

Modélisation et identification des interfaces de diffusion: comparaison de deux modèles fractionnaires en fonction de la géométrie du système

Amel BENCHELLAL, Thierry POINOT, Jean-Claude TRIGEASSOU

Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle

Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers

40, Ave du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex - FRANCE

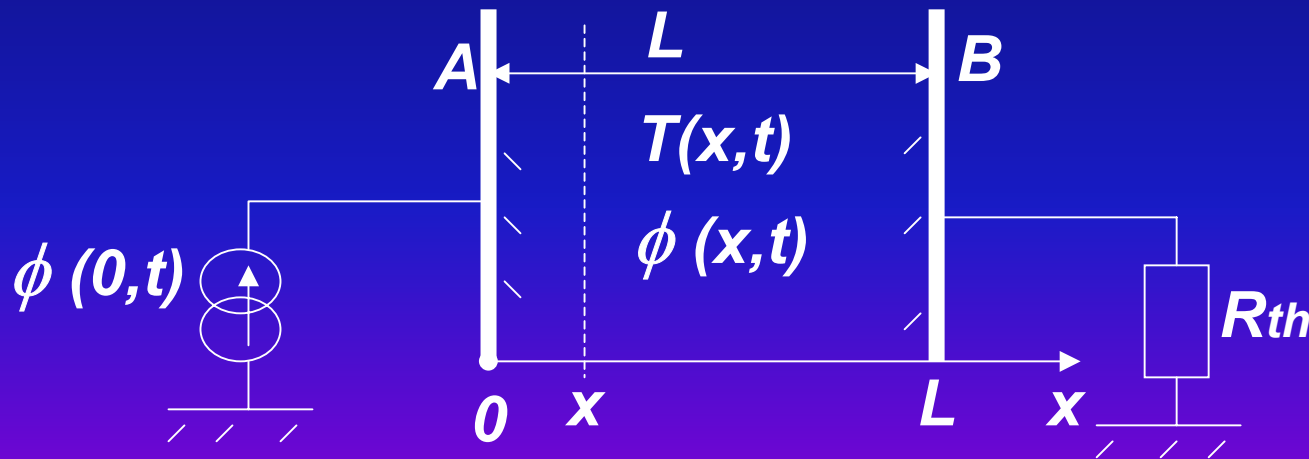
Université de Poitiers

Objectif

Amélioration de l'approximation des interfaces de diffusion par modèles fractionnaires

Position du problème

Le système de diffusion de chaleur traité est celui d'un mur, représenté selon le schéma bloc suivant:



Tel que :

ϕ : le flux de chaleur

$T(0,t)$: la température à l'extrémité A

R_{th} : résistance thermique *entre le mur et l'air*

La relation entre $T(x,t)$ et $\phi(x,t)$ est gérée par l'équation suivante:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\phi(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Avec

α : coefficient de diffusivité thermique

λ : conductivité thermique

ρ : masse volumique

c : chaleur massique

En appliquant la transformée de Laplace entre la sortie $T(0, t)$ et l'entrée $\phi(0, t)$ de notre modèle, le transfert s'écrit:

$$H(s) = \frac{\lambda \cdot R_{th} \cdot \sqrt{\frac{s}{\alpha}} + 1 + (\lambda \cdot R_{th} \cdot \sqrt{\frac{s}{\alpha}} - 1) e^{-\frac{s}{\alpha} L^2}}{\lambda \cdot \sqrt{\frac{s}{\alpha}} (\lambda \cdot R_{th} \cdot \sqrt{\frac{s}{\alpha}} + 1 - (\lambda \cdot R_{th} \cdot \sqrt{\frac{s}{\alpha}} - 1) e^{-\frac{s}{\alpha} L^2})}$$

lorsque ω tend vers l'infini,

$$H(s) \approx \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda s^{0.5}}$$

Différentes approches ont été proposées pour modéliser ce type de système . En ce qui concerne les travaux du LAll, un premier modèle a été proposé, son transfert est donné par:

$$H_1(s) = \frac{b_0}{a_0 + s^n}$$

Où $G = \frac{b_0}{a_0}$ (prise en compte de R_{th})

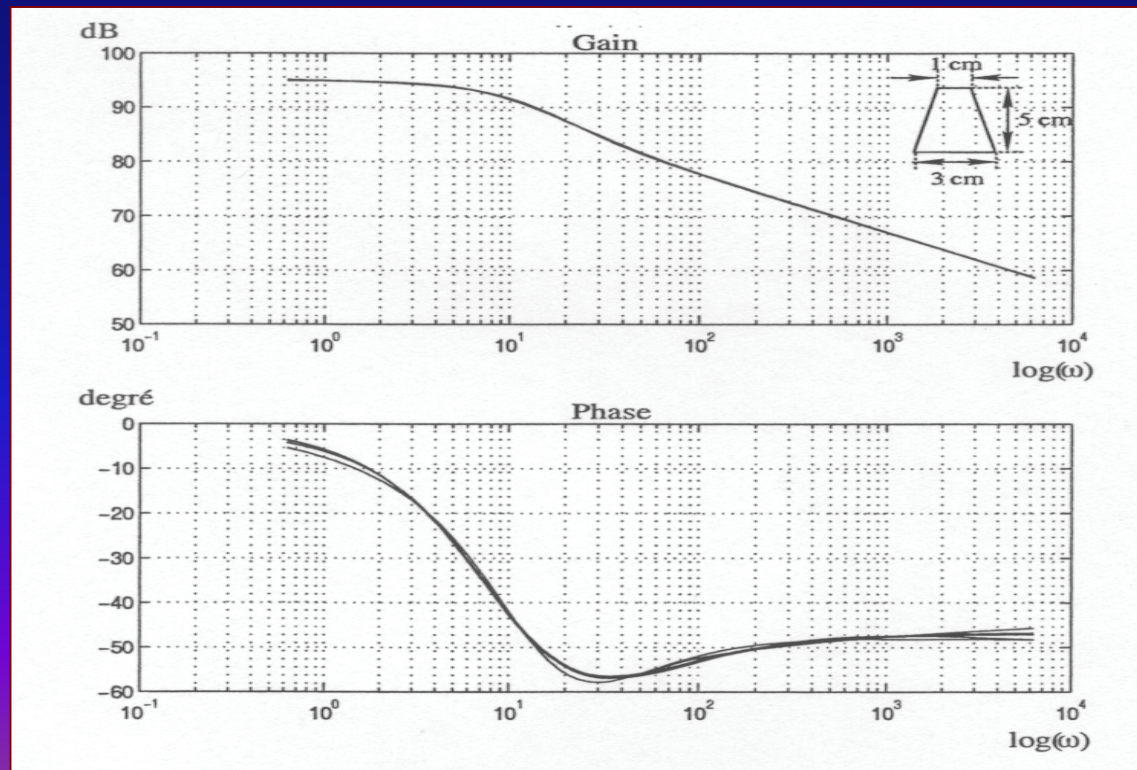
$0 < n < 1$ s'adapte au système

Défaut de cette approximation

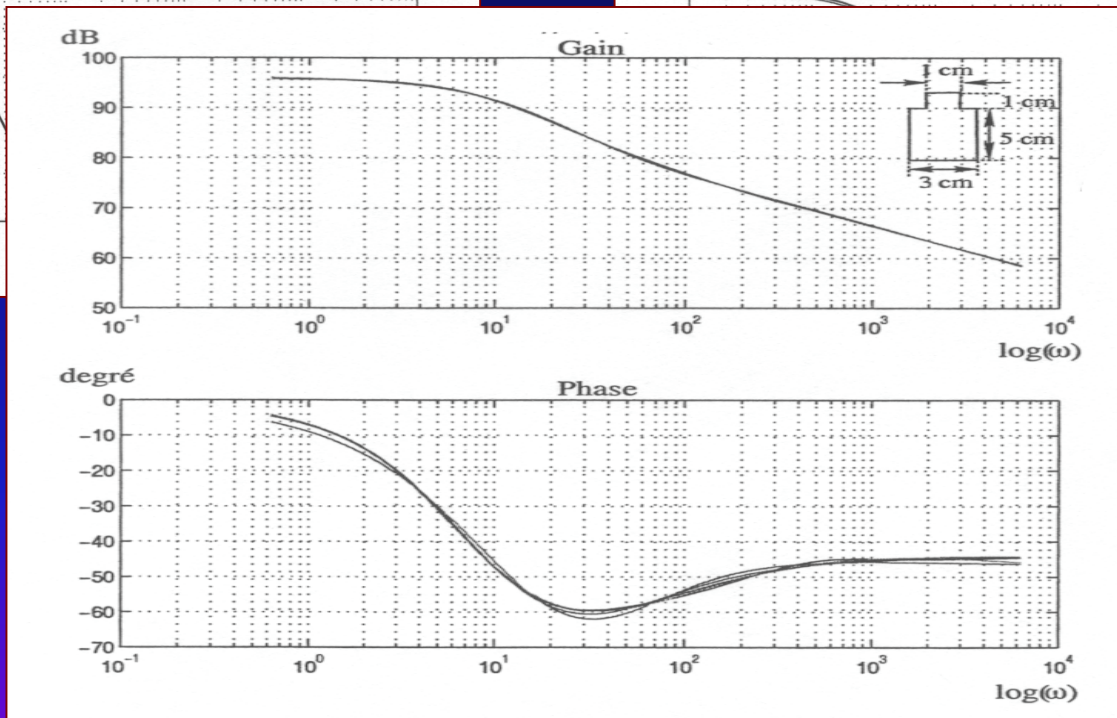
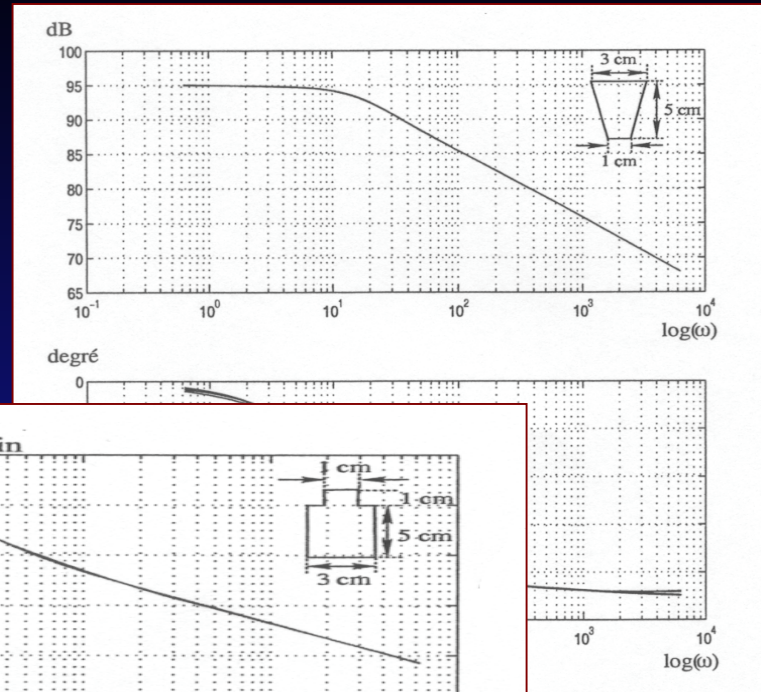
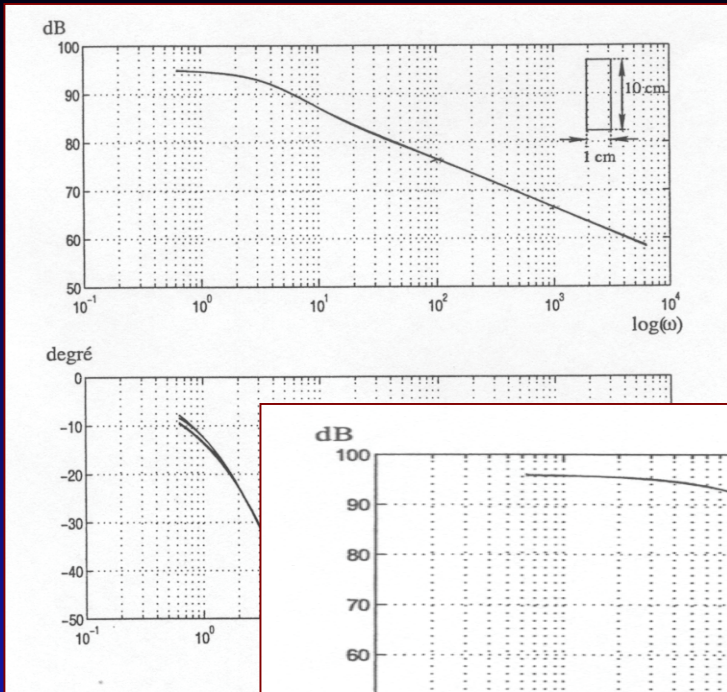
lorsque ω tends vers l'infini, n vaut toujours 0.5

Elle prend en compte la géométrie du système mais pas la physique.

Exemples



Introduction



Il faut donc améliorer l'approximation à fréquence finie, pour cela une deuxième approche est proposée, qui permettra d'approcher le système de diffusion de chaleur à fréquence moyenne en respectant $n \longrightarrow 0.5$ lorsque $\omega \longrightarrow \infty$

Soit

$$H_2(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{n_1}}{a_0 + a_1 s^{n_1} + s^{n_1+n_2}} \quad \text{avec} \quad n_2 = 0.5$$

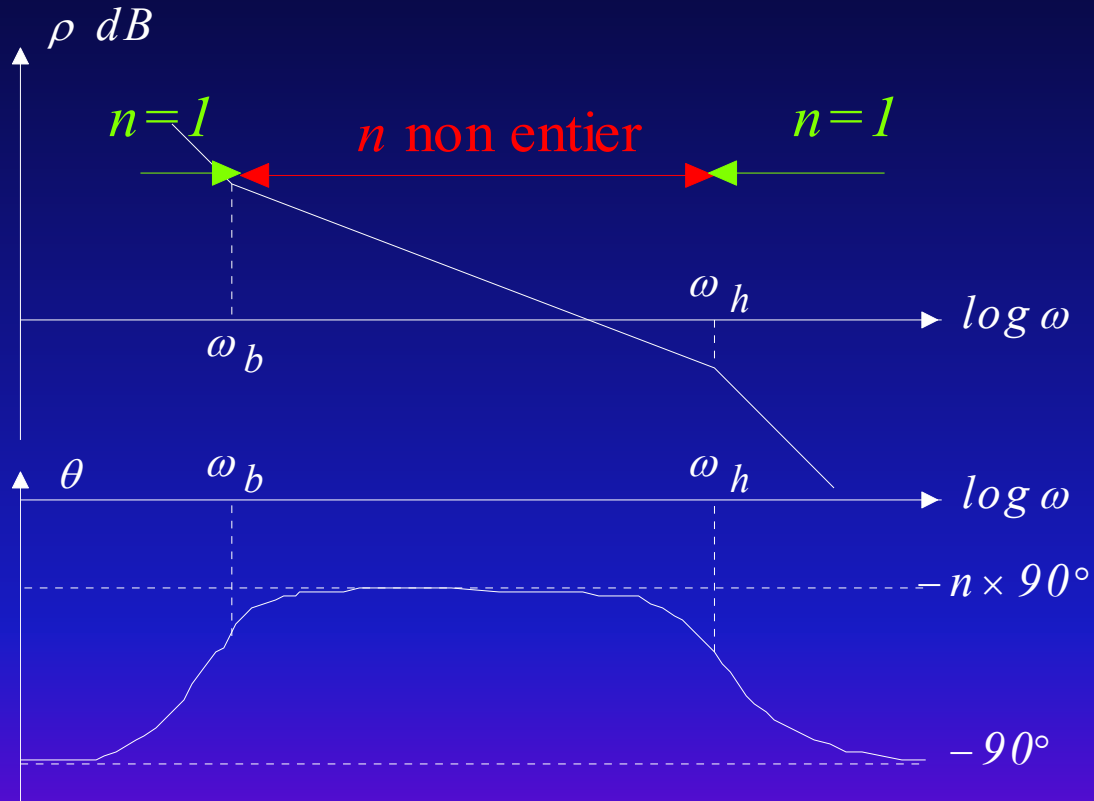
En imposant n_2 , et en ajustant n_1 et les autres paramètres, on peut améliorer la capacité d'approximation à fréquences intermédiaire en respectant $n \longrightarrow 0.5$ lorsque $\omega \longrightarrow \infty$

Puisque (ordre relatif $n_1+n_2-n_1=0.5$)

Plan de l'exposé

- ✓ 1 - **Rappel sur les intégrateurs fractionnaires**
- 2 - **Méthode d'identification**
- 3 - **Simulation numérique par différences finies**
- 4 - **Conclusion**

Le diagramme de Bode de l'intégrateur :



Représentation analytique de l'intégrateur d'ordre non entier

$$I_n(s) = \frac{G_n}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^n \equiv \frac{G_n}{s} \prod_{i=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega'_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}}$$

$$\begin{cases} \omega_i = \alpha \omega'_i & \text{avec } \alpha > 1 \\ \omega'_{i+1} = \eta \omega_i & \text{avec } \eta > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad n = 1 - \frac{\log \alpha}{\log \alpha \eta}$$

Intégrateur d'ordre non entier :

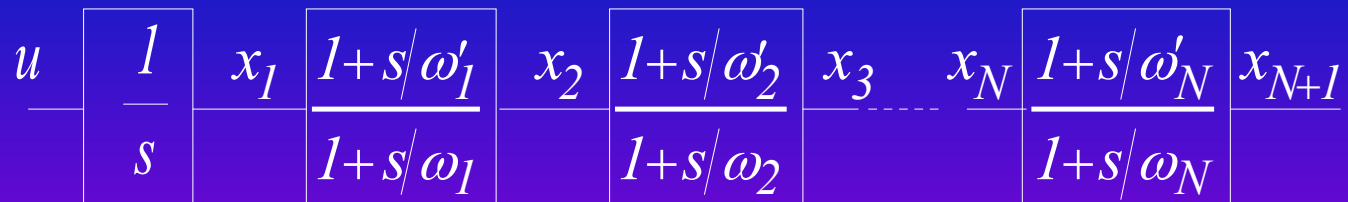


Schéma bloc de $I_n(s)$

Représentation d'état de l'opérateur

On obtient

$$M_I \dot{\underline{x}}_I = A_I \underline{x}_I + \underline{B}_I u$$

$$M_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \omega_1 & -\omega_1 & & & \vdots \\ 0 & \omega_2 & -\omega_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_N & -\omega_N \end{bmatrix}$$

$$B_I = \begin{bmatrix} Gn \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rappel sur les intégrateurs fractionnaires

Ou de manière équivalente :

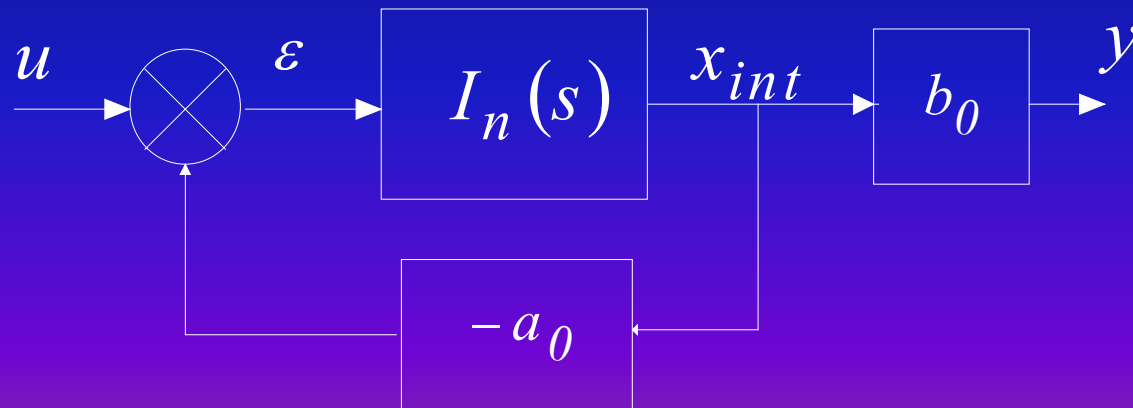
avec

$$\dot{\underline{x}}_I = \underline{A}_I^* \underline{x}_I + \underline{B}_I^* u$$

$$\begin{cases} \underline{A}_I^* = \underline{M}_I^{-1} \underline{A}_I \\ \underline{B}_I^* = \underline{M}_I^{-1} \underline{B}_I \end{cases}$$

Système d'ordre non entier :

Soit le système $H_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + s^n}$ (où $0 < n < 1$)



Représentation d'état d'un système non entier

On obtient la représentation d'état globale :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u \\ y = \underline{C}^T \underline{x} \end{cases}$$

avec

$$\underline{A} = \underline{A}_I^* + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \underline{B}_I^*, \quad \underline{C}^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad b_0]$$

Représentation d'état du système non entier proposé

Soit le système suivant :

$$H_2(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{n_1}}{a_0 + a_1 s^{n_1} + s^{n_1+n_2}}, \quad n_2 = 0.5$$

Le modèle d'état correspondant est le suivant :

$$A = \begin{bmatrix} A^*_{I_1} & B^*_{I_1} C^T_{I_2} \\ -B^*_{I_2} a_0 C^T_{I_1} & A^*_{I_2} - B^*_{I_2} a_1 C^T_{I_2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ B^*_{I_2} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} b_0 C^T_{I_1} & b_1 C^T_{I_2} \end{bmatrix}$$

Plan de l'exposé

1 - Rappel sur les intégrateurs fractionnaires

✓ 2 - Méthode d'identification

3 - Simulation numérique par différences finies

4 - Conclusion

Identification par erreur de sortie

Considérons le modèle d'état global du système :

$$\underline{\dot{x}} = A(\underline{\theta}) \underline{x} + B(\underline{\theta}) u$$

$$y = \underline{C}^T(\underline{\theta}) \underline{x} + D(\underline{\theta}) u$$

On définit l'erreur de sortie

$$\varepsilon_k = y_k^* - \hat{y}_k(u, \hat{\underline{\theta}})$$

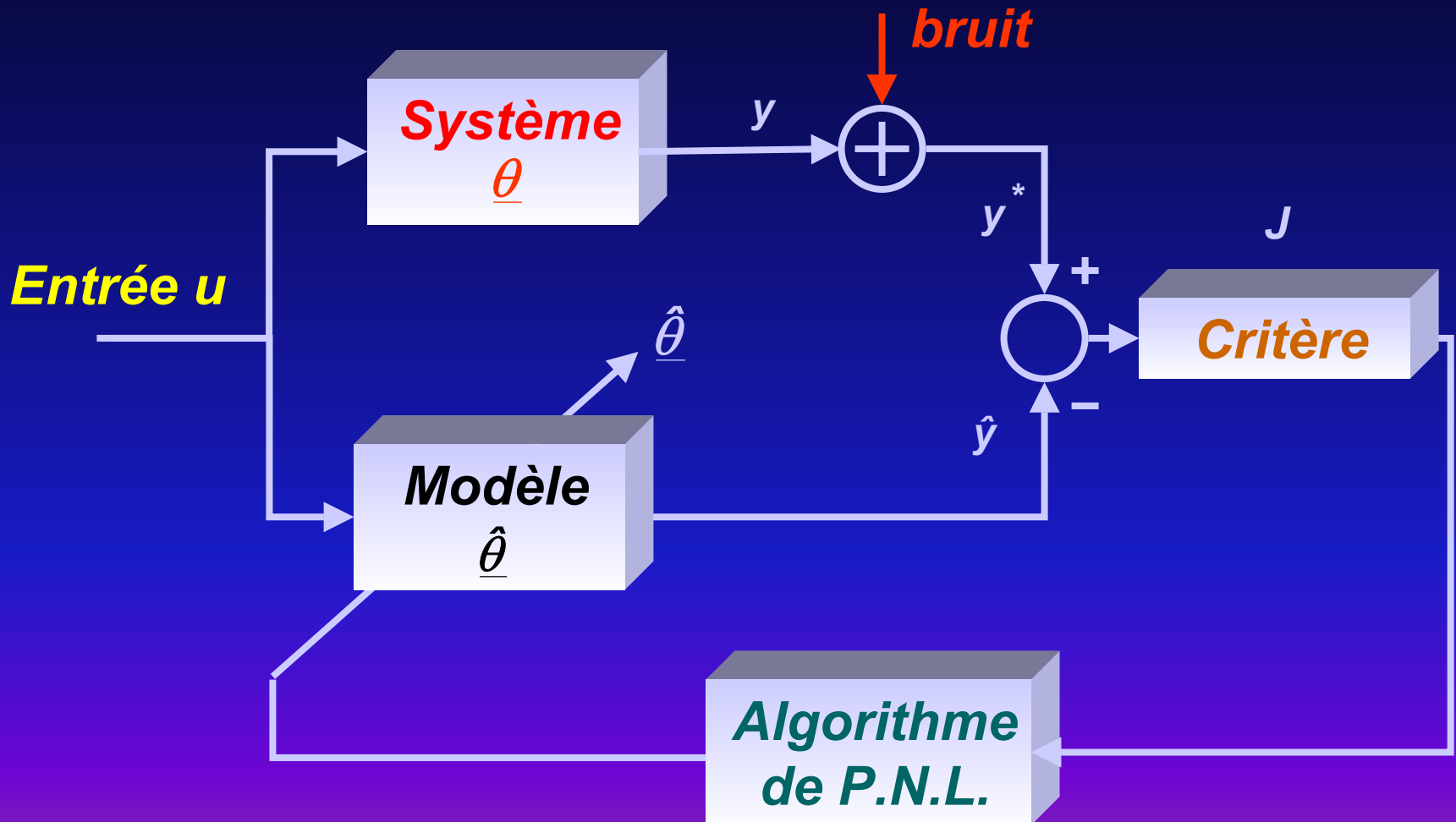
mesure : $y_k^* = y_k + b_k$

modèle

On cherche $\hat{\underline{\theta}}$ qui minimise :

$$J = \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^2$$

Principe des algorithmes à erreur de sortie



Identification par erreur de sortie

Algorithme d'identification

$$\underline{\theta}_{i+1} = \underline{\theta}_i - \left\{ [J''_{\theta\theta} + \lambda I]^{-1} \underline{J}'_{\theta} \right\}_{\hat{\theta} = \underline{\theta}_i}$$

avec

$$\underline{J}'_{\theta} = -2 \sum_{k=1}^K \varepsilon_k \underline{\sigma}_{k,\theta_i} \quad : \text{gradient}$$

$$J''_{\theta\theta} \approx 2 \sum_{k=1}^K \underline{\sigma}_{k,\theta_i} \underline{\sigma}_{k,\theta_i}^T \quad : \text{hessien}$$

$$\underline{\sigma}_{k,\theta_i} = \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \underline{\theta}_i} \quad : \text{fonction de sensibilité}$$

λ : paramètre de contrôle

Plan de l'exposé

1 - Rappel sur les intégrateurs fractionnaires

2 - Méthode d'identification

✓ 3 - Simulation numérique par différences finies

4 - Conclusion

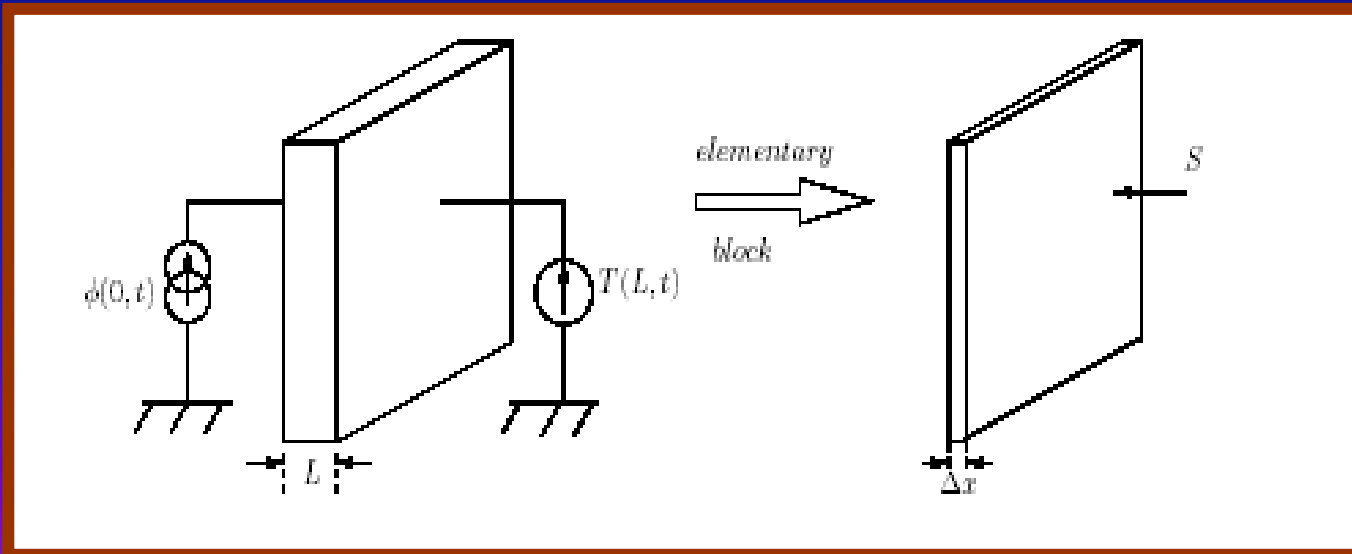
1/- Simulation numérique du mur

Pour résoudre numériquement l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

On discrétise spatialement le mur avec

$$\begin{cases} L = I \Delta x \\ x_i = i \Delta x \end{cases}$$



Chaque tranche, de section S , possède :

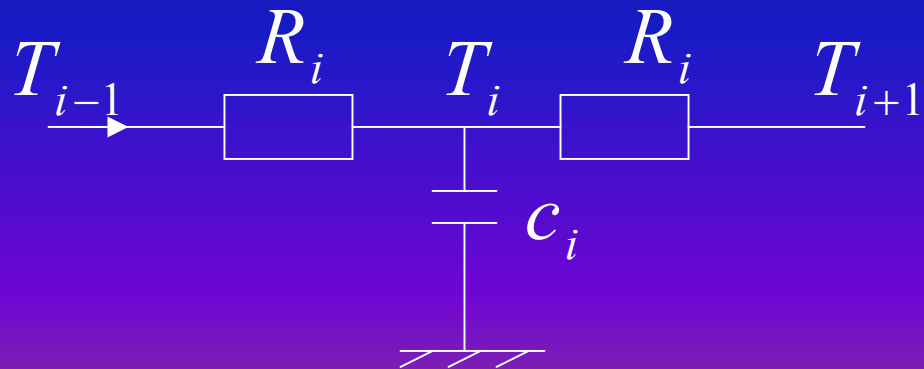
- une résistance thermique

$$R_i = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{s}$$

- une capacité thermique

$$C_i = \rho c s \Delta x$$

Ce qui conduit pour l'abscisse $x_i = i\Delta x$:



$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{R_i C_i} (T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1})$$

avec

$$R_i C_i = \frac{\rho c}{\lambda} \Delta x^2$$

Conditions aux limites:

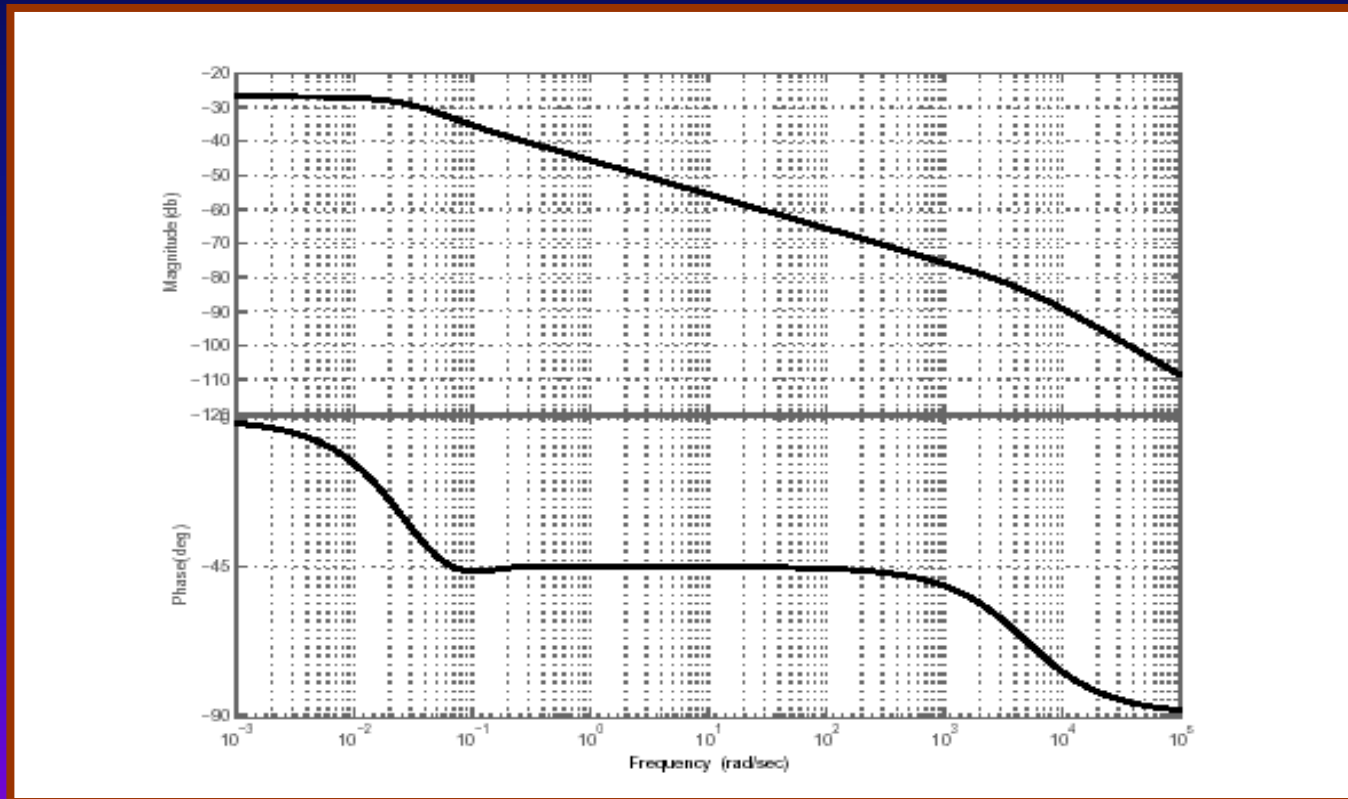
en A : on impose $\phi(0,t)$

en B : on impose $T(L,t)$

En pratique: $T(L,t) = cte$

$\left. \begin{array}{l} \Phi(0,t) \text{ est l'excitation} \\ T(0,t) \text{ est la sortie} \end{array} \right\} \text{ à l'interface A}$

On obtient ainsi un système de I équations différentielles, l'analyse harmonique, pour $I = 300$.

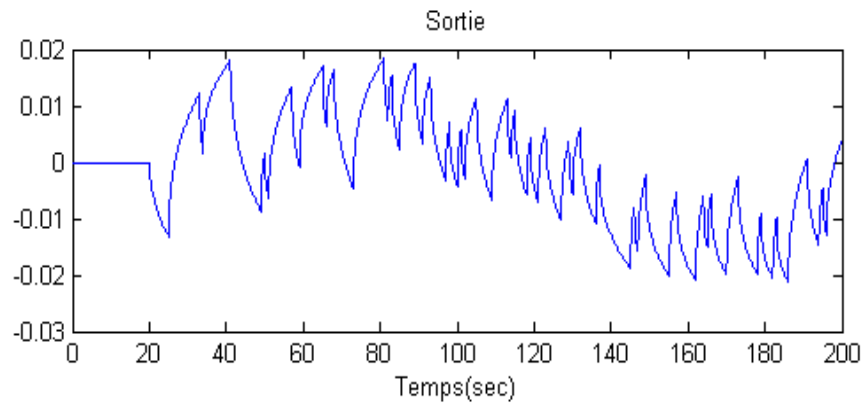
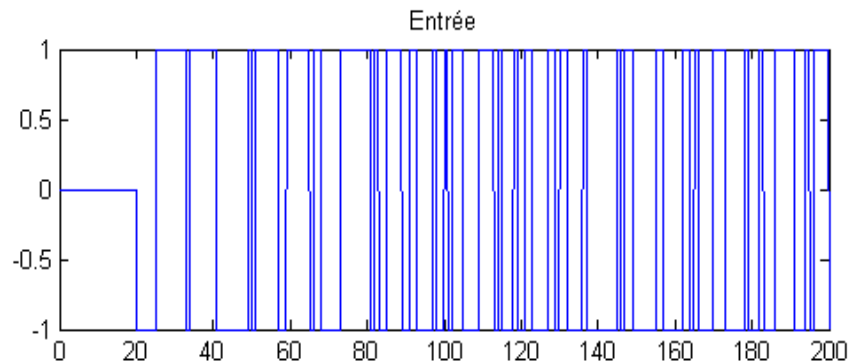
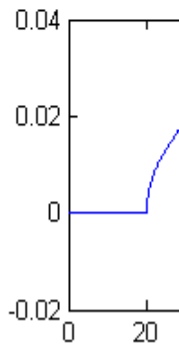
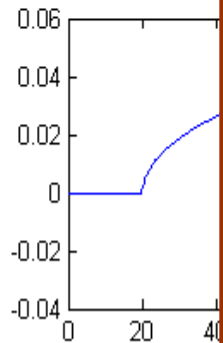
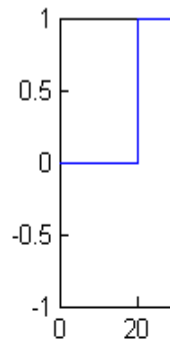
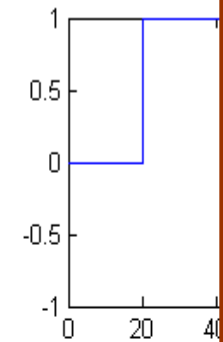


Réponses temporelles

Excitation

Excitation

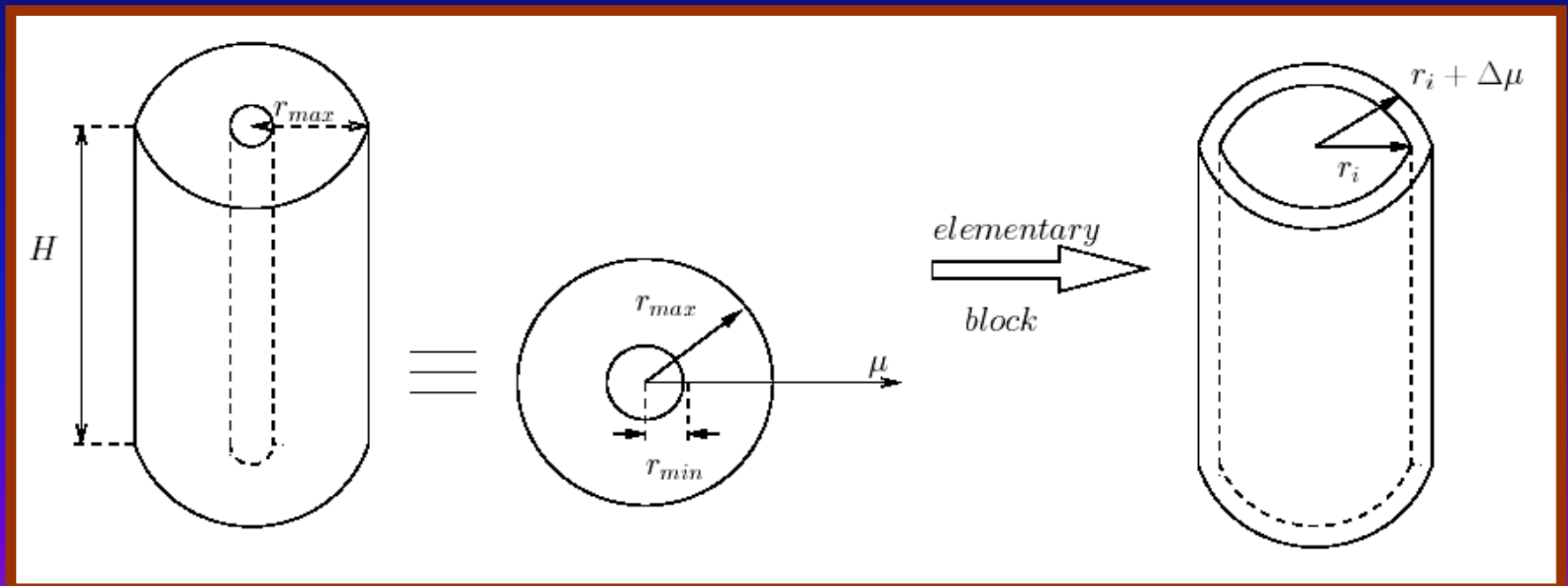
Excitation riche



2/- Simulation numérique du cylindre

On considère un cylindre de rayon r_{max} , de longueur H , on

discrétise spatialement le cylindre avec

$$\begin{cases} L = I \Delta \mu \\ \mu_i = i \Delta \mu \\ L = r_{max} - r_{min} \end{cases}$$


- r_{\max} : rayon maximal lorsque $i = I$
- r_{\min} : rayon minimal lorsque $i = 0$

Chaque tube élémentaire, possède :

- une résistance thermique

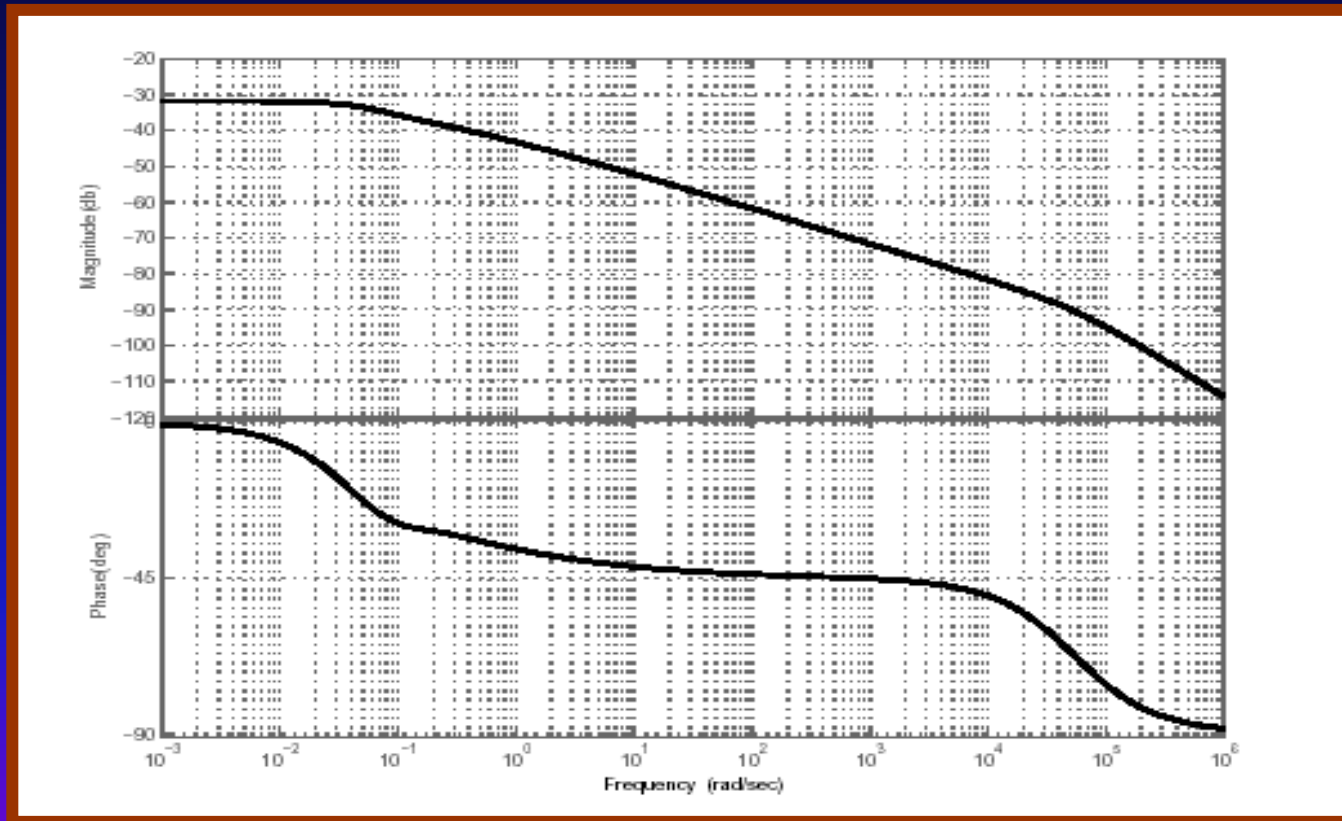
$$R_i = \frac{1}{2\pi\lambda H}$$

- une capacité thermique

$$C_i = 2\pi\rho cH\Delta\mu^2$$

Simulation numérique par différences finies

On obtient ainsi un système de I équations différentielles.
L'analyse harmonique de ce modèle, avec $I = 1000$.

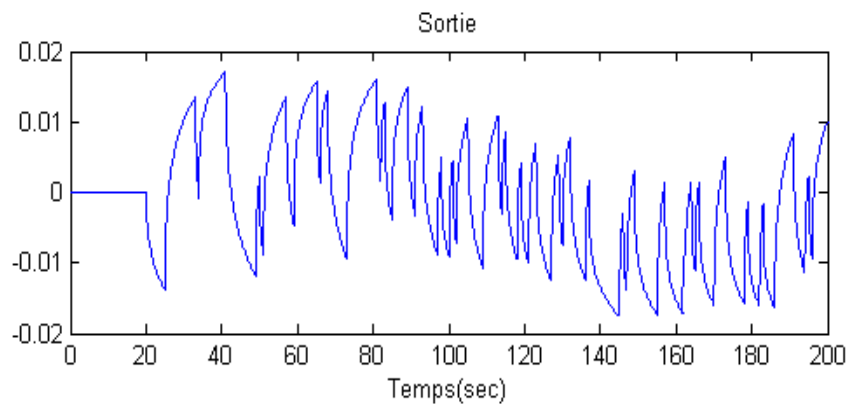
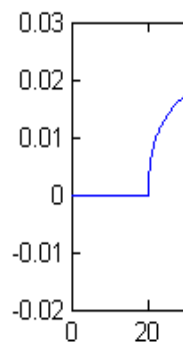
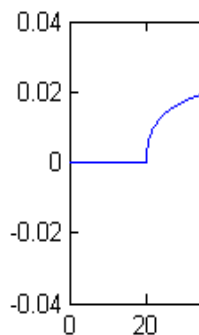
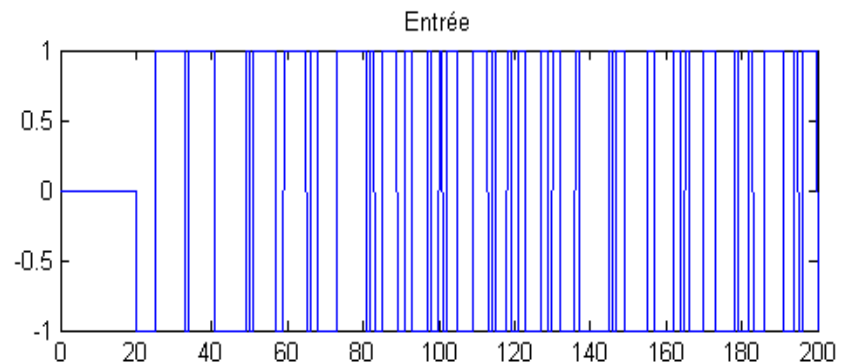
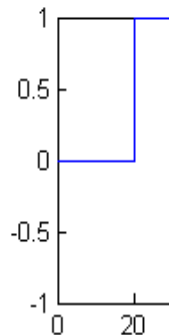
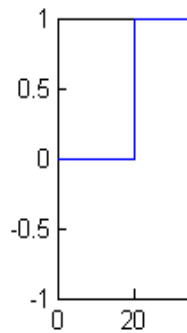


Réponses temporelles

Excitation

Excitation

Excitation riche

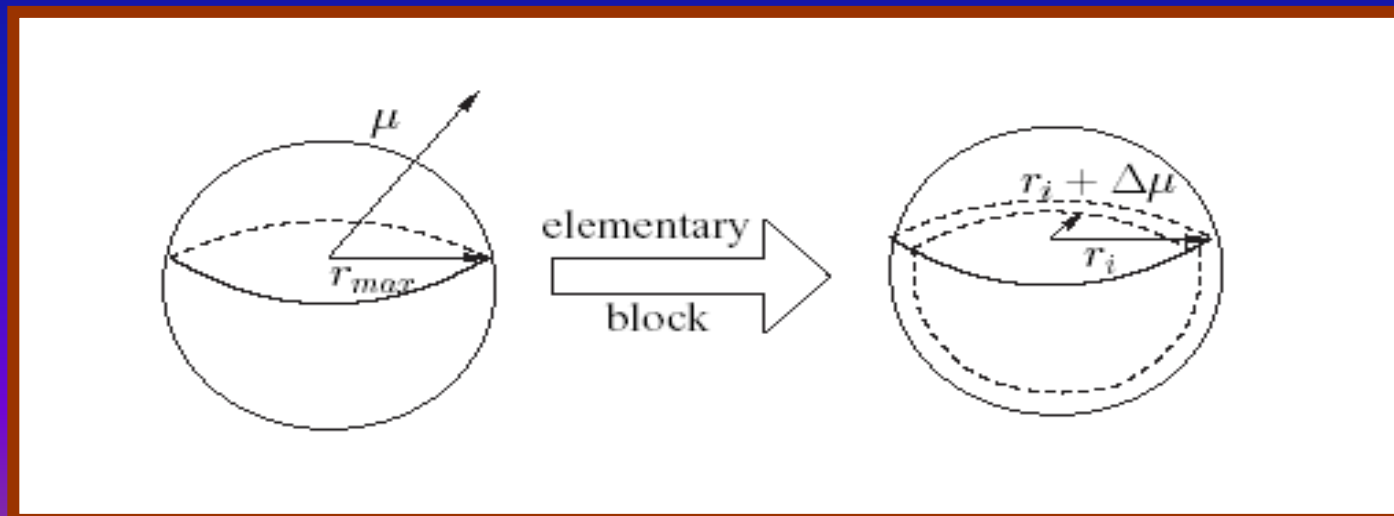


3/- Simulation numérique de la sphère

On considère une sphère de rayon r_{\max} , on discrétise la sphère en I volumes élémentaires, d'épaisseur $\Delta\mu$

avec

$$\begin{cases} L = I \Delta \mu \\ \mu_i = i \Delta \mu \\ L = r_{\max} - r_{\min} \end{cases}$$



Chaque couche, possède :

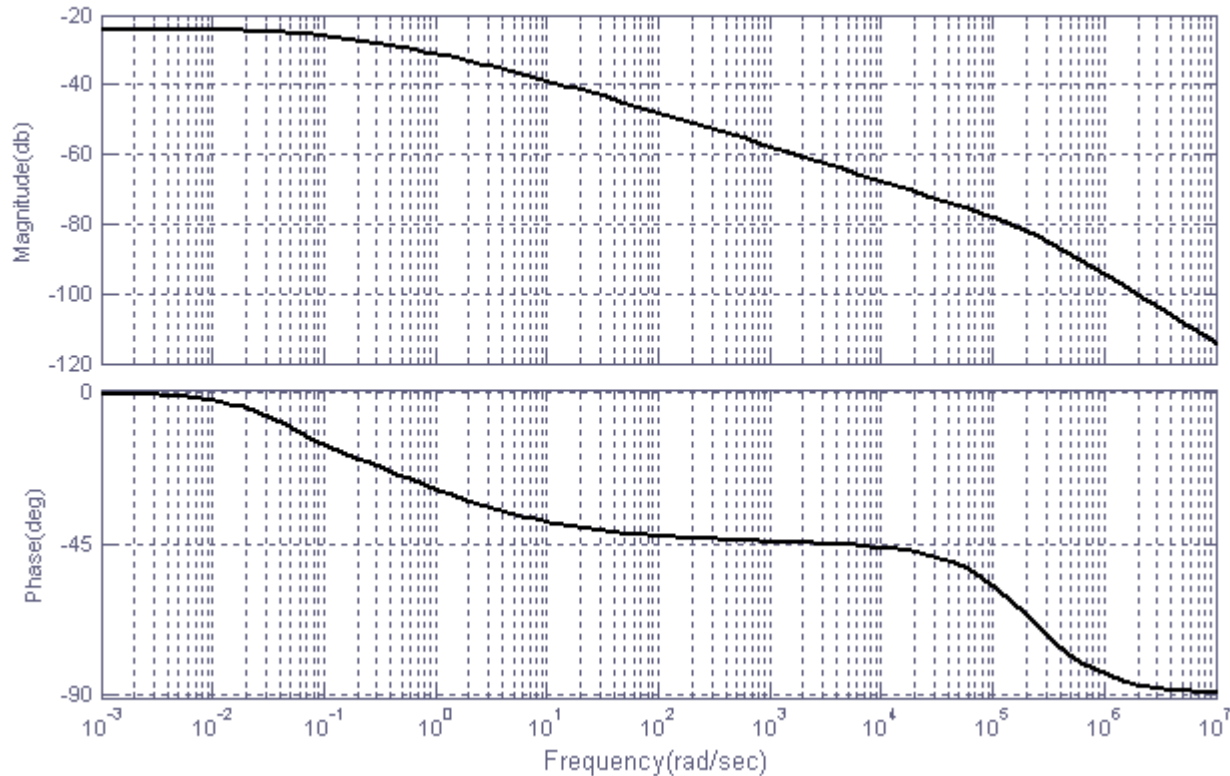
- une résistance thermique

$$R_i = \frac{1}{4\pi\lambda\Delta\mu}$$

- une capacité thermique

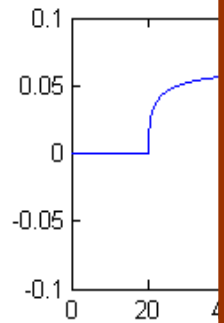
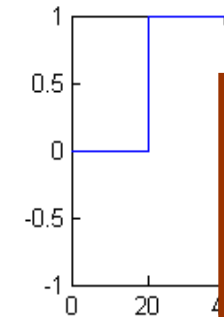
$$C_i = 4\pi\rho cH\Delta\mu^3$$

On obtient ainsi un système de I équations différentielles.
L'analyse harmonique de ce modèle, avec $I = 2000$.

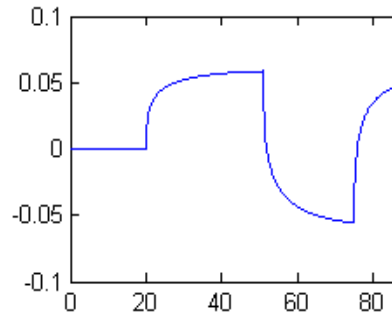
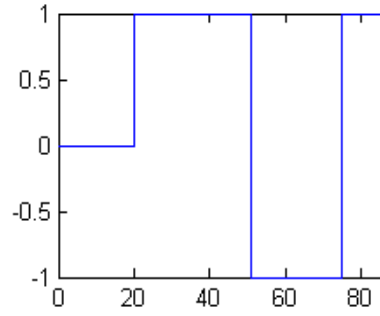


Réponses temporelles

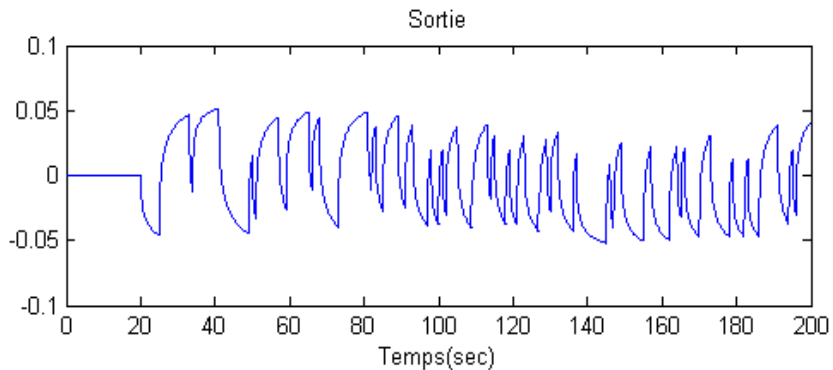
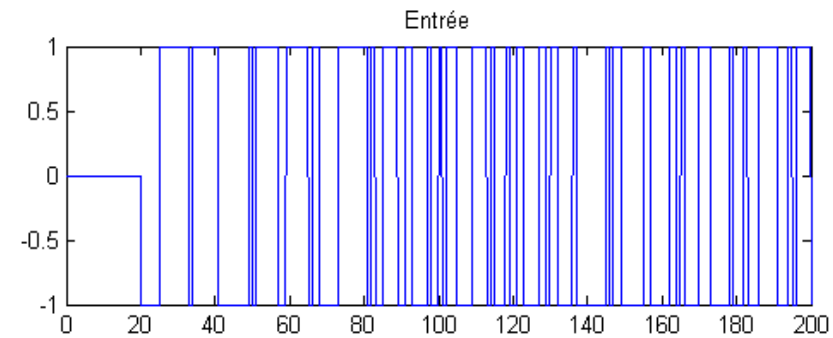
Excitation pauvre



Excitation moyenne



Excitation riche



Cas d'un seul intégrateur

On considère le système d'ordre non entier

$$H_1(s) = \frac{b_0}{a_0 + s^n}, \quad 0 < n < 1$$

On définit les paramètres à estimer

$$\underline{\hat{\theta}}^T = [a_0 \quad b_0 \quad \alpha]$$

Cas de deux intégrateurs

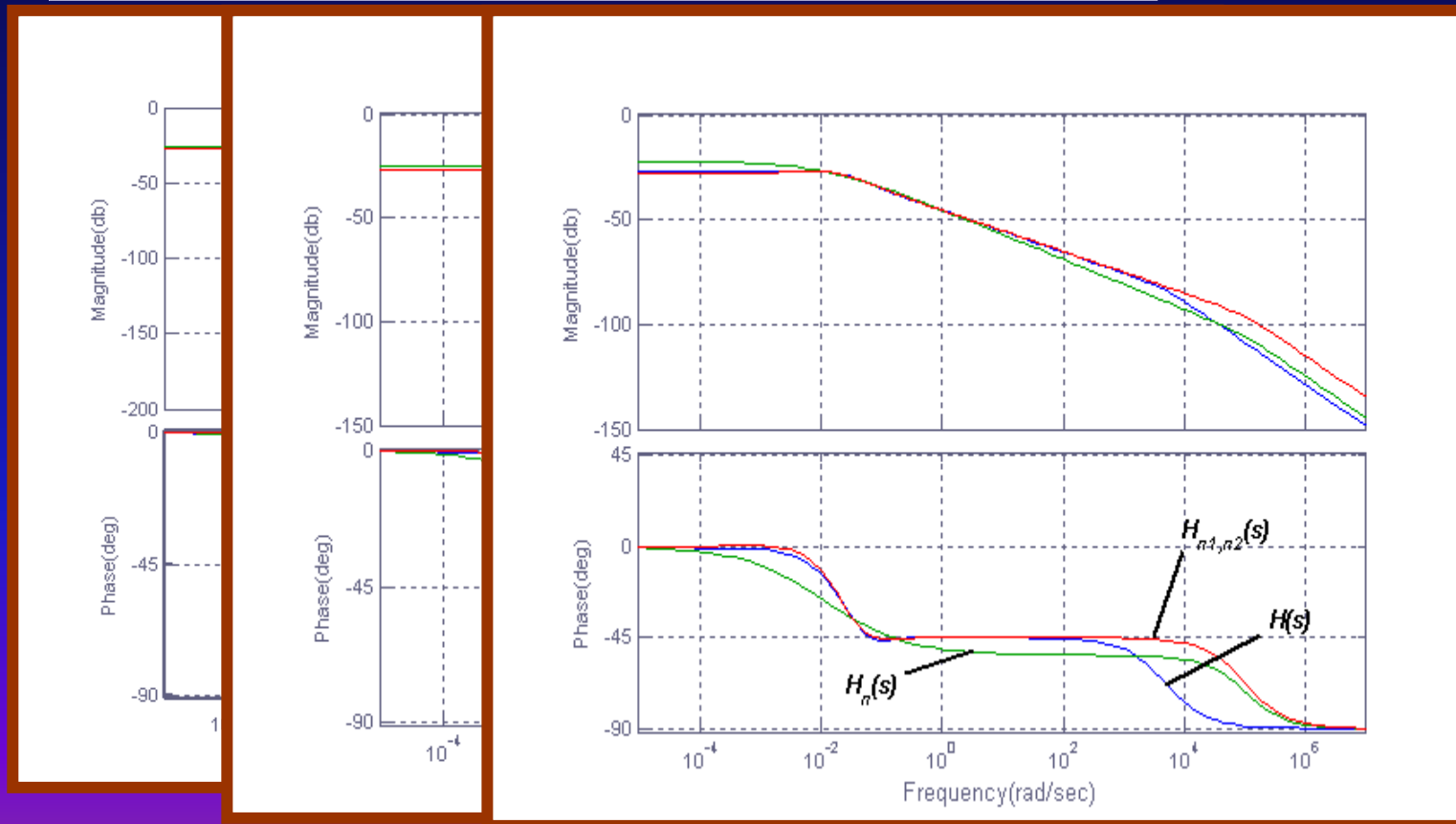
Son transfert est le suivant:

$$H_2(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{n_1}}{a_0 + a_1 s^{n_1} + s^{n_1+n_2}}, \quad n_2 = 0.5$$

$$\underline{\hat{\theta}}^T = [a_0 \quad b_0 \quad a_1 \quad b_1 \quad \alpha_1]$$

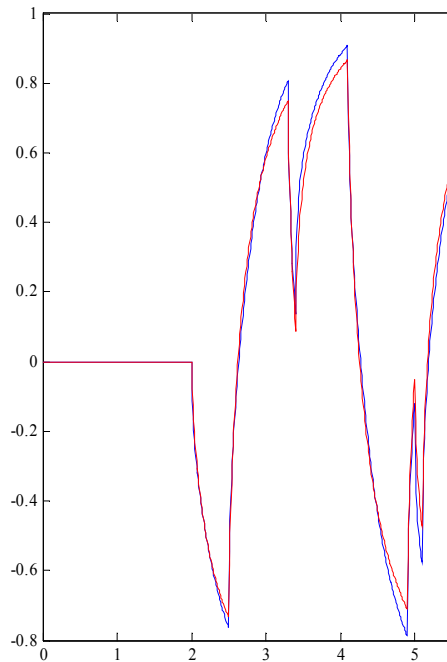
Pour chaque essai, on a identifié $H_n(s)$ et $H_{n_1, n_2}(s)$ et comparé les réponses harmoniques de ces modèles avec la réponse théorique, selon les trois géométries.

Réponses fréquentielles (cas du mur)

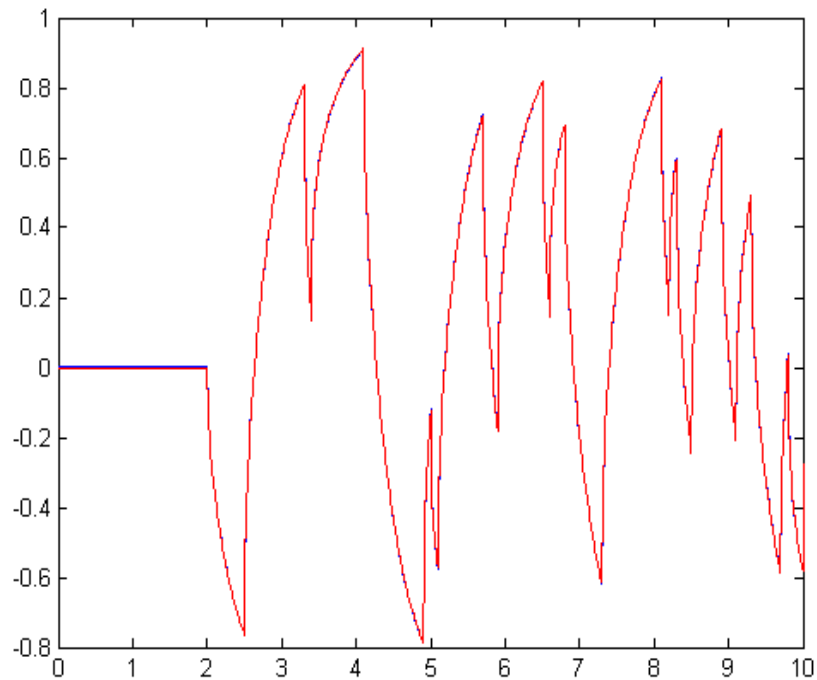


Réponses temporelles (Excitation moyenne)

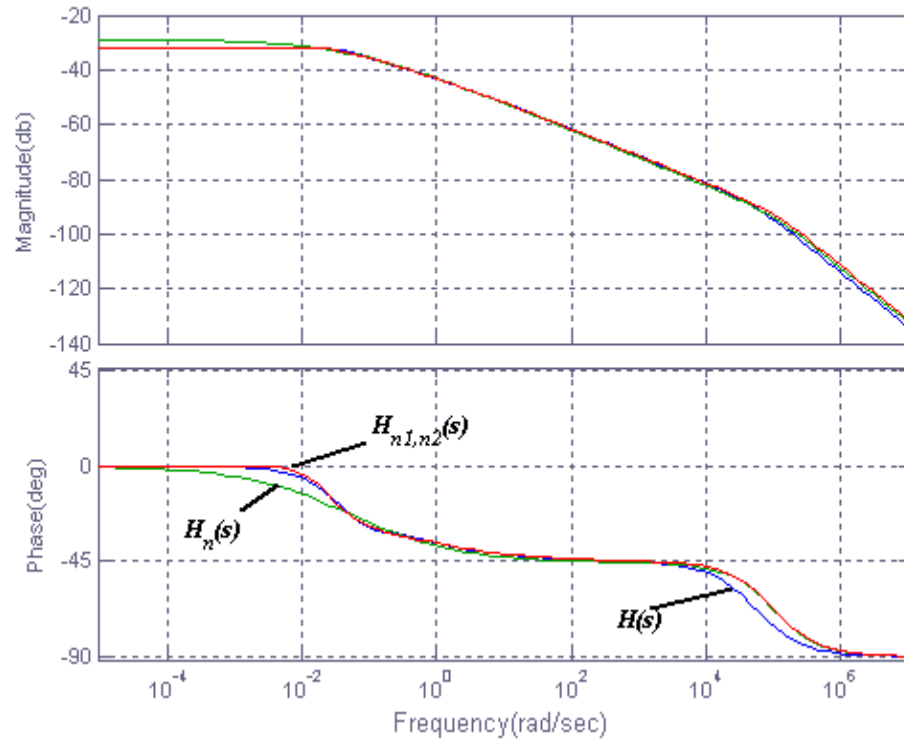
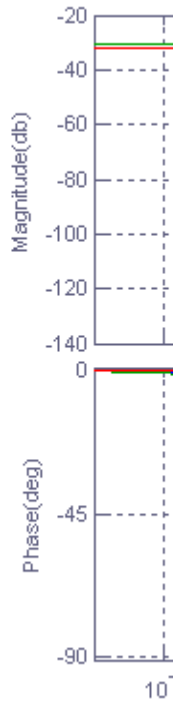
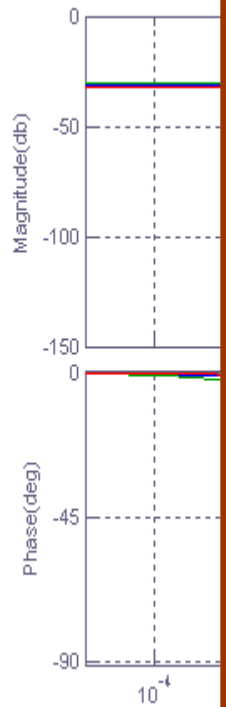
$H(s)$ et $H_n(s)$



$H(s)$ et $H_{n1,n2}(s)$

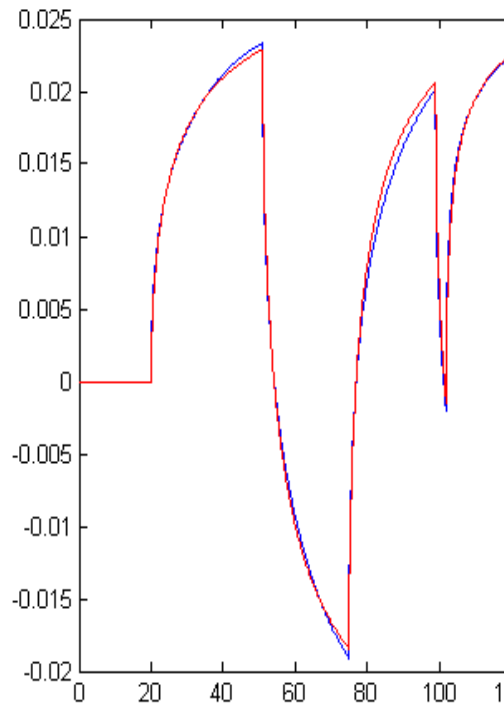


Réponses fréquentielles (cas du cylindre)

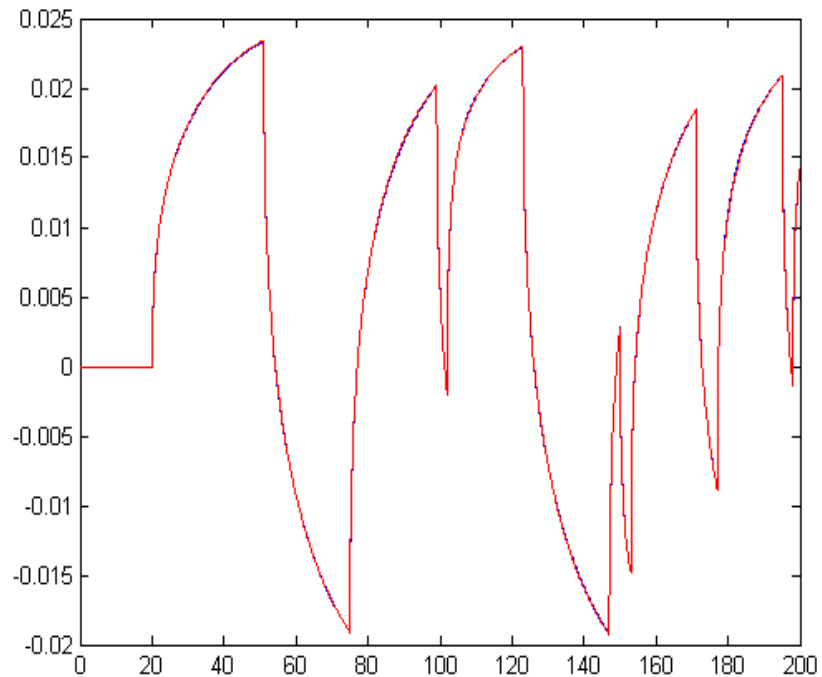


Réponses temporelles (Excitation moyenne)

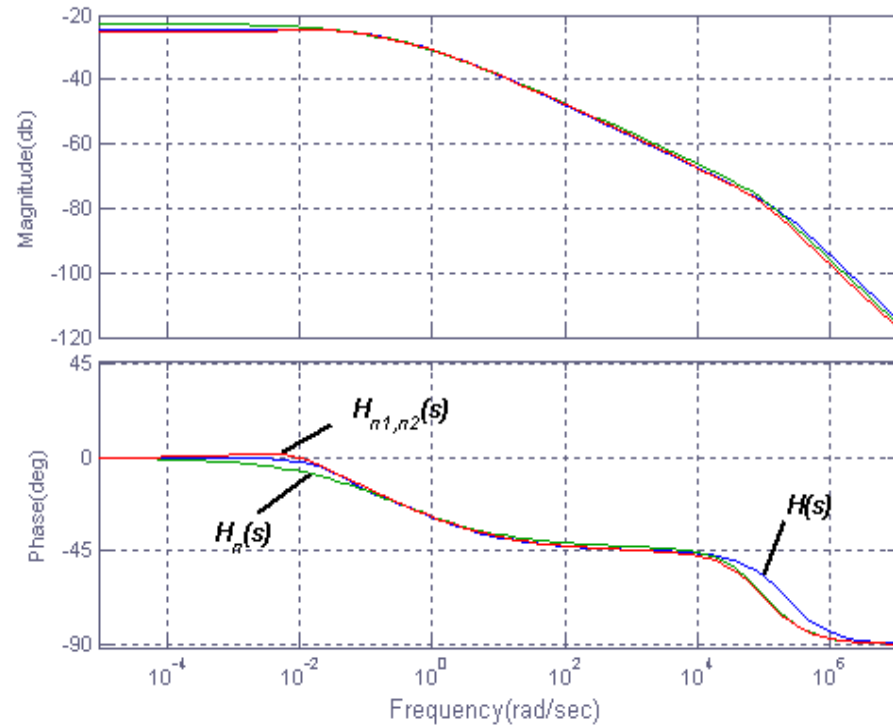
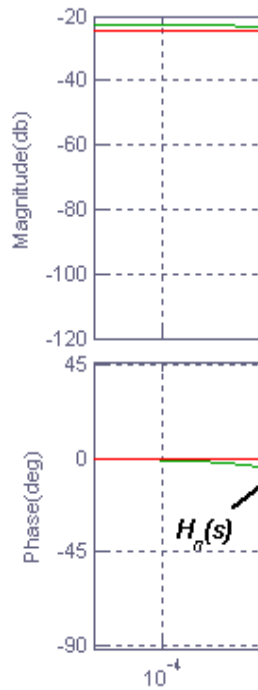
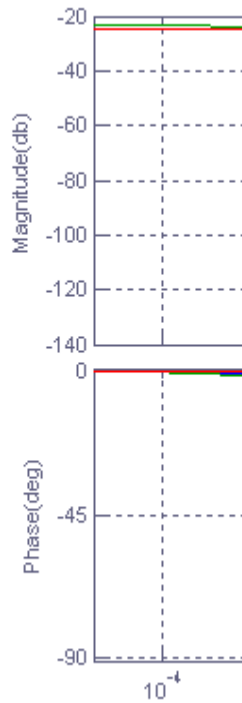
$H(s)$ et $H_n(s)$



$H(s)$ et $H_{n1,n2}(s)$

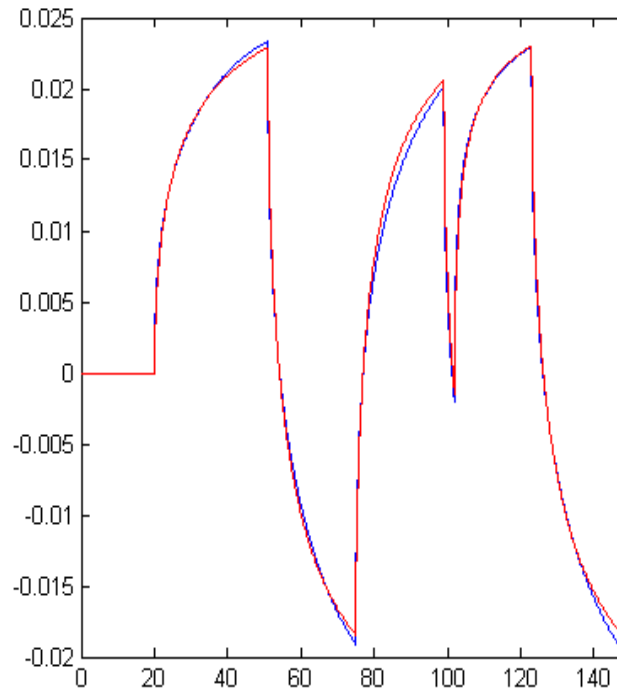


Réponses fréquentielles (cas de la sphère)

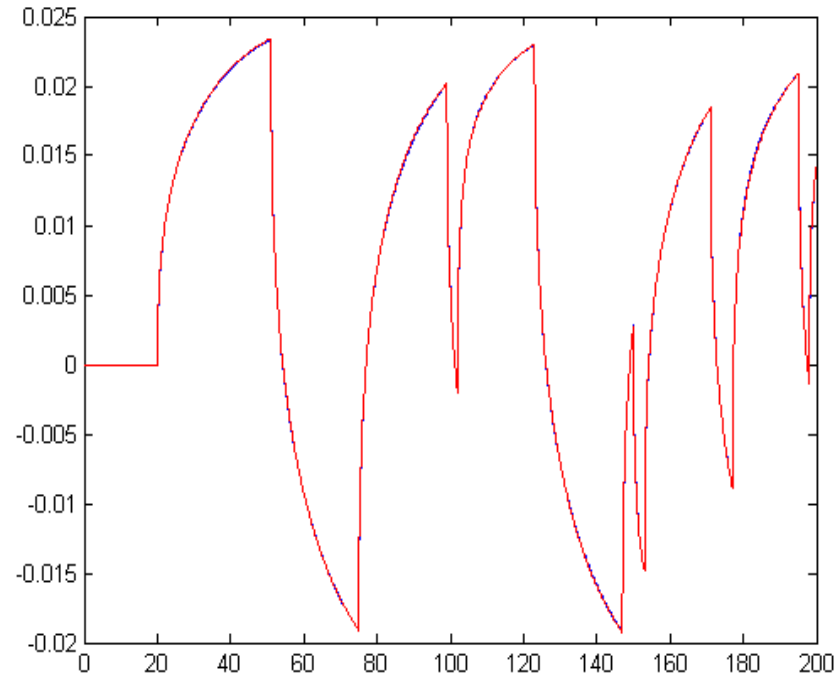


Réponses temporelles (Excitation moyenne)

$H(s)$ et $H_n(s)$



$H(s)$ et $H_{n1,n2}(s)$



Plan de l'exposé

- 1 - Rappel sur les intégrateurs fractionnaires
- 2 - Méthode d'identification
- 3 - Simulation numérique par différences finies

✓ 4 - Conclusion

- ***Contribution à la modélisation et l'identification des interfaces de diffusion par modèles fractionnaire***
- ***Amélioration de l'approximation fréquentielle à l'aide d'un modèle à deux intégrateurs non entier***
- ***cette étude a montré l'intérêt et la limite du modèle à un seul intégrateur***
- ***Une idée plus originale peut être mise en œuvre, en utilisant toujours le modèle à un intégrateur mais avec un ordre qui varie avec la fréquence.***