

X. MOREAU

Equipe CRONE

**Commande - Robotique
Ordres Non Entiers**



UMR 5131



**Automatique, Productique, Signal et Image
UMR 5131 CNRS
Université BORDEAUX I - ENSEIRB
FRANCE**

**SYNTHESE D'UN DERIVATEUR D'ORDRE NON
ENTIER BORNE EN FREQUENCE FONDEE SUR LA
DIFFUSION**



Laboratoire d'Automatique et de Productique
Université Bordeaux 1 - ENSEIRB - UMR 5131 CNRS
351, cours de la Libération - 33405 TALENCE Cedex - France
Tél. : +33 (0)5 56 84 24 00 - Fax : +33 (0)5 56 84 66 44
URL : <http://www.lap.u-bordeaux.fr>



Sommaire

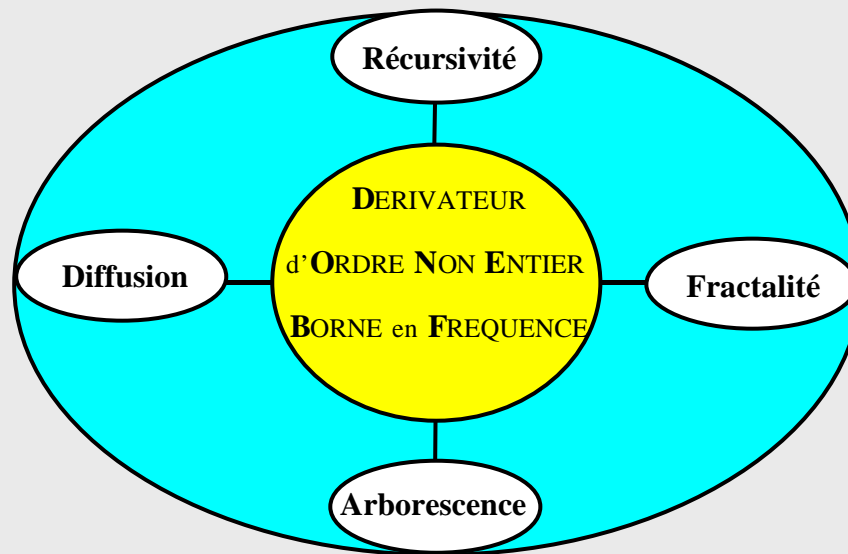
1 - Introduction : rappel du contexte

2 - Approche par discrétisation

3 - Approche par les EDP

4 - Conclusion et Perspectives

1 - Introduction : rappel du contexte





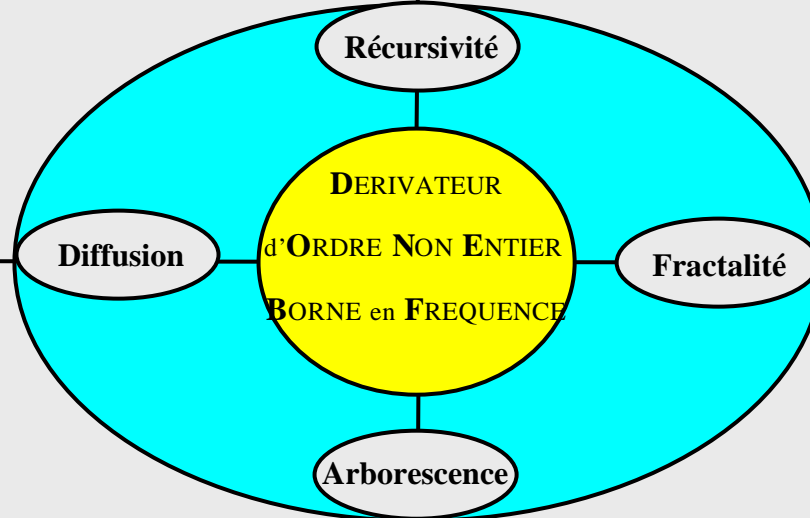
Suspension CRONE passive multisphère



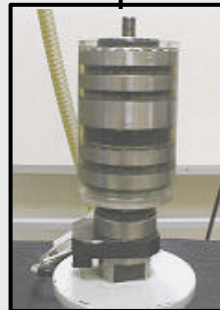
Suspension CRONE commandée



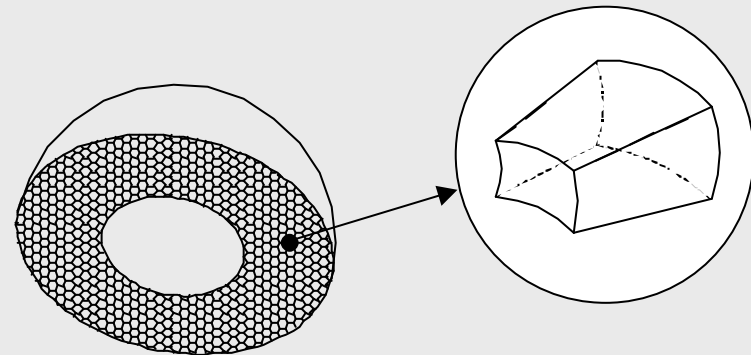
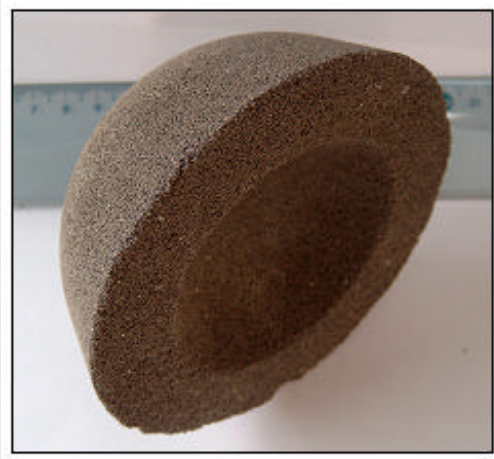
Suspension CRONE passive monosphère



Suspension CRONE passive arborescente



Si l'on admet que la dimension des billes devient faible devant les dimensions du massif, alors il est possible de supposer qu'il existe une loi homogénéisée au niveau de l'élément différentiel, à savoir une capacité élémentaire du milieu par unité de volume, notée c_0 , et une conductivité hydraulique élémentaire du milieu par unité de surface, notée k .

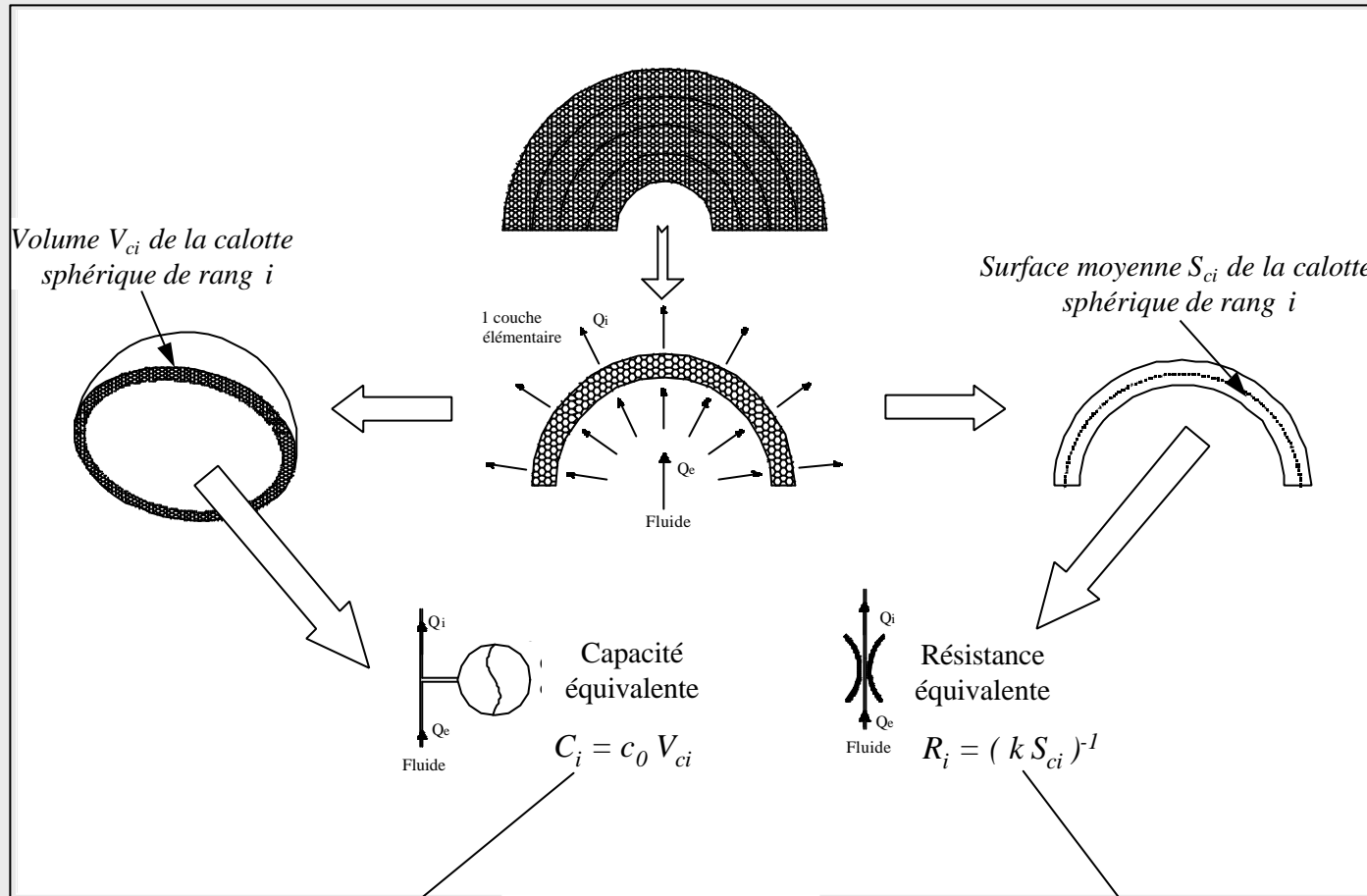


2 - Approche par discrétisation

2.1 - Mise en équation

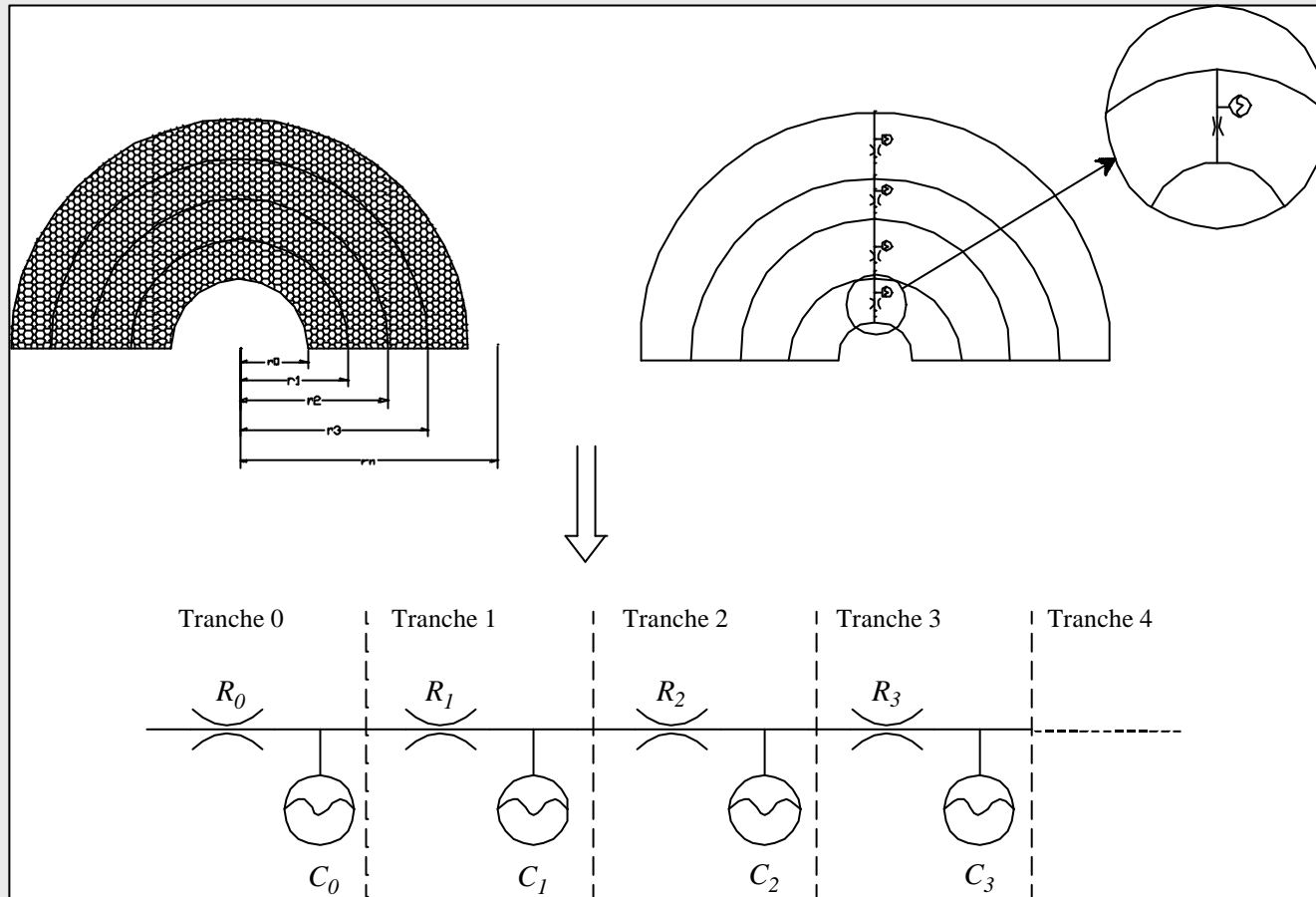
2.2 - Analyse de l'impédance d'entrée

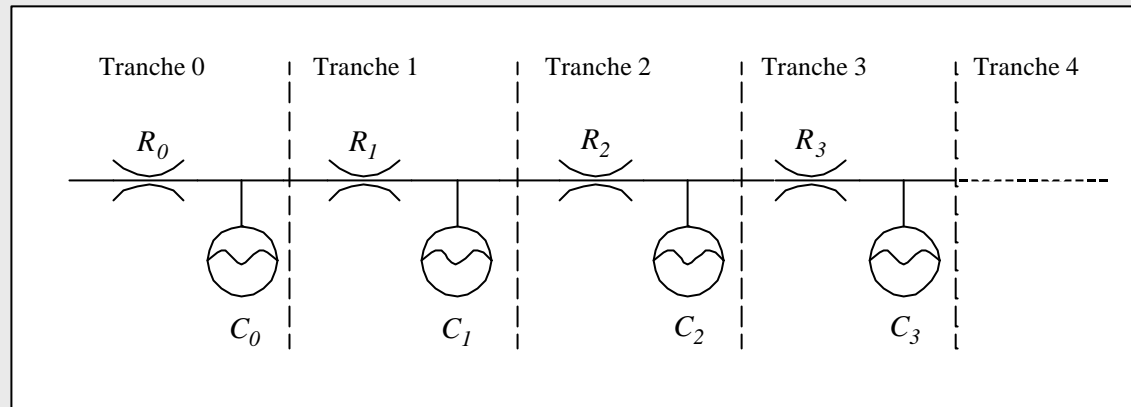
2.1 - Mise en équation



$$C_i = c_0 V_{ci} \quad \text{où} \quad V_{ci} = \frac{2}{3} \mathbf{p} (r_{i+1}^3 - r_i^3)$$

$$R_i = \frac{1}{k S_{ci}} \quad \text{où} \quad S_{ci} = 2 \mathbf{p} \left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^2$$





Impédance d'entrée

$$Z_e(s) = R_0 + \frac{1}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{C_2 s + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{C_3 s + \dots}}}}}}}$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$R_i + \frac{1}{C_i s + \frac{1}{R_{i+1} + \frac{1}{C_{i+1} s + \dots}}}$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$R_N + \frac{1}{C_N s}$$

$$Z_e(s) = \frac{1}{C_T s} \frac{1 + \sum_{i=1}^{N+1} b_i s^i}{1 + \sum_{i=1}^N a_i s^i}$$

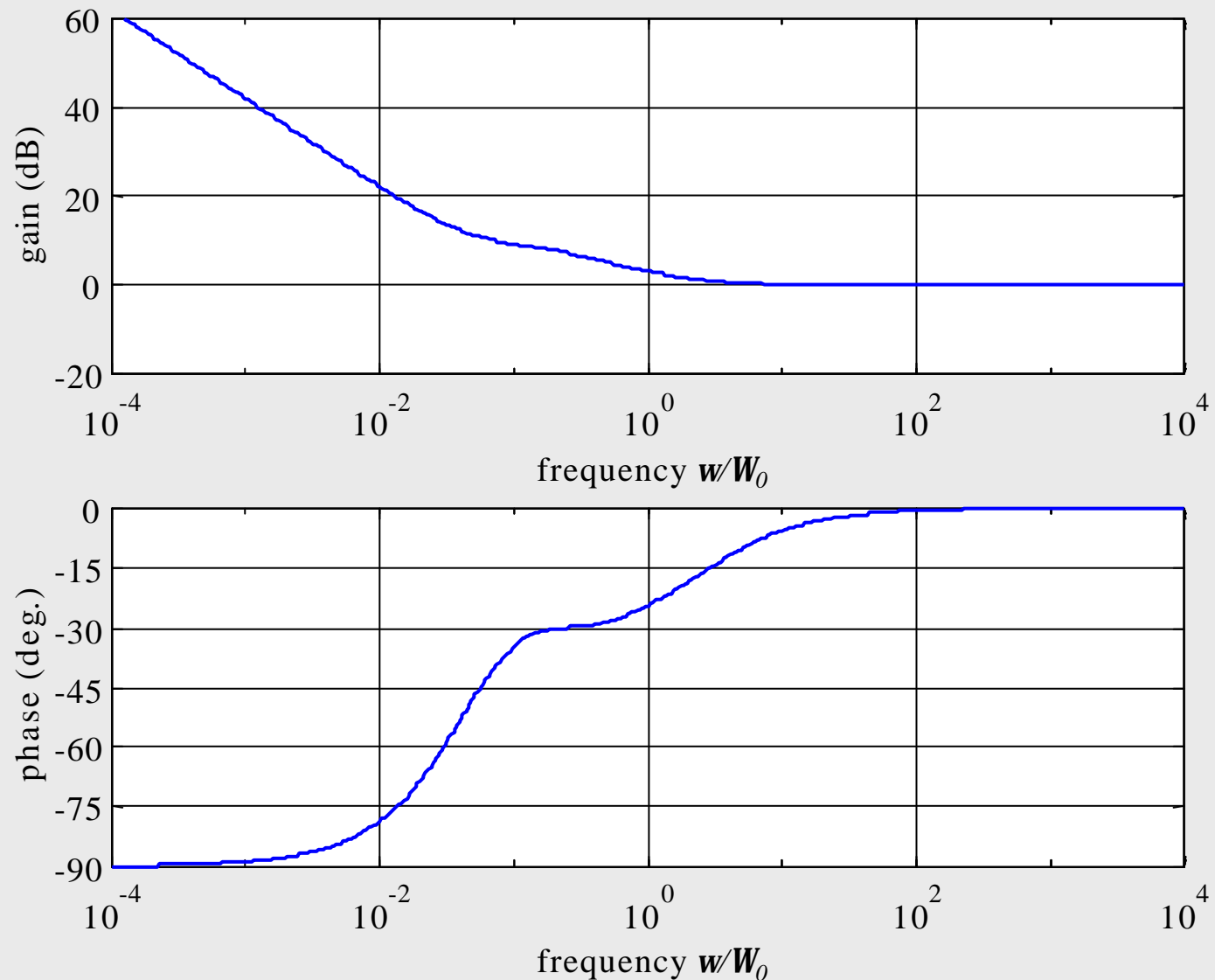
avec $C_T = \sum_{i=0}^N C_i$

2.2 - Analyse de l'impédance d'entrée

$$W_0 = (R_0 C_0)^{-1}$$

$$e/r_0 = 0.1$$

$$N = 5$$



Diagrammes de Bode de l'impédance hydraulique d'entrée obtenue avec un découpage à tranche constante de la calotte sphérique

3 - Approche par les EDP

3.1 - Mise en équation

3.2 - Résolution

3.3 - Analyse

Inventaire des débits dans les directions :

3.1 - Mise en équation

- radiale

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr$$



$$q_r - q_{r+dr} = -\frac{\partial q_r}{\partial r} dr$$

- polaire

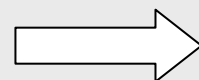
$$q_{q+dq} = q_q + \frac{\partial q_q}{\partial q} dq$$



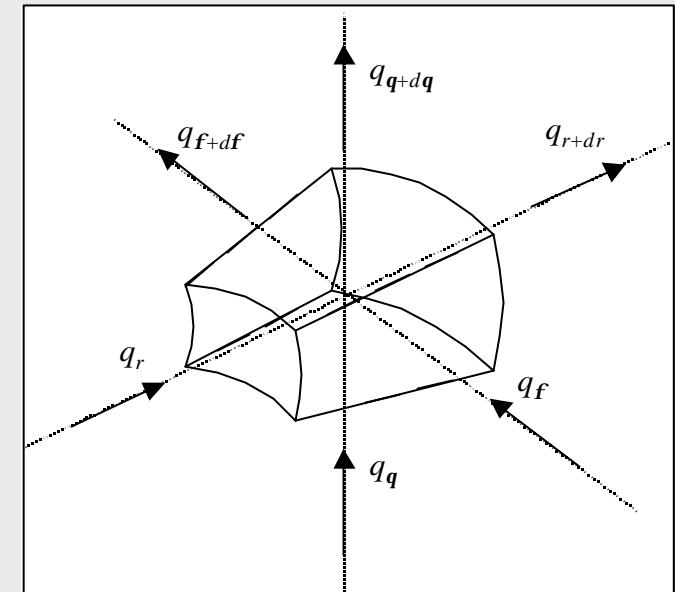
$$q_q - q_{q+dq} = -\frac{\partial q_q}{\partial q} dq$$

- azimutale

$$q_{f+df} = q_f + \frac{\partial q_f}{\partial f} df$$



$$q_f - q_{f+df} = -\frac{\partial q_f}{\partial f} df$$



Application du principe de conservation (en l'absence de source dans l'élément de volume) :

$$q_r + q_q + q_f - q_{r+dr} - q_{q+dq} - q_{f+df} = c_0 (r^2 \sin q \, dr \, dq \, df) \frac{\partial P}{\partial t}$$

ou encore,

$$-\left(\frac{\partial q_r}{\partial r} dr + \frac{\partial q_q}{\partial q} dq + \frac{\partial q_f}{\partial f} df \right) = c_0 (r^2 \sin q \, dr \, dq \, df) \frac{\partial P}{\partial t}$$

Application de la loi de Darcy pour chaque direction :

- radiale

$$q_r = -k (r^2 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f}) \frac{\partial P}{\partial r}$$

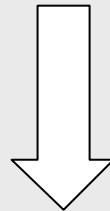
- polaire

$$q_{\mathbf{q}} = -k (r \sin \mathbf{q} dr d\mathbf{f}) \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}}$$

- azimutale

$$q_{\mathbf{f}} = -k (r dr d\mathbf{q}) \frac{1}{r \sin \mathbf{q}} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{f}}$$

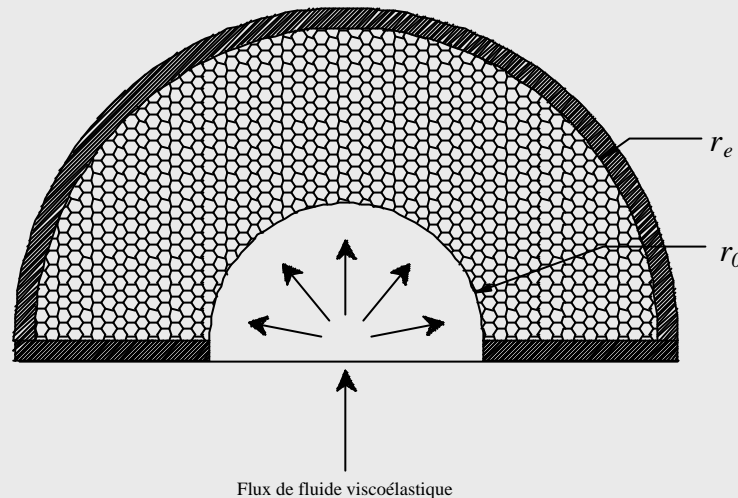
$$-\left(\frac{\partial q_r}{\partial r} dr + \frac{\partial q_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial q_{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} \right) = c_0 (r^2 \sin \mathbf{q} dr d\mathbf{q} d\mathbf{f}) \frac{\partial P}{\partial t}$$



d'où l'équation de diffusion en coordonnées sphériques :

$$\frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} \mathbf{q}} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \mathbf{q}^2} + \frac{1}{(r \sin \mathbf{q})^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \mathbf{f}^2} = \frac{c_0}{k} \frac{\partial P}{\partial t}$$

Dans le cas d'une demi-sphère perfusée par son centre, la symétrie de l'écoulement conduit à une pression indépendante de q et f .



Finalement, l'équation aux dérivées partielles décrivant en coordonnées sphériques le comportement dynamique du système est définie par une équation de diffusion de la forme :

$$\frac{2}{r} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial r^2} - \frac{c_0}{k} \frac{\partial P(r,t)}{\partial t} = 0.$$

3.2 - Résolution

Sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de l'équation de diffusion conduit à :

$$\frac{2}{r} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial r^2} - \frac{c_0}{k} \frac{\partial P(r,t)}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{P}(r,s)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{P}(r,s)}{\partial r^2} - \frac{s}{a} \bar{P}(r,s) = 0 ,$$

$$\text{où } \bar{P}(r,s) = \mathcal{L}\{P(r,t)\} \quad \text{et} \quad a = \frac{k}{c_0} .$$

En effectuant le changement de variable habituel en coordonnées sphériques, soit :

$$\bar{P}(r,s) = \frac{1}{r} U(r,s) ,$$

on obtient une équation différentielle par rapport à la variable r , soit :

$$\frac{\partial^2 U(r,s)}{\partial r^2} - \frac{s}{a} U(r,s) = 0 .$$

$$\frac{\partial^2 U(r,s)}{\partial r^2} - \frac{s}{a} U(r,s) = 0$$

$$D = 4 \frac{s}{a}$$



2 racines distinctes

$$l_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{s}{a}}$$

La solution d'une telle équation est immédiate et s'exprime par :

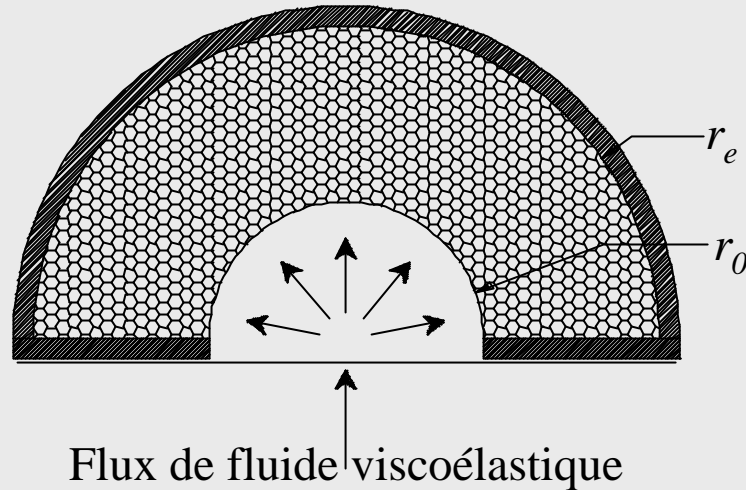
$$U(r,s) = A_1(s) e^{-r\sqrt{s/a}} + A_2(s) e^{r\sqrt{s/a}},$$

où $A_1(s)$ et $A_2(s)$ dépendent des conditions aux limites.

Finalement, compte tenu du changement de variable, la solution est de la forme :

$$\bar{P}(r,s) = \frac{1}{r} \left(A_1(s) e^{-r\sqrt{s/a}} + A_2(s) e^{r\sqrt{s/a}} \right).$$

Prise en compte des conditions aux limites pour déterminer $A_1(s)$ et $A_2(s)$



- en $r = r_e$, le débit est nul (structure fermée), d'où

$$q_r = -k (r^2 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f}) \frac{\partial P}{\partial r} \quad \Longrightarrow \quad \left. \frac{\partial \bar{P}}{\partial r}(s, r) \right|_{r=r_e} = 0$$

- en $r = r_0$, le débit est égal au débit appliqué à l'entrée du massif poreux, d'où

$$q_r = -k (r^2 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f}) \frac{\partial P}{\partial r} \quad \Longrightarrow \quad \left. \frac{\partial \bar{P}}{\partial r}(s, r) \right|_{r=r_0} = - \frac{1}{k 2 \mathbf{p} r_0^2} \bar{q}(s)$$

$$\text{avec } \bar{q}(s) = \mathcal{L}\{q(t)\}$$

où $2 \mathbf{p} r_0^2$ représente l'aire de la calotte demi-sphérique d'entrée.

La prise en compte de ces conditions aux limites permet d'établir un transfert $H(r,s)$ de la forme :

$$H(r,s) = \frac{\bar{P}(r,s)}{\bar{q}(s)} = \frac{1}{2pk r} \frac{\left(\frac{r_e \sqrt{\frac{s}{a}} - 1}{r_e \sqrt{\frac{s}{a}} + 1} \right) \exp\left((2r_e - r) \sqrt{\frac{s}{a}} \right) + \exp\left(r \sqrt{\frac{s}{a}} \right)}{\left(\frac{r_e \sqrt{\frac{s}{a}} - 1}{r_e \sqrt{\frac{s}{a}} + 1} \right) \left(1 + r_0 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \exp\left((2r_e - r) \sqrt{\frac{s}{a}} \right) + \left(1 - r_0 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \exp\left(r_0 \sqrt{\frac{s}{a}} \right)}$$

3.3 - Analyse

$$H(r,s) = \frac{\bar{P}(r,s)}{\bar{q}(s)} = \frac{1}{2pk r} \frac{\left(\frac{r_e \sqrt{\frac{s}{a}} - 1}{r_e \sqrt{\frac{s}{a}} + 1} \right) \exp\left((2r_e - r) \sqrt{\frac{s}{a}} \right) + \exp\left(r \sqrt{\frac{s}{a}} \right)}{\left(\frac{r_e \sqrt{\frac{s}{a}} - 1}{r_e \sqrt{\frac{s}{a}} + 1} \right) \left(1 + r_0 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \exp\left((2r_e - r) \sqrt{\frac{s}{a}} \right) + \left(1 - r_0 \sqrt{\frac{s}{a}} \right) \exp\left(r_0 \sqrt{\frac{s}{a}} \right)}$$

$$H(r,s) = \frac{\bar{P}(r,s)}{\bar{q}(s)} = F(r,s) G(r,s)$$

$$F(r,s) = \frac{\left(\frac{\left(\frac{s}{w_0/a} \right)^{0.5} - 1}{\left(\frac{s}{w_0/a} \right)^{0.5} + 1} \right) \exp\left(2(1 - r/r_e) \left(\frac{s}{w_0/a} \right)^{0.5} \right) + 1}{\left(\frac{\left(\frac{s}{w_0/a} \right)^{0.5} - 1}{\left(\frac{s}{w_0/a} \right)^{0.5} + 1} \right) \exp\left(2(1 - r/r_e) \left(\frac{s}{w_0/a} \right)^{0.5} \right) + \frac{1 - \left(\frac{s}{w_0/a} \right)^{0.5}}{1 + \left(\frac{s}{w_0/a} \right)^{0.5}}}$$

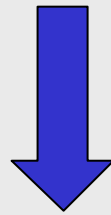
$$G(r,s) = \frac{G_0(r)}{1 + \left(\frac{s}{w_0} \right)^{0.5}} \exp\left((r/r_0 - 1) \left(\frac{s}{w_0} \right)^{0.5} \right)$$

en posant :

$$G_0(r) = \frac{1}{2pk r}, \quad a = \left(\frac{r_e}{r_0} \right)^2 \quad \text{et} \quad w_0 = \frac{a}{r_0^2}$$

Il est important de noter que lorsque le rayon extérieur r_e tend vers l'infini, le transfert $F(r,s)$ tend vers 1, réduisant bien l'expression de $H(r,s)$ à celle obtenue lors de l'étude d'un milieu semi-infini sphérique, soit :

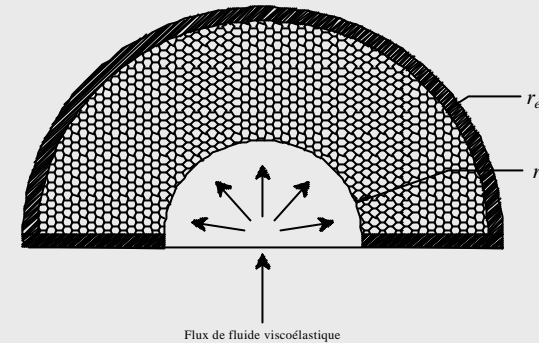
$$\lim_{r_e \rightarrow \infty} F(r,s) \rightarrow 1$$



$$H(r,s) = G(r,s) = \frac{G_0(r)}{1 + \left(\frac{s}{w_0}\right)^{0.5}} \exp\left((r/r_0 - 1) \left(\frac{s}{w_0}\right)^{0.5}\right)$$

Analyse de l'impédance d'entrée ($r = r_0$)

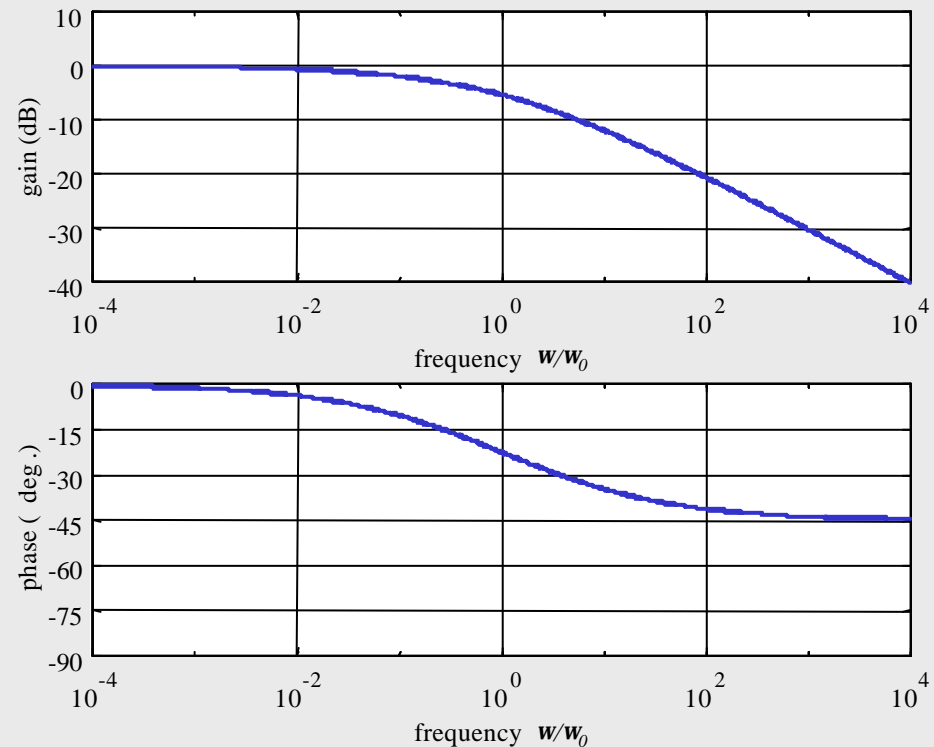
$$H(r = r_0, s) = \frac{\bar{P}(r_0, s)}{\bar{q}(s)} = F(r_0, s) G(r_0, s)$$



A l'entrée du massif poreux, c'est-à-dire en $r = r_0$, l'expression de $G(r, s)$ se réduit à

$$G(r_0, s) = \frac{G_0(r_0)}{1 + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{0.5}}$$

$$G^*(r_0, s) = \frac{G(r_0, s)}{G_0(r_0)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{0.5}}$$



Quant à $F(r,s)$, toujours en $r = r_0$ et après réduction au même dénominateur, son expression est donnée par

$$F(r_0, s) = \frac{\left(\sqrt{a} \frac{s}{w_0} + (\sqrt{a} - 1) \left(\frac{s}{w_0} \right)^{0.5} - 1 \right) e^{2(\sqrt{a}-1) \left(\frac{s}{w_0} \right)^{0.5}} + \sqrt{a} \frac{s}{w_0} + (\sqrt{a} + 1) \left(\frac{s}{w_0} \right)^{0.5} + 1}{\left(\sqrt{a} \frac{s}{w_0} + (\sqrt{a} - 1) \left(\frac{s}{w_0} \right)^{0.5} - 1 \right) e^{2(\sqrt{a}-1) \left(\frac{s}{w_0} \right)^{0.5}} - \sqrt{a} \frac{s}{w_0} + (\sqrt{a} - 1) \left(\frac{s}{w_0} \right)^{0.5} + 1}$$

L'utilisation du développement en séries à l'ordre L de la fonction exponentielle permet de réécrire $F(r_0, s)$ sous la forme

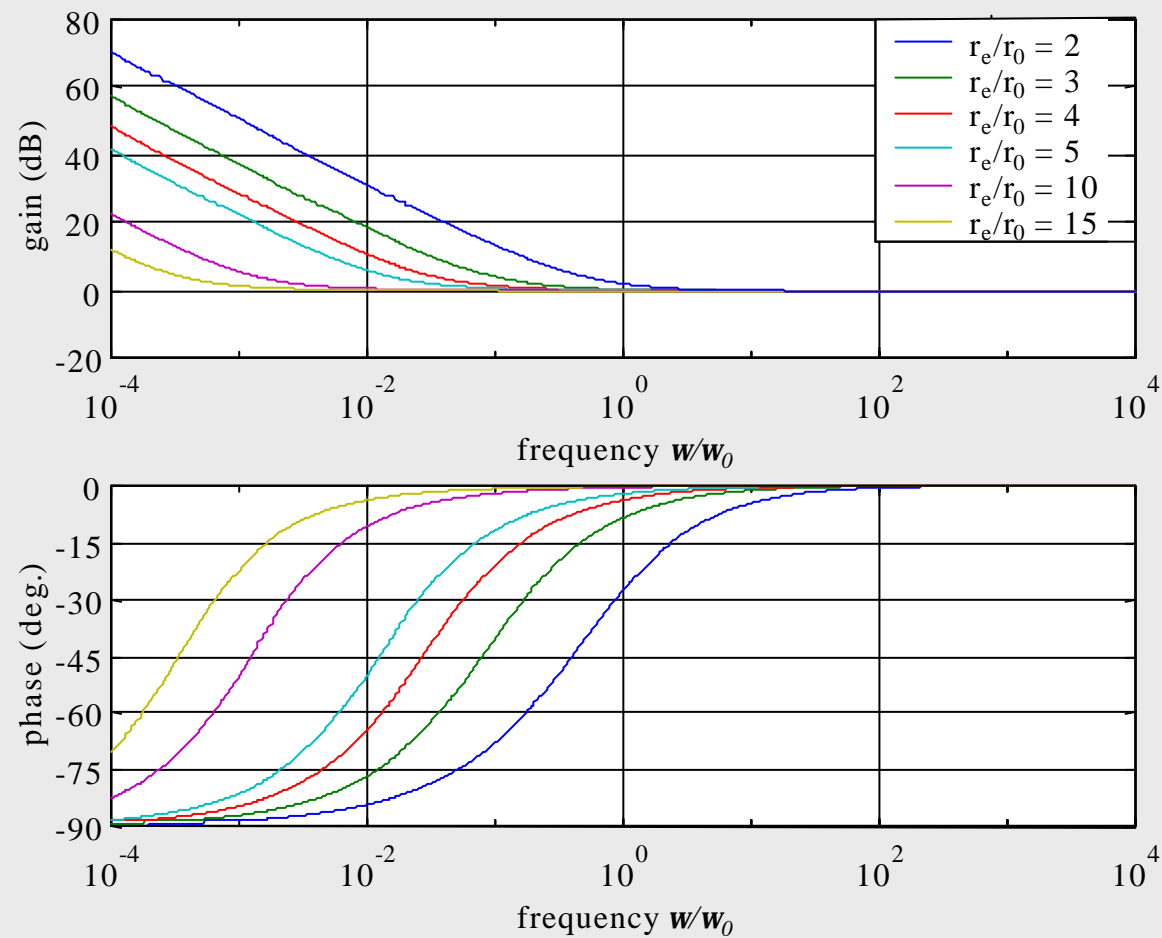
$$F(r_0, s) = \frac{w_0}{s} \frac{1 + \sum_{i=2}^{2L} d_i \left(\frac{s}{w_0} \right)^{(i-1)/2}}{\sum_{i=3}^{2L} d_i \left(\frac{s}{w_0} \right)^{(i-3)/2}}$$

où les d_i sont des paramètres qui dépendent exclusivement de a .

$$F(r_0, s) = \frac{\mathbf{w}_0}{s} \frac{1 + \sum_{i=2}^{2L} d_i \left(\frac{s}{\mathbf{w}_0} \right)^{(i-1)/2}}{\sum_{i=3}^{2L} d_i \left(\frac{s}{\mathbf{w}_0} \right)^{(i-3)/2}}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(r_0, s) \rightarrow \frac{\mathbf{w}_0}{s} \frac{1}{d_3}$$

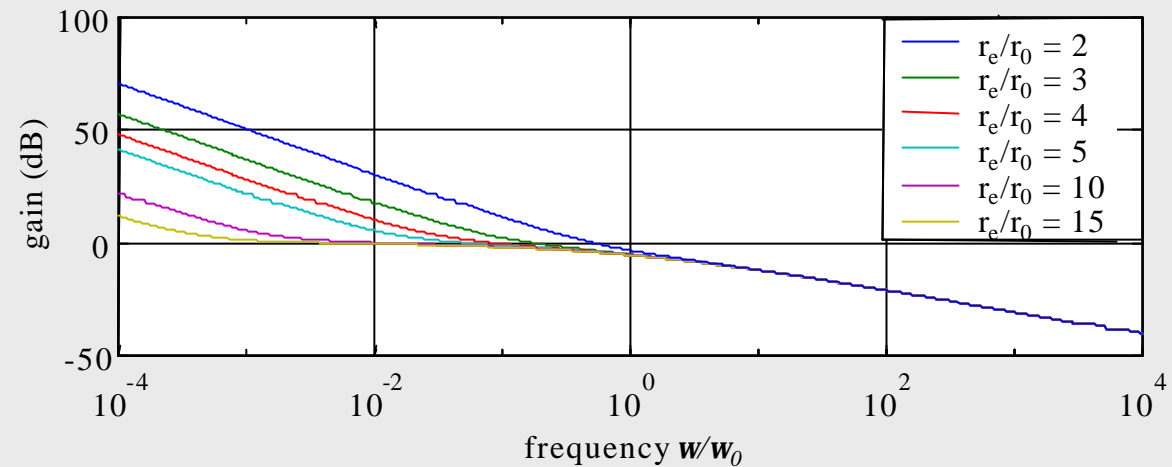
$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(r_0, s) \rightarrow 1$$



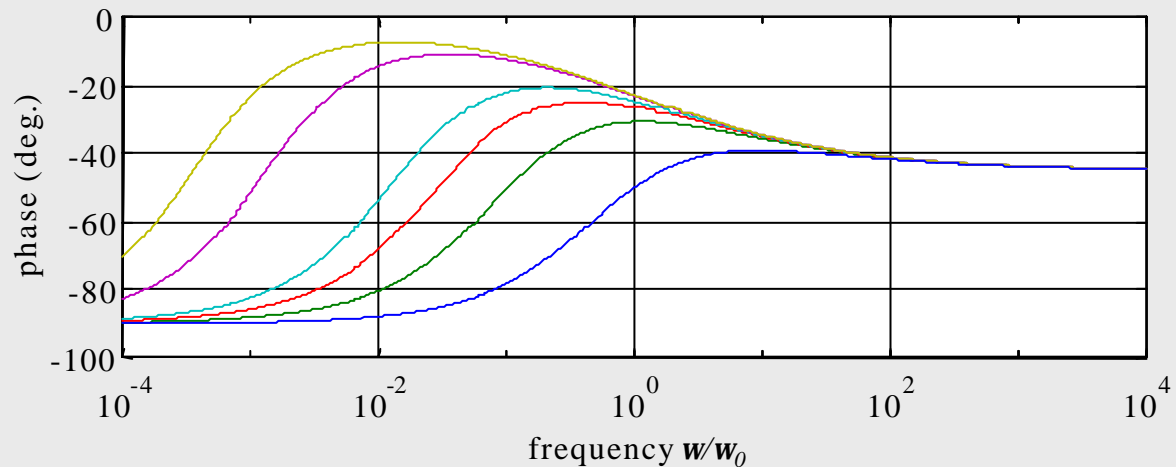
$$H(r=r_0, s) = \frac{\bar{P}(r_0, s)}{\bar{q}(s)} = F(r_0, s) G(r_0, s)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(r_0, s) = \lim_{s \rightarrow 0} F(r_0, s) \rightarrow \frac{w_0}{s} \frac{1}{d_3}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(r_0, s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(r_0, s) \rightarrow \left(\frac{w_0}{s} \right)^{0.5}$$



$$H^*(r_0, s) = F(r_0, s) G^*(r_0, s)$$



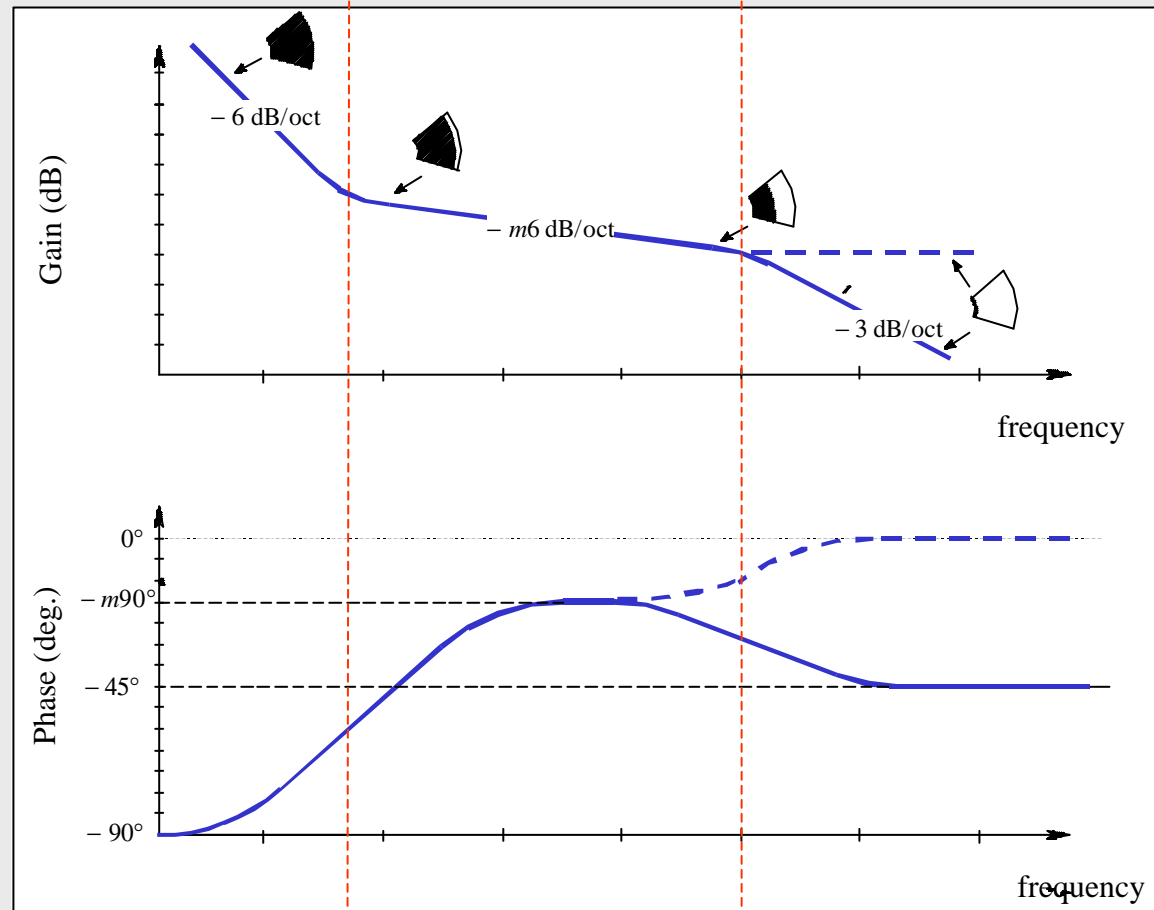
Diagrammes de Bode de $H^*(r_0, s)$ pour différentes valeurs de r_e/r_0

4 - Conclusion

Basses fréquences

Moyennes fréquences

Hautes fréquences



Diagrammes de Bode de l'impédance $Z_e(j\omega)$ obtenue avec le modèle issu de la discrétisation (- - - -) et avec le modèle issu des EDP (—)

Perspectives

Etude de l'influence de la géométrie et des conditions aux limites pour d'autres formes de milieux finis.

Etude d'une équation de diffusion d'ordre non entier de la forme :

$$\frac{2}{r} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial r^2} = \frac{c_0}{k} \frac{\partial^m}{\partial t^m} P(r,t)$$

$$\text{avec } m \in]0 ; 1]$$

[R. Gorenflo et al., 2002]

[O. P. Agrawal, 2002]