Travail soutenu par le département STIC du CNRS dans le cadre du projet Mobilité :

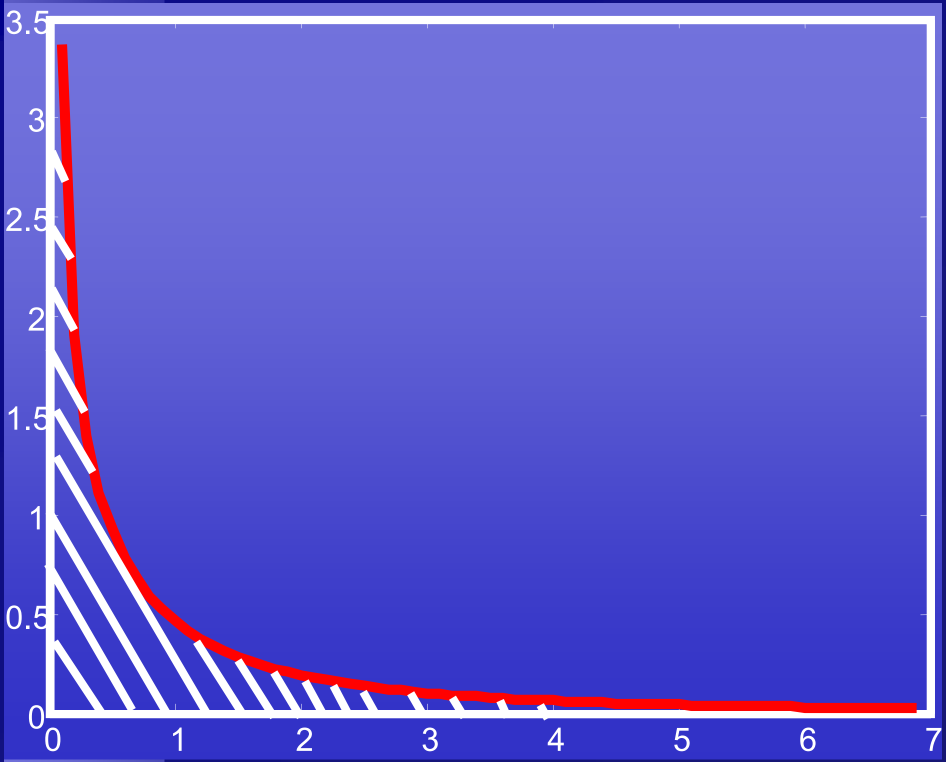
Identification de systèmes linéaires et non linéaires à dérivées fractionnaires

Norme H_2 d'une fonction de transfert fractionnaire ou énergie de sa réponse impulsionnelle

Rachid MALTI

Travail réalisé en collaboration avec :
Olivier COIS, Mohamed AOUN, François LEVRON et Alain OUSTALOUP

Objectif



- Connaissant :

$$F(s) = \frac{s^{0.8} + s^{0.6} + 2}{s^{1.4} + s^{0.8} + s^{0.6} + 1}$$

- Calculer :

$$\| F \|_2 = 1.44$$

Définition de la norme H_2

Théorème de Parseval

$$\|F\|_{H_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\overline{F(j\omega)}\,d\omega \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|_{L_2}^2 = \int_{0}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}\,dt$$

Norme H_2 en fréquentiel — Norme L_2 en temporel

Cette équivalence n’est valable que si $F(s)$ est stable

Motivation 1/2

- La Minimisation de la norme L_2 d'une erreur d'approximation :
  - est utilisée dans la majorité des méthodes de réduction d'ordre de modèle en automatique classique et pourquoi pas dans le fractionnaire ?
- La norme L_2 peut être utilisée comme critère d'approximation d'un modèle fractionnaire par un modèle entier – Mais …
- … est-ce la bonne mesure ? …

Motivation 2/2

- Objectif initial :

  Synthétiser une base orthogonale adaptée aux systèmes fractionnaires par orthogonalisation de Gramm-Schmidt

  - 1ère étape : normaliser la première fonction : $B_n(s) = \dfrac{1}{s^n + \lambda}$

$$G(s) = \frac{B_n(s)}{\|B_n\|}$$

- Mais, comment calcule-t-on $\|B_n(s)\|$?

Plan de l'exposé

- Calcul de la norme H_2 du **cas particulier** $B_n(s) = \dfrac{1}{s^n + \lambda}$

- Généralisation à tout type de fonctions de transfert à D.F.
  - Définition de la commensurabilité
  - F.T. implicite vs F.T. explicite
  - Stabilité des F.T. à D.F

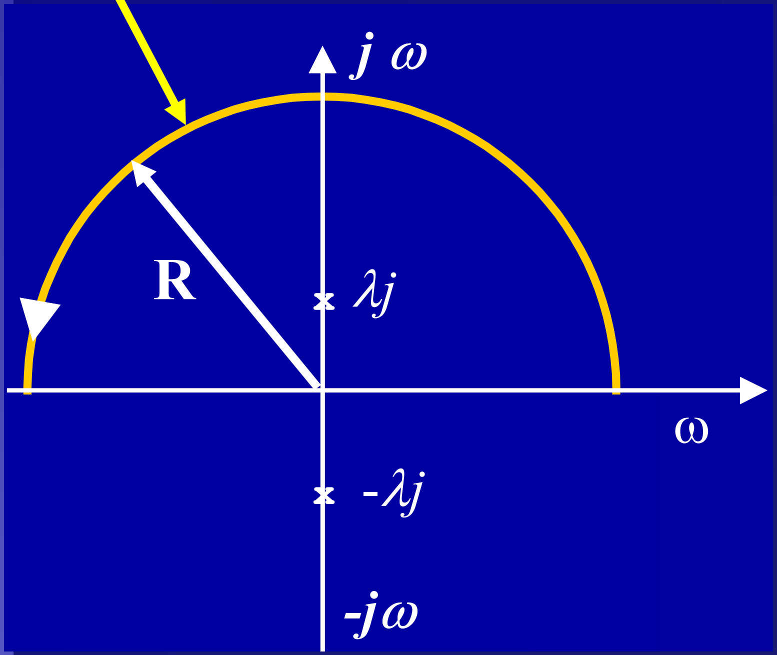
- Conclusions – Perspectives – Interrogations

$$B_n(s) = \frac{1}{s^n + \lambda}$$

Etat de l'art : quand *n* est entier

Aström (1970) a développé une méthode pour calculer $\|B\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(j\omega+\lambda)(-j\omega+\lambda)} d$

$$\lim_{R\to\infty} I_R = 0$$



$$I_\Gamma = I_R + \|B\|_2^2 = 2\pi j \sum \mathrm{Res}(F(z), poles$$

$$\|B_1\|_2^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

$B_n(s)=\frac{1}{s^n+\lambda}$

Etude du cas particulier $B_n(s)$ – n est NE

$$\|B_n\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(j\omega)^n+\lambda}\left(\overline{\frac{1}{(j\omega)^n+\lambda}}\right)d\omega$$

- Changement de variable : $\omega^n = x$ $\qquad d\omega=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}dx$

$$\|B_n\|^2=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{x^2+2\lambda\cos\left(\pi\frac{n}{2}\right)x+\lambda^2}dx$$

- On définit : $G(z)=\dfrac{z^{\frac{1}{n}-1}}{z^2+2\lambda\cos\left(\pi\frac{n}{2}\right)z+\lambda^2}$ $\qquad I=\int_0^{\infty}G(z)dz$

  - Il suffit d’intégrer $G(z)$ sur le demi axe réel R^+
  - $G(z)$ n’étant pas holomorphe, on réalise une coupure sur $[0, \infty[$ et on limite la variation des $\arg(z)$ dans $]0, 2\pi[$
  - Pour calculer I, on préfère intégrer le long du contour fermé de la figure suivante :

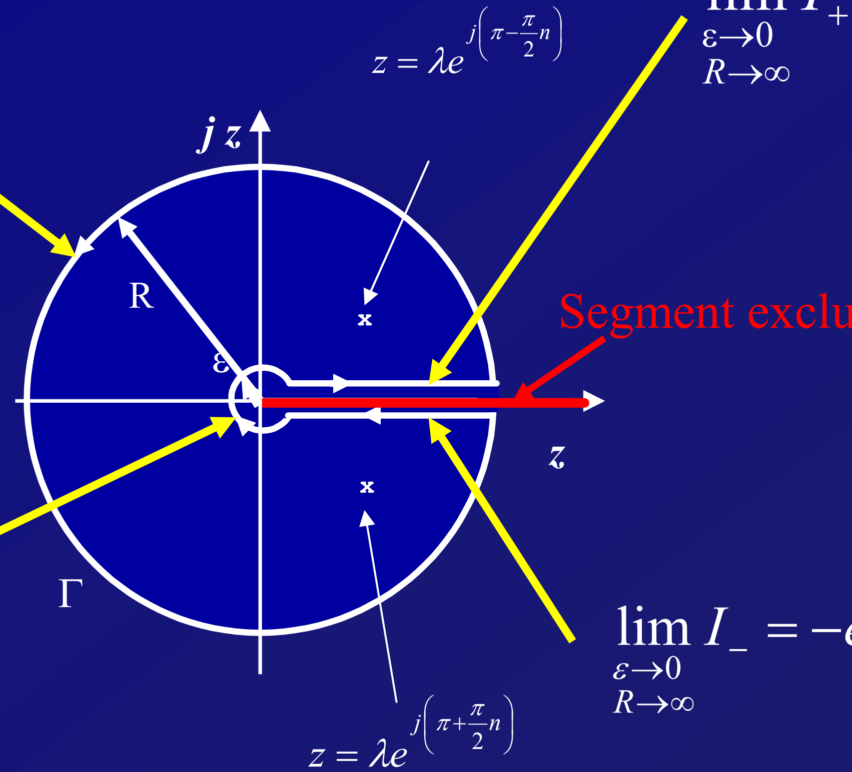
$$B_n(s)=\frac{1}{s^n+\lambda}$$

Intégration le long du contour

$$\lim_{R\to\infty} I_R = 0 \ \text{ si } n > \frac{1}{2}$$

$$\lim_{R\to\infty} I_R = \infty \ \text{ si } 0 < n \le \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} I_+ = I$$



$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 0 \text{ si } n > 0$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} I_- = -e^{2\pi j\left(\frac{1}{n}-1\right)} I$$

- Selon le théorème des résidus :

$$I_\Gamma = I_\varepsilon + I_R + I_+ + I_- = 2\pi j \sum \operatorname{Res}(G(z), poles)$$

$B_n(s) = \frac{1}{s^n + \lambda}$

Résultat

- Pour tout $B_n(s)$ stable :

$$\|B_n\|^2 = -\lambda^{\left(\frac{1}{n}-2\right)} \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad \text{si } \frac{1}{2} < n < 2 \text{ et } n \neq 1$$

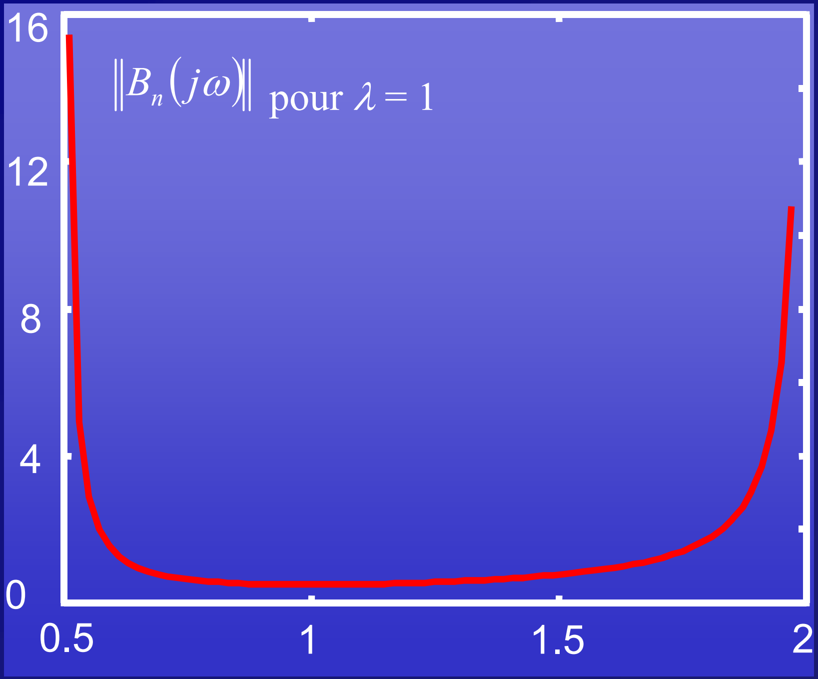
$$\|B_1\|^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

$$\|B_n\|^2 = \infty \qquad \text{si} \qquad 0 \le n \le \frac{1}{2}$$

La discontinuité en $n = 1$ est « *removable* »

$$B_n(s) = \frac{1}{s^n + \lambda}$$

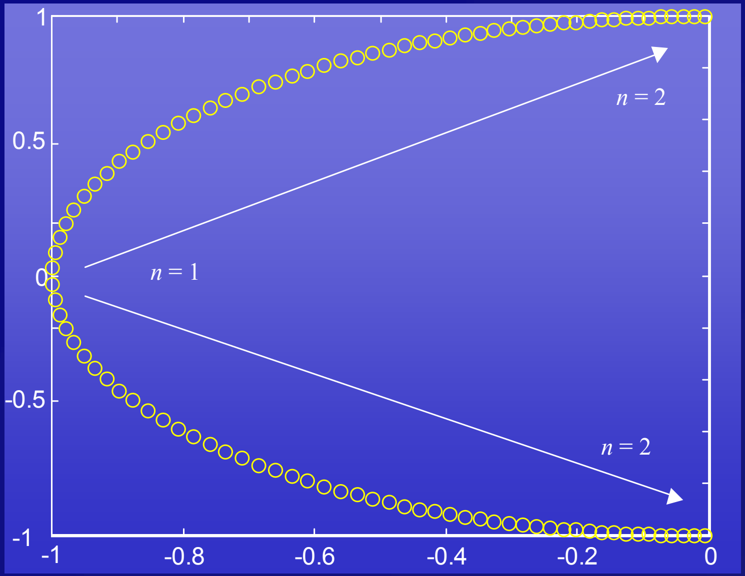
Allure de $\|B_n\|$

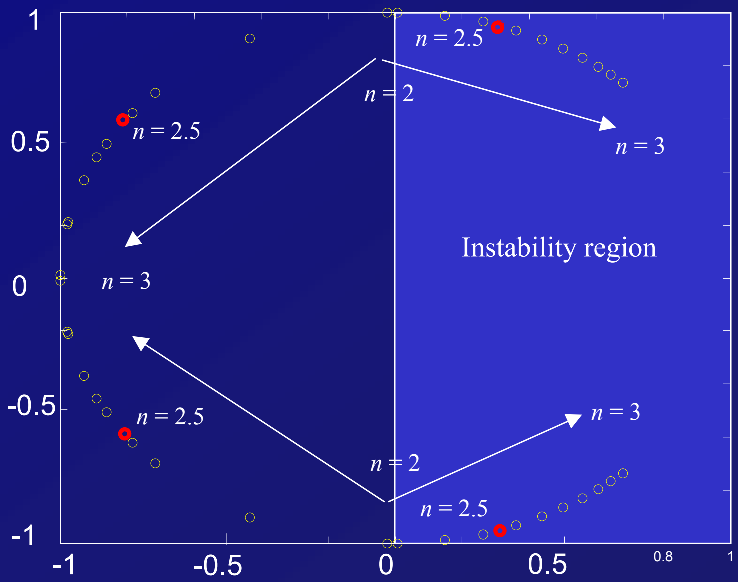


- Minimum en $n = 1$

$(s)=\frac{1}{s^n+\lambda}$

Interprétation dans le domaine fréquentiel



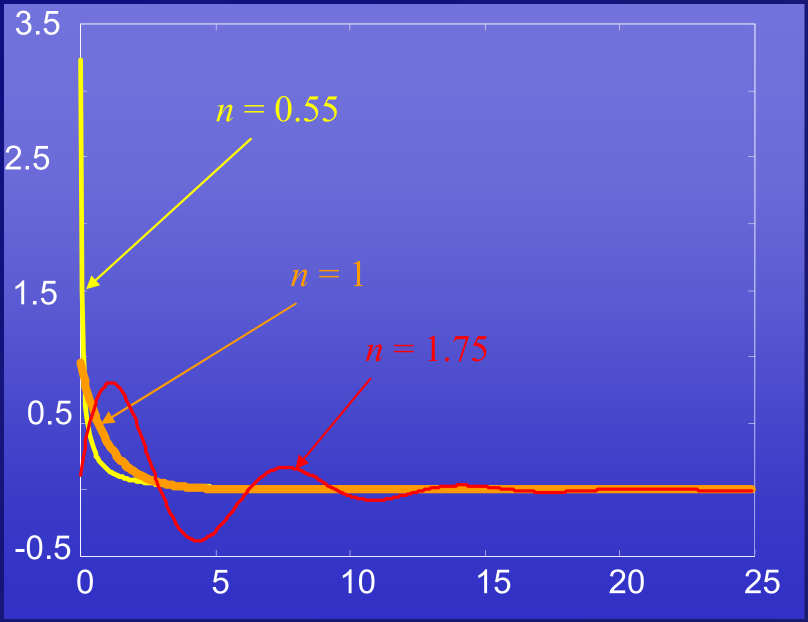


- si $0 < n < 1$, $B_n(s)$ n'a pas de pôle
- si $n = 1$, $B_1(s)$ a un seul pôle stable
- si $1 < n < 2$, $B_n(s)$ a deux pôles stables
- si $n \geq 2$, $B_n(s)$ a au moins 2 pôles instables

$$B_n(s) = \frac{1}{s^n + \lambda}$$

Interprétation dans le domaine temporel

On trace la réponse impulsionnelle ➔



Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t\to 0} b_n(t) = \lim_{s\to\infty} sB_n(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s^n + \lambda}$$

Trois cas se distinguent:

- Si $n > 1$ $\quad \lim_{t\to 0} b_n(t) = \lim_{s\to\infty} s^{1-n} = 0$
- Si $n = 1$ $\quad \lim_{t\to 0} b_n(t) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s^n + \lambda} = 1$
- Si $0 < n < 1$ $\quad \lim_{t\to 0} b_n(t) = \lim_{s\to\infty} s^{1-n} = \infty$ ➔ $b_n(t)$ est une distribution dans $[0, \infty[$
  - à énergie finie si $\frac{1}{2} < n < 1$
  - à énergie infinie si $0 < n \leq \frac{1}{2}$

$$B_n(s) = \frac{1}{s^n + \lambda}$$

Conclusions sur la 1ère partie

- Bien que les F.T. fractionnaires soient BIBO stables, leur énergie peut être infinie. Comportement inhabituel comparé aux F.T. rationnelles classiques.

- Les normes de $B_n(s)$
  - $\|b_n\|_1 = \infty$ si $0 < n < 1$ norme L_1
  - $\|b_n\|_2 = \infty$ si $0 < n \leq \frac{1}{2}$ norme L_2
  - …

- Les systèmes de diffusion de chaleur sont modélisés avec des ordres de dérivation de 0.5. Sont-ils à énergie finie ?

Généralisation

- Généralisation à tout type de fonctions de transfert à D.F.
  - Définition de la commensurabilité
  - Définition des F.T. explicites et implicites
  - Stabilité des systèmes fractionnaires (Matignon, 1998)
  - Résultat principal
  - Exemples
- Conclusions – interrogations – perspectives

Commensurabilité

- Une fonction de transfert $F(s)$ est dite commensurable d'ordre n ssi elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$F(s)=S(s^n) \quad \text{où} \quad S(p)=\frac{T(p)}{R(p)}$$

- $S(p)$ est une fonction rationnelle et donc $T(p)$ et $R(p)$ deux polynômes co-primes

- Matigon (1998), limite la variation de n dans $]0,1]$. Dans ce qui suit, on s'affranchira de cette limitation, ainsi pour :

$$F(s)=\frac{s^{2.4}+1}{s^6+4s^{3.6}+4} \rightarrow \begin{cases} n=1.2 \quad \text{et} \quad S(p)=\dfrac{p^2+1}{p^5+4p^3+4} \\ n=0.6 \quad \text{et} \quad S(p)=\dfrac{p^4+1}{p^{10}+4p^6+4} \quad \text{Selon Matignon} \end{cases}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^{\pi}+s^{\sqrt{2}}+1} \rightarrow \text{n'est pas commensurable}$$

Système implicite vs explicite

- Une F.T. explicite peut toujours s'écrire sous la forme :

$$F(s) = \frac{\sum_{m=0}^{m_A} a_m s^{\alpha_m}}{1 + \sum_{m=1}^{m_B} b_m s^{\beta_m}}$$

  - L'opérateur de dérivation fractionnaire s'applique toujours sur *s*.

- Un système est dit explicite s'il contient des éléments de type $(s - s_k)^\alpha$ où α est non entier
  - c.-à-d. si l'opérateur de dérivation fractionnaire s'applique sur des éléments du type $(s - s_k)^\alpha$
  - Ceci revient, dans le domaine temporel, à appliquer l'opérateur de dérivation sur : $\mathrm{D}^\alpha\left(f(t)e^{s_k t}\right)$

Stabilité des systèmes fractionnaires

- Une F.T. fractionnaire commensurable d'ordre $n \in]0,1]$, $F(s)$, (Matignon, 1998) :

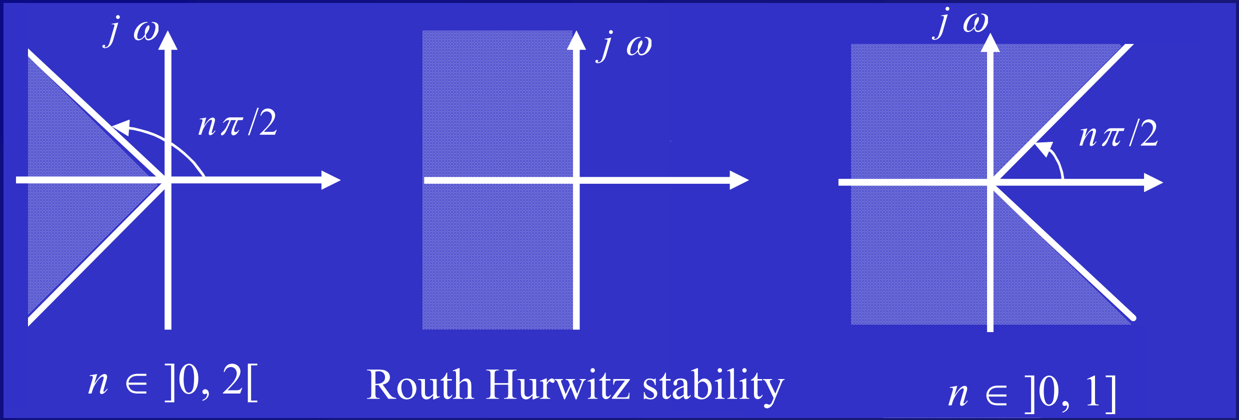
$$F(s) = \frac{\sum_{m=0}^{m_A} a_m s^{\alpha_m}}{1 + \sum_{m=1}^{m_B} b_m s^{\beta_m}} \qquad F(s) = S(s^n) \qquad S(p) = \frac{T(p)}{R(p)}$$

est stable ssi : $\forall p \in C \;\; t.q. \;\; R(p) = 0 : \quad |\arg(p)| > n\frac{\pi}{2}$

On peut s'affranchir de la condition $n \in]0,1]$, imposée par Matignon et montrer que la condition de stabilité est aussi valable pour tout $n \in]0,2[$

- Si $n \geq 2$, alors le système est instable $\forall p \in C \;\; t.q. \;\; R(p) = 0$

Interprétation graphique du théorème de stabilité



- quand $n \rightarrow 2$, la région de stabilité $\rightarrow R^-$
- pour tout $n \geq 2$, cette région disparaît

Hypothèses de travail

- La norme H_2 sera calculée pour toute fonction de transfert:
  - explicite
  - commensurable
  - stable

$$F(s) = \frac{\sum_{m=0}^{m_A} a_m s^{\alpha_m}}{1 + \sum_{m=1}^{m_B} b_m s^{\beta_m}}$$

- Le travail se résume à résoudre l'intégrale suivante $\forall\ F(s)$:

$$\|F\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\overline{F(j\omega)}d\omega$$

  - Une substitution directe ne permet pas de trouver une solution générale

$$\|F\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\overline{F(j\omega)}d\omega$$

Exemple 1 – 1/n entier

$$F(s)=\frac{1}{1+s^{0.6}}+\frac{1}{1+s^{0.8}}=\frac{s^{0.8}+s^{0.6}+2}{s^{1.4}+s^{0.8}+s^{0.6}+1} \qquad F(j\omega)=\frac{2+e^{0.3\pi j}\omega^{0.6}+e^{0.4\pi j}\omega^{0.8}}{1+e^{0.3\pi j}\omega^{0.6}+e^{0.4\pi j}\omega^{0.8}+e^{0.7\pi j}\omega^{1.4}}$$

- Ordre commensurable : $n = 0.2$ $\quad F(s)=S(s^n) \rightarrow S(p)=\frac{p^4+p^3+2}{p^7+p^3+1}$
- Changement de variable $\quad x=\omega^{0.2} \rightarrow d\omega=\frac{1}{0.2}x^4dx$

$$\|F\|^2=\frac{1}{0.2\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^4\left(2+e^{0.3\pi j}x^3+e^{0.4\pi j}x^4\right)\left(2+e^{2\pi-0.3\pi j}x^3+e^{2\pi-0.4\pi j}x^4\right)dx}{\left(1+e^{0.3\pi j}x^3+e^{0.4\pi j}x^4+e^{0.7\pi j}x^7\right)\left(1+e^{2\pi-0.3\pi j}x^3+e^{2\pi-0.4\pi j}x^4+e^{2\pi-0.7\pi j}x^7\right)}$$

$$\|F\|^2=\frac{5}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{A(x)dx}{(x+s_1)\prod_{k=2}^{14}(x+s_k)}$$

→ Fonction roots de Matlab

$$\|F\|^2=\frac{5}{\pi}\sum_{k=2}^{14}\int_0^{\infty}\frac{a_k dx}{(x+s_1)(x+s_k)}$$

→ Fonction residue de Matlab permet d'obtenir les coef. du D.F.R.

$$F(s)=\frac{s^{0.8}+s^{0.6}+2}{s^{1.4}+s^{0.8}+s^{0.6}+1}$$

Exemple 1 – 1/n entier

$$\|F\|^2=\frac{5}{\pi}\sum_{k=2}^{14}\frac{a_k}{s_k-s_1}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{(x+s_1)}-\frac{1}{(x+s_k)}\right)dx$$

$$\|F\|^2=\frac{5}{\pi}\sum_{k=2}^{14}a_k\left(\frac{\ln(s_k)-\ln(s_1)}{s_1-s_k}\right)$$

$$\|F\|^2=1.8449$$

$$\|F\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\overline{F(j\omega)}d\omega$$

Théorème – Résultat principal ½

Soit $F(s)$ une F.T. stable, explicite, commensurable d'ordre n,

soit $q \stackrel{\Delta}{=} \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$ $\rho \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{n} - \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$

soit $x = \omega^n$ ➔ $d\omega = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} dx$

soit $G(\omega^n) \stackrel{\Delta}{=} F(j\omega)$ $\frac{A(x)}{B(x)} = G(x)\overline{G(x)}$ $A(x)/B(x)$ est rationnelle

alors la solution de $\|F\|_2$, qui peut aussi s'écrire $\|F\|_2^2 = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{n}-1}\frac{A(x)}{B(x)}dx$,

est donnée par :

$$F\|_2^2 = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{n}-1}\frac{A(x)}{B(x)}dx$$

Théorème – Résultat principal 2/2

- Si $\deg(B) \le \deg(A) + \frac{1}{n}$ alors $\|F\|_2 = \infty$
- Si $\deg(B) > \deg(A) + \frac{1}{n}$ et $\rho \neq 0$ alors $\|F\|_2^2 = \dfrac{\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{v_k}(-1)^{l-1}a_{k,l}s_k^{\rho-1}\binom{\rho-1}{l-1}}{n\sin(\rho\pi)}$
  - où : $x^q\dfrac{A(x)}{B(x)} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{v_k}\dfrac{a_{k,l}}{(x+s_k)^l}$
- Si $\deg(B) > \deg(A) + \frac{1}{n}$ et $\rho = 0$ alors $\|F\|_2^2 = \sum_{k=2}^{r}\dfrac{c_k(\ln(s_k)-\ln(s_1))}{n\pi(s_k - s_1)} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=2}^{v_k}\dfrac{b_{k,l}s_k^{1-l}}{n\pi(l-1)}$
  - où $x^{q-1}\dfrac{A(x)}{B(x)} = \sum_{k=2}^{r}\dfrac{c_k}{(x+s_1)(x+s_k)} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=2}^{v_k}\dfrac{b_{k,l}}{(x+s_k)^l}$

Exemple 2 – $F(s)$ stable, $\|F\| = \infty$

$$F(s) = \frac{s^{0.6} + s^{0.2} + 2}{s^{0.8} + s^{0.6} + s^{0.2} + 1} = \frac{1}{1 + s^{0.2}} + \frac{1}{1 + s^{0.6}}$$

- Ordre commensurable : $n = 0.2$ $\qquad S(p) = \dfrac{p^3 + p^1 + 2}{p^4 + p^3 + p^1 + 1}$

$$\|F\|_2^2 = \frac{1}{\pi n} \int_0^\infty x^{\frac{1}{n} - 1} \frac{A(x)}{B(x)} dx$$

- on calcule :
  - deg(A) + 1/n – 1 = 6 + 5 – 1 = 10
  - deg(B) = 8

$$\|F\| = \infty$$

Exemple 3 – 1/n non entier

$$F(s)=\frac{s^{0.9}+s^{0.6}+2}{s^{1.5}+s^{0.9}+s^{0.6}+1}=\frac{1}{s^{0.9}+1}+\frac{1}{s^{0.6}+1}$$

- Ordre commensurable : $n = 0.3$

$$S(p)=\frac{p^3+p^2+2}{p^5+p^3+p^2+1}$$

  - on trouve :
    - $\deg(A) + 1/n - 1 = 6 + 3.33 - 1 = 8.33$
    - $\deg(B) = 10$
  - On effectue un D.F.R. residue : $\|F\|^2=\frac{3.33}{\pi}\sum_{k=1}^{10} a_k \int_0^{\infty}\frac{x^{0.33}}{(x+s_k)}dx$

- Solution : $\|F\|_2^2=\frac{\sum_{k=1}^{10}\sum_{l=1}^{1}(-1)^{l-1}a_{k,1}s_k^{-0.66}\binom{-0.66}{l-1}}{1.33\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$$\|F\|_2=1.7558$$

$$\|F\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\overline{F(j\omega)}d\omega$$

Instabilité numérique …

$$F(s)=\frac{\sum_{m=0}^{m_A} a_m s^{\alpha_m}}{1+\sum_{m=1}^{m_B} b_m s^{\beta_m}} \quad \Rightarrow \quad S(p)=\frac{\sum_{m=0}^{m_A} a_m p^{\frac{\alpha_m}{n}}}{1+\sum_{m=1}^{m_B} b_m p^{\frac{\beta_m}{n}}}$$

- Pour effectuer un DFR, on a besoin de trouver toutes les racines d'un polynôme d'ordre : $2\frac{\beta_{m_B}}{n}$

- Plus n ↗ et ↘ on aura de difficultés pour trouver les racines du dénominateur → extension de la déf. de n dans]0, 2[

Fonction `frac_norm` de la toolbox CRONE

```
>> help frac_norm
```

[E, error] = FRAC_NORM(SYS) is the root-mean-squares of the impulse response of the Fractional LTI model SYS, or equivalently the H2 norm of SYS.

FRAC_NORM is built on the same basis as the overloaded function LTI/NORM.

For the time being, only H2 norm is implemented.

error returns a 0 if the function completes correctly, 1 otherwise.

FRAC_NORM(SYS, 2) is the same as **FRAC_NORM(SYS)**

Caution : the function roots is bugged up to version 5.3 of Matlab if frac_norm gives NAN it is because of that bug.

Last revision : 04/09/2002

$$F_{\alpha,\beta}(s) = \frac{5}{s^{\alpha}+1} + \frac{3}{s^{\beta}+2}$$

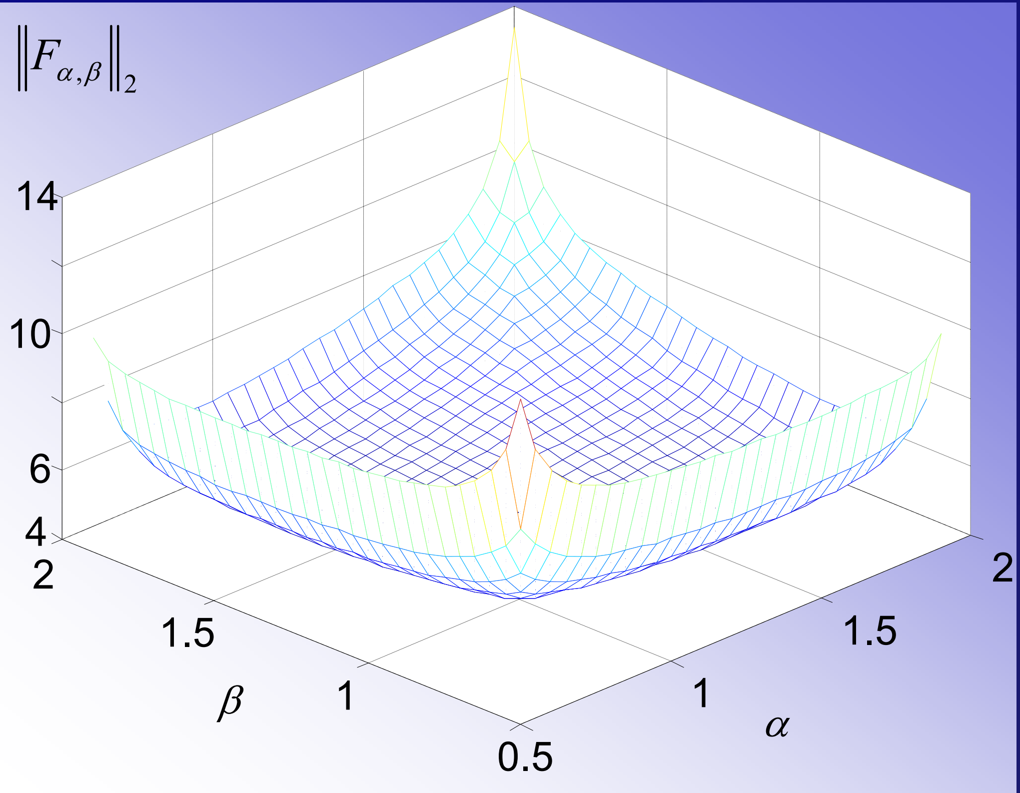
Exemple 4 – 1/3

- On a fait varier α et β de 0.55 à 1.95 et pour chaque combinaison de (α, β) on a calculé $\|F_{\alpha,\beta}\|_2$
  - Le plus petit ordre commensurable est $n = 0.05$
  - Au pire cas, c.-à-d. (α, β) = (1.90, 1.95), il a fallu trouver toutes les racines d'un polynôme d'ordre 2*(1.9+1.95)/0.05 = 154

- Descendre à des ordres commensurables plus petits est risqué
  - Pour (α, β) = (1.94, 1.95) ➔ $n = 0.01$.
  - Là il faut trouver toutes les racines d'un polynôme d'ordre 768,
    - les calculs en double précision ne permettent pas d'avoir une solution assez précise sous Matlab ☹ ➔
    - confusion entre racines simples et multiples
    - bon comportement de residu et roots de Matlab

$$F_{\alpha,\beta}(s) = \frac{5}{s^{\alpha}+1} + \frac{3}{s^{\beta}+2}$$

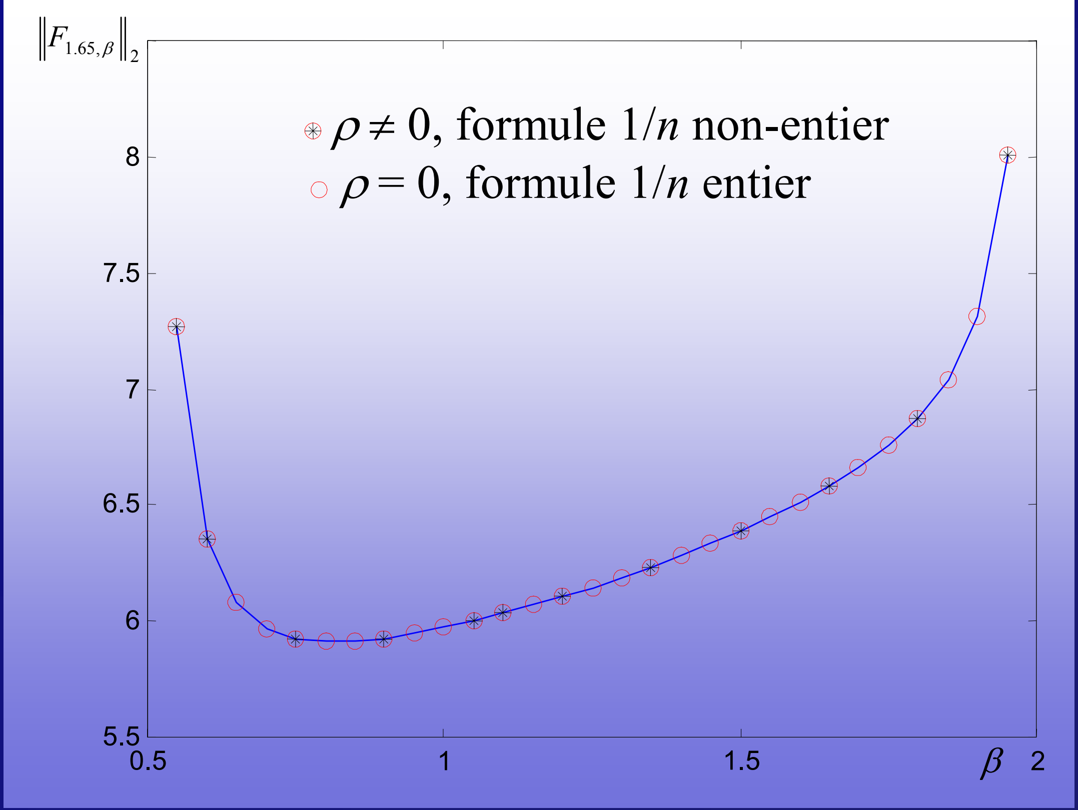
Exemple 1/3



- $\|F_{\alpha,\beta}\|$ est une fonction continue par rapport à α et β
- $\|F_{\alpha,\beta}\|$ est continue en $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ par rapport à …**`/lti/norm`**

$$F_{\alpha,\beta}(s)=\frac{5}{s^{\alpha}+1}+\frac{3}{s^{\beta}+2}$$

Exemple 2/3



- La continuité de $\|F_{\alpha,\beta}\|$ par rapport aux ordres de dérivation α et β est constatée bien que 2 formules différentes soient appliquées
- Continuité par rapport à la fonction **`norm`** (pour $\alpha = \beta = 1$)

Conclusion

- Donner nous une fonction de transfert fractionnaire et nous vous donnerons l'énergie de sa réponse impulsionnelle.
- S'applique aussi sur la fonction erreur (lors de l'approximation d'une F.T. fractionnaire par une F.T. rationnelle). On peut évaluer avec exactitude l'erreur d'approximation dans le sens H_2, et ainsi comparer les différentes méthodes d'approximation entre elles.
- On peut aussi développer des algorithmes d'optimisation paramétrique en minimisant la norme H_2 de l'erreur d'approximation.
- Mais …

… Interrogations ?

- Est-ce que la norme H_2 est une mesure adaptée aux systèmes fractionnaires ? 😐
  - quand la norme $H_2 = \infty$ et le système stable
    - Cette mesure ne l'est visiblement pas !
    - Quelle mesure choisir ?
    - Cette question est d'autant plus importante que certains systèmes de diffusion de chaleur ont un ordre commensurable de 0.5. Sont-ils à énergie infinie ?
  - quand la norme $H_2 < \infty$, est-ce que la mesure est adéquate ?

- Quelle mesure choisir ?

Perspectives

- Développer une méthode pour le calcul de la norme H_2 pour les systèmes :
  - incommensurables
  - implicites
- Démontrer la continuité de la fonction énergie en fonction des ordres de dérivation et notamment lors de l'utilisation de deux formules différentes selon que $1/n$ soit entier ou pas.