

$$= \frac{m_0 + m_1 s + \dots + m_{K-1} s^{K-1}}{s \left(1 + n_1 s + \dots + n_{K-1} s^{K-1} \right)}$$

Equivalence des deux simulations



Soit

$$X(s) = \frac{I_n^*(s)}{1 + a I_n^*(s)} U(s)$$

$$Y(s) = b X(s)$$

Alors

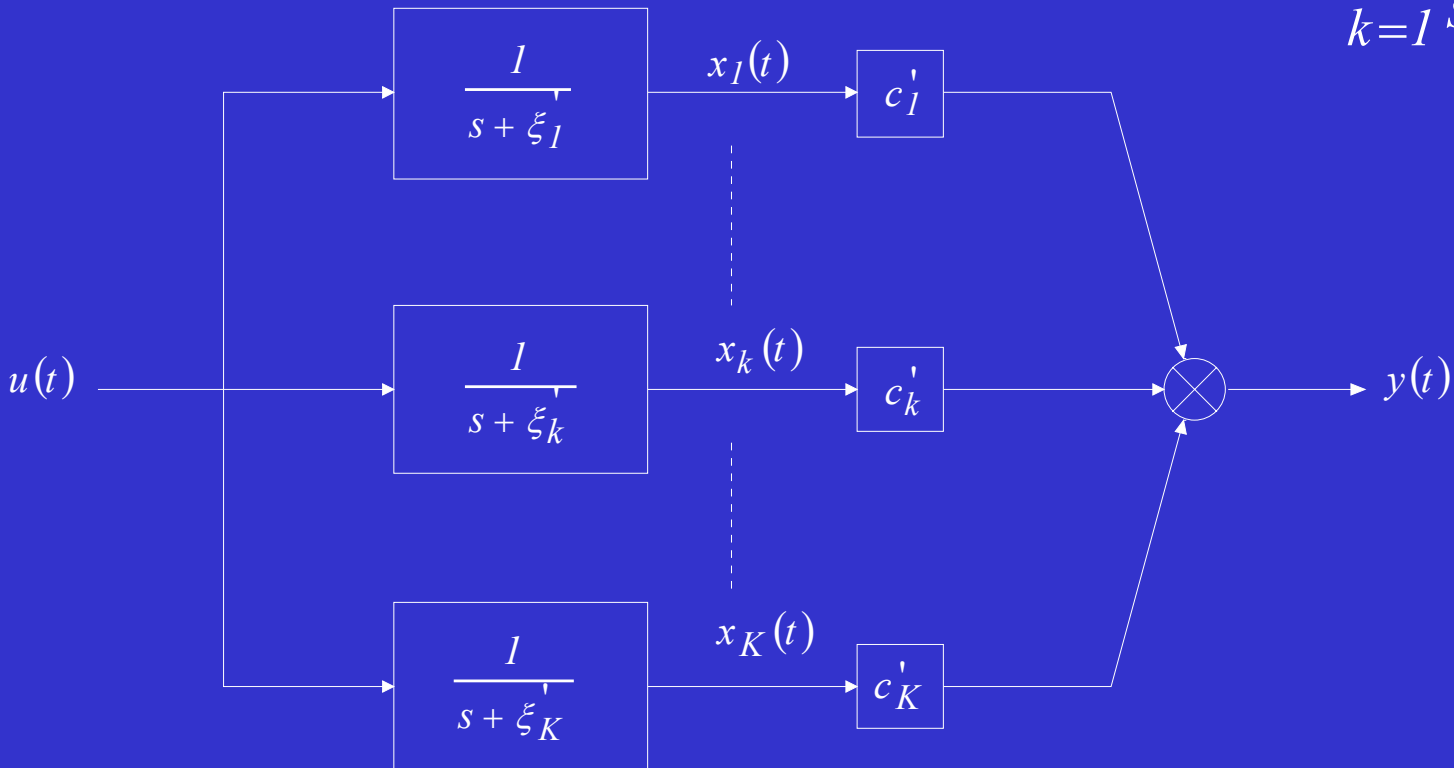
$$H^*(s) = \frac{b \left(m_0 + m_1 s + \dots + m_{K-1} s^{K-1} \right)}{a m_0 + (a m_1 + 1) s + (a m_2 + m_1) s^2 + \dots + (a m_{K-1} + m_{K-2}) s^{K-1} + n_{K-1} s^K}$$

Equivalence des deux simulations

Comparaison

$H^*(s)$ comporte $\begin{cases} K-1 \text{ zéros} \\ K \text{ pôles} \end{cases}$

On peut le décomposer en éléments simples : $H^*(s) = \sum_{k=1}^K \frac{c'_k}{s + \xi'_k}$



Equivalence des deux simulations

Comparaison

- ◆ $H^*(s)$ et $\hat{H}(s)$ possèdent la même structure : les deux simulations sont équivalentes
- ◆ mais leurs valeurs numériques diffèrent car les hypothèses de discrétisation sont différentes

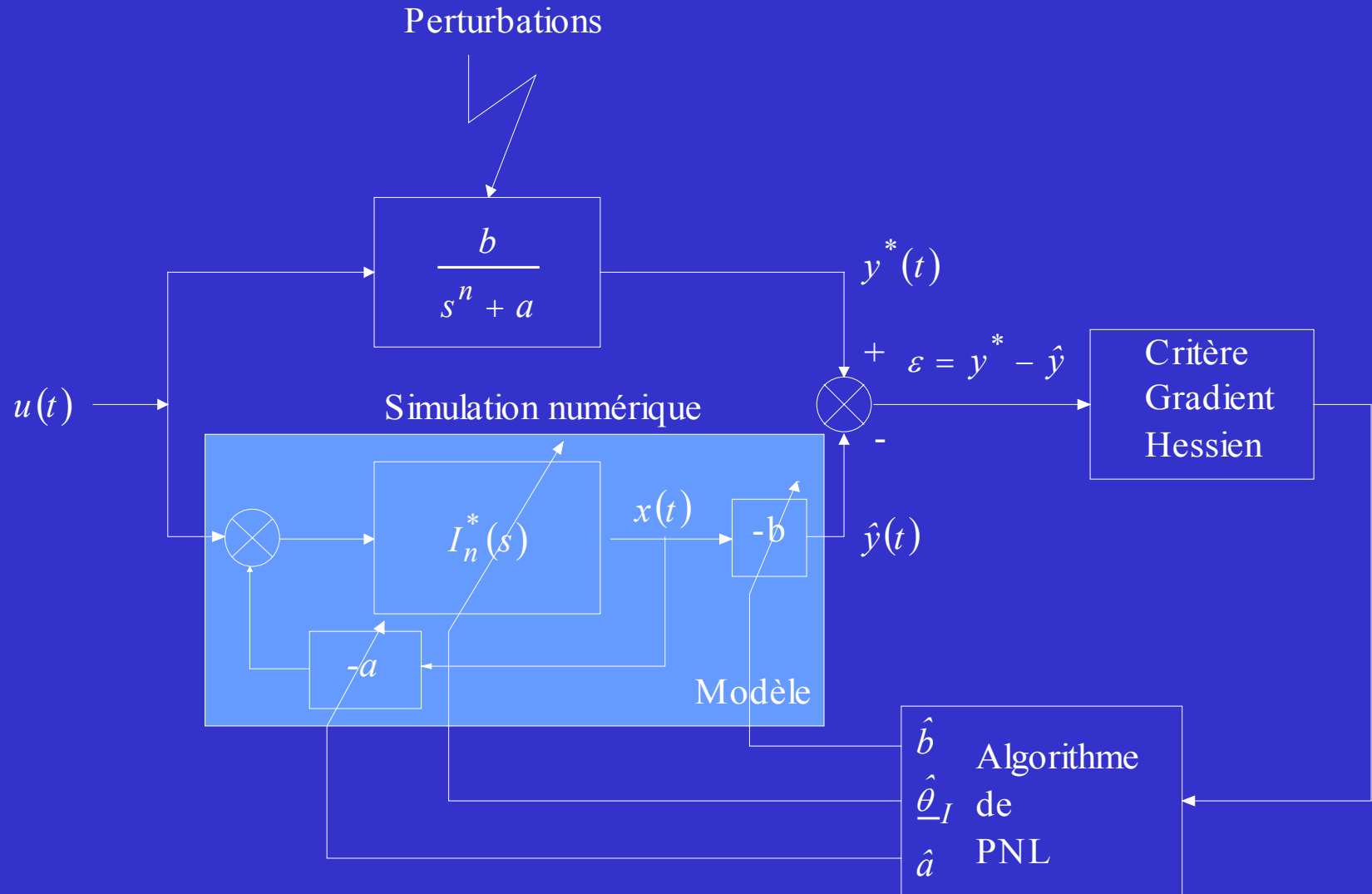
Approche par intégrateur non entier

Identification d'un modèle $H(s) = \frac{b}{s^n + a}$

Objectif : estimation de $\{a, b, n\}$, c'est à dire de $\left\{ a, b, \underbrace{\omega_1, \omega_K, \alpha, \eta}_{I_n^*(s)} \right\}$

Méthode : modèle NLP \Rightarrow erreur de sortie (méthode du modèle)

Approche par intégrateur non entier



Intérêt : algorithme non biaisé \forall les perturbations

Approche par intégrateur non entier

Difficulté de mise en œuvre :

- ◆ Volume de calcul : simulation complète du modèle et des fonctions de sensibilité à chaque itération
- ◆ convergence non assurée : initialisation de $\hat{\theta}$

Interprétation des résultats d'estimation

L'algorithme fournit $\begin{cases} \hat{a}, \hat{b} \\ \hat{\omega}'_1, \hat{\omega}'_K, \hat{\alpha}, \hat{\eta} \end{cases}$ donc \hat{n}

On obtient

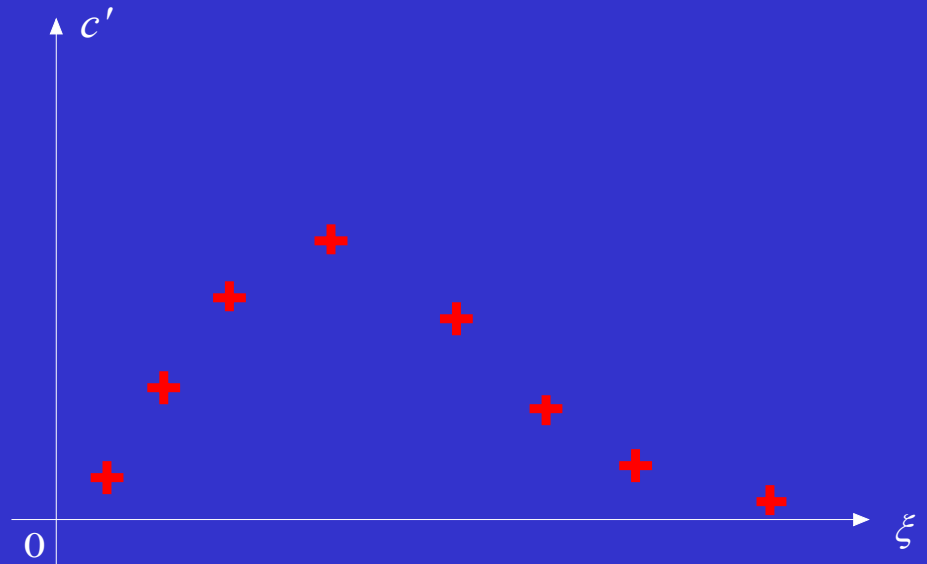
$$\hat{H}^*(s) = \frac{\hat{b}}{\hat{a} + s^{\hat{n}}}$$

que l'on peut décomposer (après identification) en

$$\hat{H}^*(s) = \sum_{k=1}^K \frac{c'_k}{s + \xi'_k}$$

Approche par intégrateur non entier

On accède ainsi à la représentation diffuse de $H(s)$



On peut donc reconstituer $\mu(\xi)$ sachant que $c'_k = \mu(\xi_k) \Delta \xi_k$

Approche par intégrateur non entier

Conclusion

L'approche par intégrateur non entier fournit les mêmes informations que l'approche diffusive.

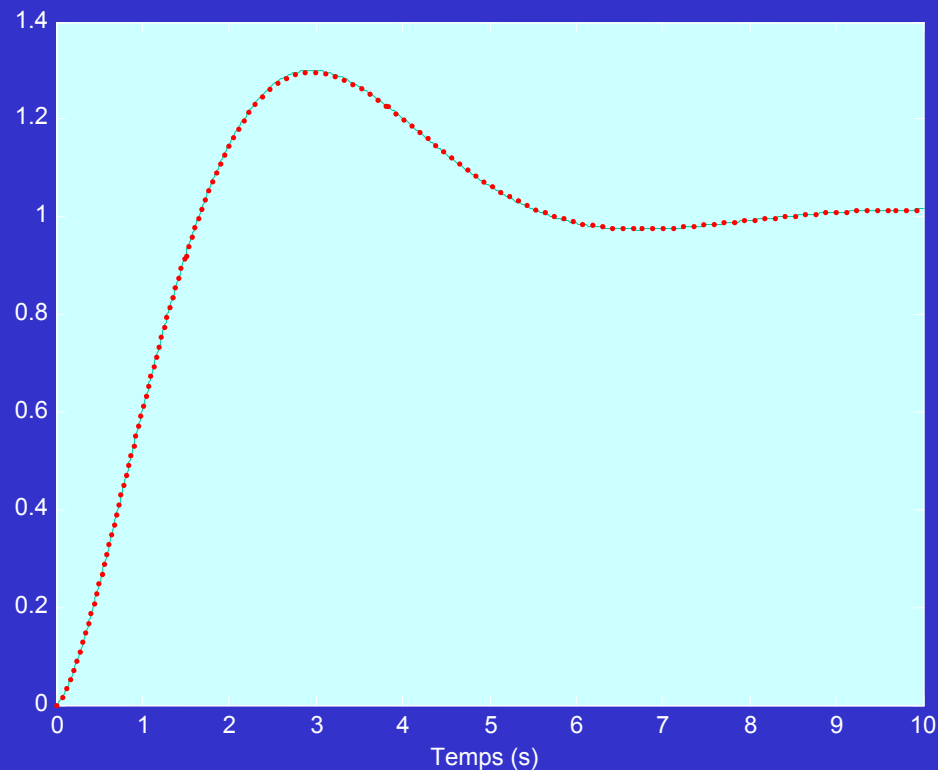
Mais en plus :

- ♦ elle fournit directement \hat{n}
- ♦ elle fournit une estimation optimale des ξ_k de la représentation diffusive
- ♦ elle est générique

Approche par intégrateur non entier

Généricité de cette approche

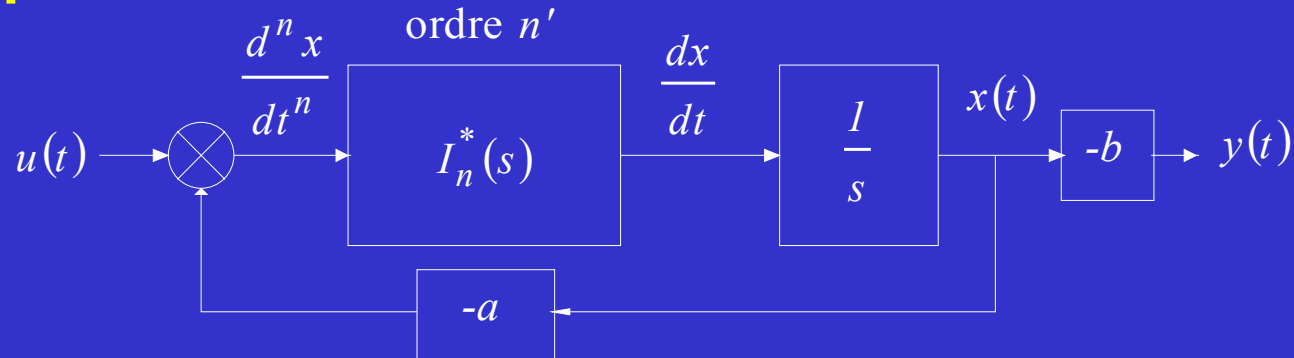
Considérons $H(s) = \frac{b}{s^n + a}$ où $1 < n < 2$



Réponse indicielle

Approche par intégrateur non entier

Simulation



On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}, \hat{b} \\ \underbrace{\hat{\omega}'_1, \hat{\omega}'_K, \hat{\alpha}, \hat{\eta}}_{n'} \end{array} \right. \text{ soit } n = 1 + n'$$

donc

$$\hat{H}^*(s) = \frac{\hat{b}}{s^{\hat{n}} + \hat{a}} \quad \text{soit} \quad \hat{H}^*(s) = \sum_{k=1}^K \frac{c'_k}{s + \xi'_k}$$

Où les $\{c'_k, \xi'_k\}$ sont des nombres complexes conjugués

Conclusion

- ◆ L'approche par intégrateur non entier apporte indirectement une solution au problème diffusif dans le cas "oscillant amorti"
- ◆ Cette approche se généralise à n'importe quelle structure plus complexe
- ◆ Il n'est pas évidemment nécessaire de connaître *a priori* l'expression analytique de $\mu(\xi)$, mais l'algorithme fournit une estimation numérique de $\mu(\xi)$