ISMANS
INSTITUT SUPÉRIEUR DES MATÉRIAUX ET MECANIQUES AVANCES

44, avenue F.A. Bartholdi - 72000 LE MANS
Tel. : +33 (0)2 43 21 40 00 Fax : +33 (0)2 43 21 40 39
e-mail : ismans@ismans.univ-lemans.fr

Construction d'une intégrale Cantorienne

L. Nivanen, A. Le Méhauté

Action thématique "Les systèmes à dérivée non entière"

Ecole Centrale, Nantes

Plan

1. Introduction
2. Préliminaires
3. Intégrale généralisée
4. Résultats
5. Conclusions

1. Introduction

- Physique : variables locales et paramètres macroscopiques

Lien par outil mathématique : théorie de l'intégration

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)\,dV$$

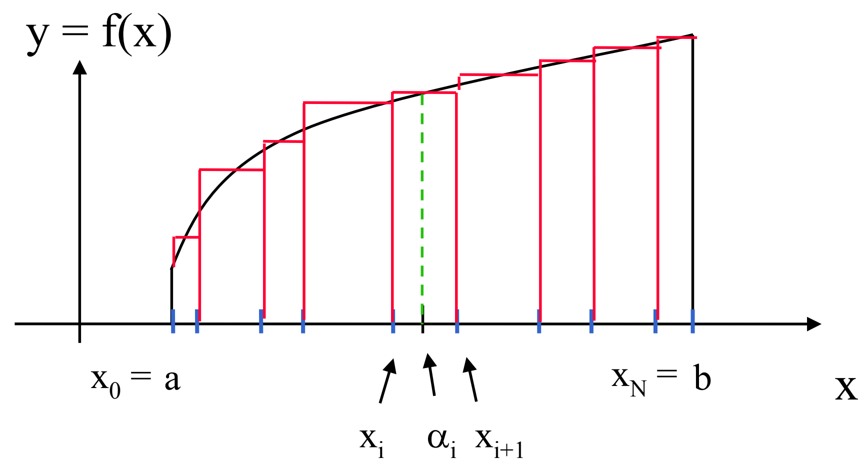
Démarche :

- validée sur des ensembles réguliers,
- inopérante dans le cas de supports fractals.

2. Préliminaires

2.1 Théorie de Riemann standard

- f continue sur $I_0 = [a,b]$,



- Subdivision de I_0 :

  $\{x_i\}, \; i = 0,1,\ldots,N$

- $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$

- Somme de Riemann :

$$I(a,b,\{x_i\}) = \sum_{i=0}^{N-1} f(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i)$$

- Evaluation : Subdivision régulière : $x_i = a + i\, L_N$ avec $L_N = (b - a)/N$

$$I(a,b,\{x_i\}) = I_N(a,b) = \left(\sum_{i=0}^{N-1} f(\alpha_i)\right) L_N = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} f(\alpha_i)}{N}(b-a)$$

- Convergence $$I(a,b) = \lim_{N \to +\infty} I_N(a,b)$$

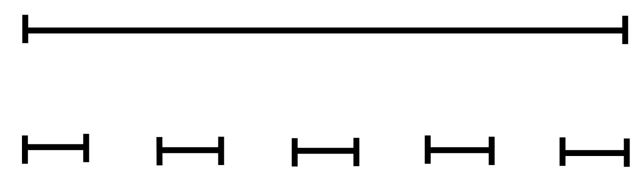
Notation : $\int_a^b f(x)dx$ Intégrale de Riemann de f entre a et b

2.2 Ensemble de Cantor

Construction : p homothéties de rapport s.

C_0 : initiateur [a,b], $L_0 = b - a$

C_1 : $N_1 = p$; $L_1 = L_0 s$;

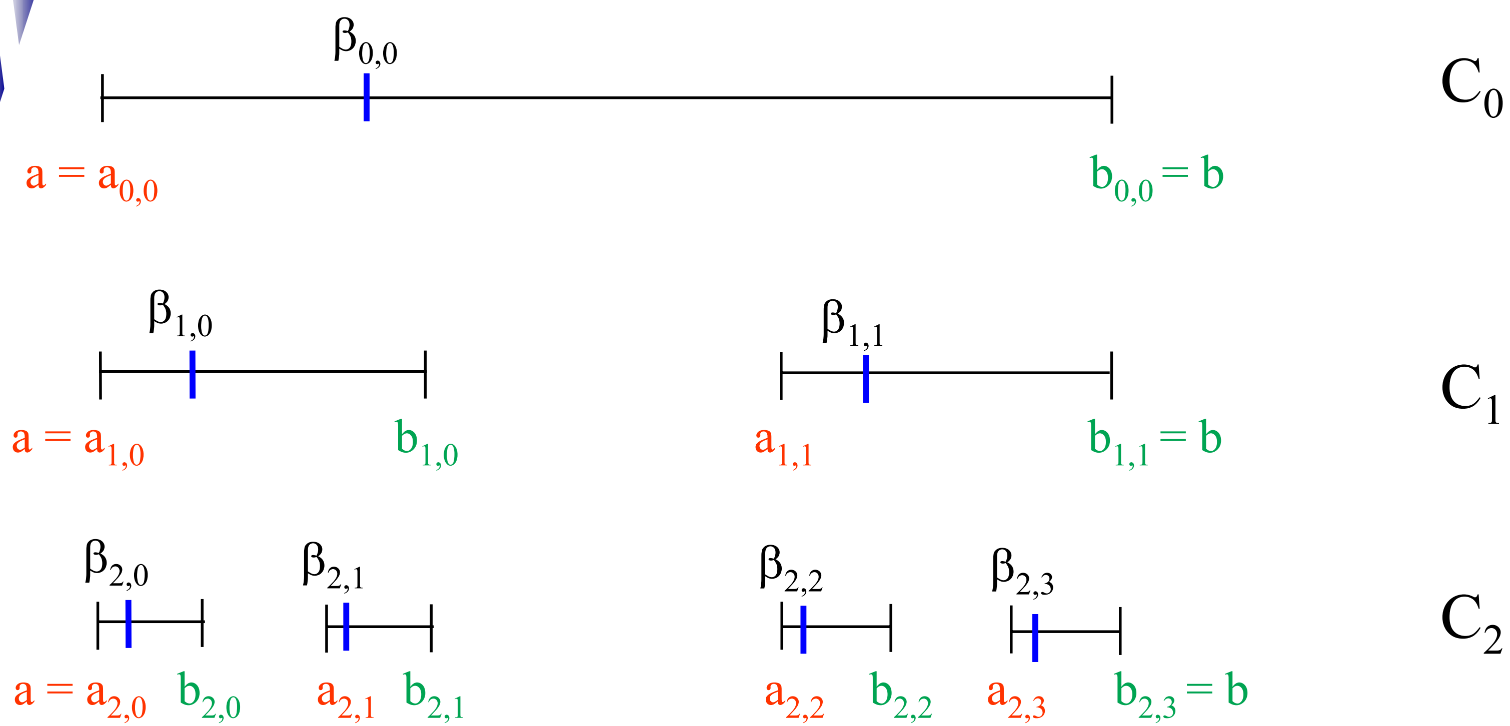


C_m : $N_m = p^m$ segments $[a_{m,k},b_{m,k}]$; longueur $L_m = L_0 s^m$

Fractal : $C_\infty = \lim C_m \ (m \to +\infty)$

Dimension fractale : $D = \ln(p)/\ln(1/s)$

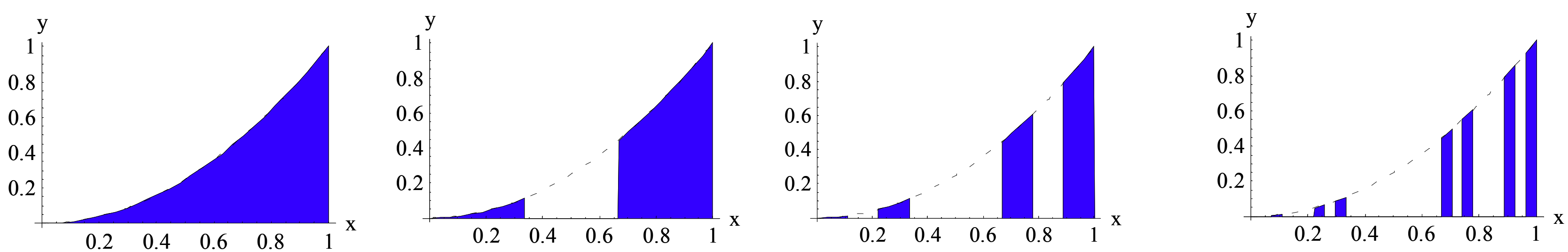
Préliminaires



3. Intégrale généralisée

3.1 Fonction définie sur C_m

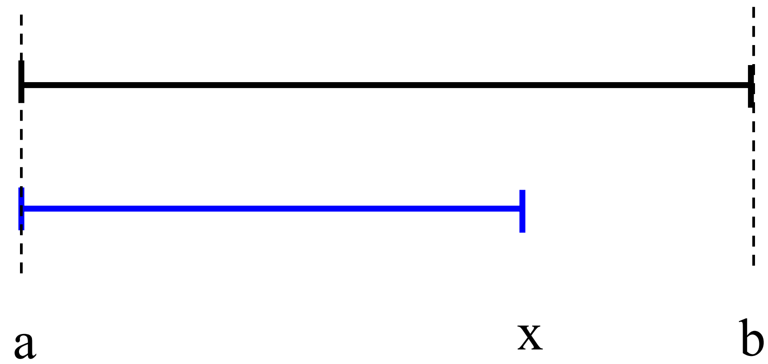
Exemple $f(x) = x^2$; $[a,b] = [0,1]$; $m = 0, 1, 2, 3$



f bornée sur [a,b] $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = 0$

3.2 Structure du support d'intégration

Intervalle :

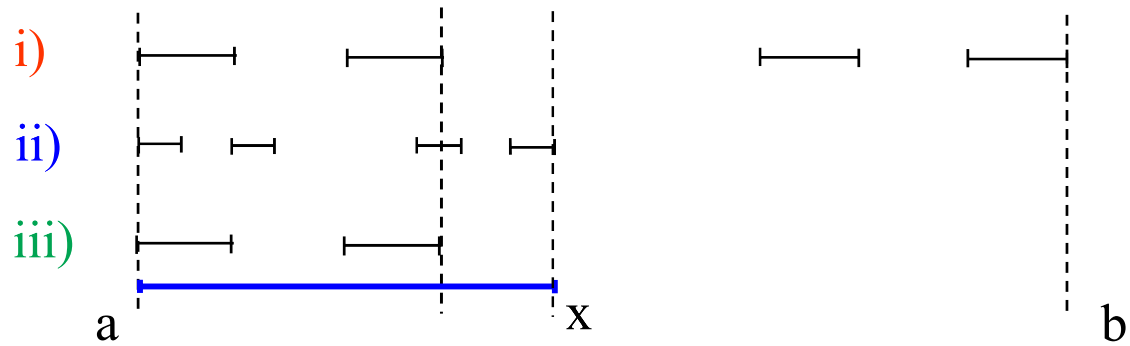


$x \in [a,b]$; $[a,x] \subset [a,b]$, $[a,x]$ et $[a,b]$ homothétiques

$$I(a,b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt \quad \text{connu}$$

$$\Rightarrow \quad I(a,x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{connu}$$

Support cantorien



complet

incomplet

i) $I(a,b)$ définie sur $C_m(a,b)$

ii) $I(a,x)$ définie sur $C_m(a,x)$, mais $C_m(a,x) \not\subset C_m(a,b)$

iii) $C'_m(a,b) = C_m(a,b) \cap [a,x] \subset C_m(a,b)$

Fonction $I(a,x)$ non pertinente

$\Rightarrow$ Introduction de $I'(a,x,a,b)$

3.3 Principe

$\alpha_{m,k} \in I_{m,k}$

Cantor C_m complet

$$K_m\left(a, b, \{\alpha_{m,k}\}\right) = \sum_{k=0}^{p^m - 1} f(\alpha_{m,k}) L_m{}^D$$

Cantor $C'_m = C_m \cap [a,x]$ incomplet

$n = 1 + \max \{k \,/\, x \geq b_{m,k}\}$

$$K'_m\left(a, b, \{\alpha_{m,k}\}, x\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{m,k}) L_m{}^D + f(\alpha_{m,n})\left(x - a_{m,n}\right)^D$$

3.4 Evaluation

$\alpha_{m,k}$ remplacés par $\beta_{m,k}$ définis à partir de $\beta_{0,0}$

$$J_m\left(a,b,\beta_{0,0}\right)=\sum_{k=0}^{p^m-1} f(\beta_{m,k})L_m{}^D \qquad J'_m\left(a,b,\beta_{0,0},x\right)$$

Intérêt :

- Détermination plus facile
- Même limite si f continue sur [a,b]

Résultat analogue sur C'_m

4. Résultats

4.1 Fonctions caractéristiques

$$L_m^D = L_0^D / p^m$$

$$\Rightarrow \quad J_m(a,b,\beta_{0,0}) = F_m(a,b,\beta_{0,0})(b-a)^D$$

avec $$F_m(a,b,\beta_{0,0}) = \left(\sum_{k=0}^{p^m-1} f(\beta_{m,k}) \right) \Big/ p^m$$

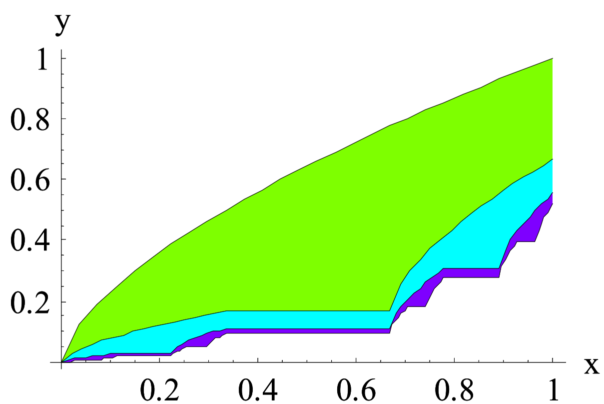
$$\Rightarrow \quad J'_m(a,b,\beta_{0,0},x) = F'_m(a,b,\beta_{0,0},x)(b-a)^D$$

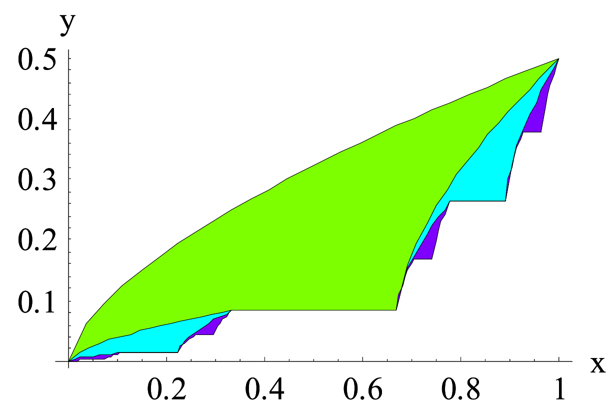
Résultats

4.2 Courbes intégrales

Fonction f(x) = x ; [a,b] = [0,1] $\qquad J'_m(a, b, \beta_{0,0}, x)$

$\beta_{0,0} = b$ $\qquad\qquad \beta_{0,0} = (a + b)/2$



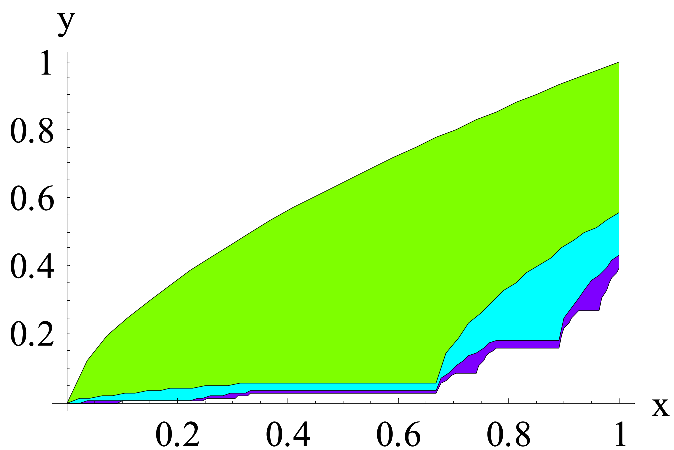


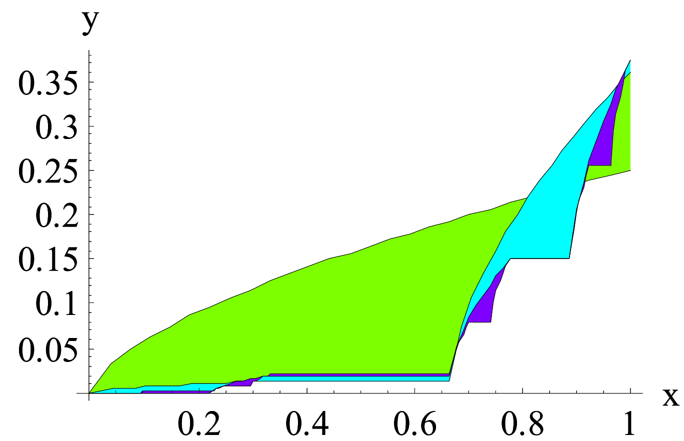
Caractérisation complète à l'ordre m :

- suite de p^m paliers $\qquad Y_m = J'_m(a, b, \beta_{0,0}, b_{m,n})$
- x^D entre paliers

Résultats

$\beta_{0,0} = b$ $\quad$ $f(x) = x^2$ $\quad$ $\beta_{0,0} = (a + b)/2$





Convergence apparente de Y_m

Objectifs :

- détermination des limites, reconstruction des courbes intégrales

4.3 Identités

4.3.1 Ensemble de Cantor complet

$$C_m(a,b) = \bigcup_{k=0}^{p-1} C_{m-1}(a_{1,k}, b_{1,k})$$

$$J_m(a,b,\beta_{0,0}) = \sum_{k=0}^{p-1} J_{m-1}(a_{1,k}, b_{1,k}, \beta_{1,k})$$

$$F_m(a,b,\beta_{0,0}) = \left(\sum_{k=0}^{p-1} F_{m-1}(a_{1,k}, b_{1,k}, \beta_{1,k}) \right) \Big/ p$$

$$\Rightarrow \quad F_m(a,b,\beta_{0,0}) = \left(\sum_{k=0}^{p^m-1} F_0(a_{m,k}, b_{m,k}, \beta_{m,k}) \right) \Big/ p^m$$

Résultats

Convergence ($m \to +\infty$)

$$J_m(a,b,\beta_{0,0}) \to J(a,b) \qquad F_m(a,b,\beta_{0,0}) \to F(a,b)$$

Propriétés : $J(a,b) = F(a,b)(b-a)^D \boxed{= \int_a^b f(t)(dt)^D}$

$$J(a,b) = \sum_{k=0}^{p-1} J(a_{1,k}, b_{1,k})$$

D'où : $F(a,b) = \left(\sum_{k=0}^{p-1} F(a_{1,k}, b_{1,k})\right) \Big/ p = \left(\sum_{k=0}^{p^m-1} F(a_{m,k}, b_{m,k})\right) \Big/ p^m$

4.3.2 Ensemble de Cantor incomplet

$$J'_m(a,b,\beta_{0,0},x) \to J'(a,b,x)$$

$$F'_m(a,b,\beta_{0,0},x) \to F(a,b,x)$$

Propriétés : $J'(a,b,x) = F'(a,b,x)(b-a)^D = \int_{a,a}^{x,b} f(t)(dt)^D$

En pratique $x = b_{m,n-1}$

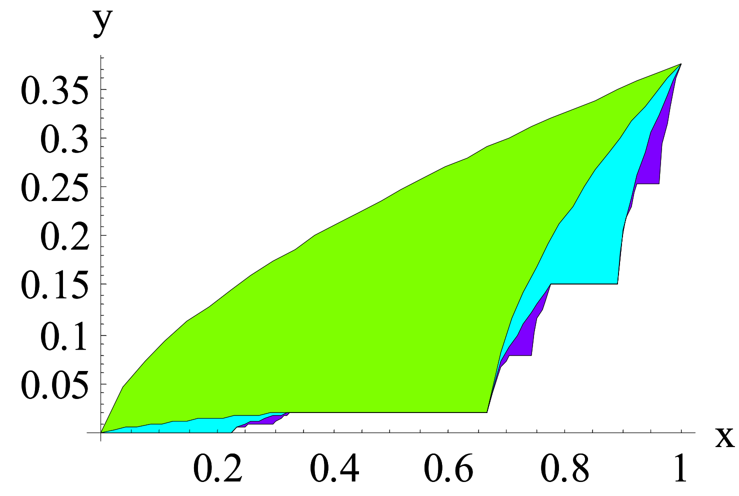
$$F'(a,b,b_{m,n-1}) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} F(a_{m,k}, b_{m,k})}{p^m}$$

4.4 Courbes intégrales exactes

Obtention :

- fonction caractéristique F(a,b)
- ordonnées des p^m paliers à l'ordre m par F '(a,b,$b_{m,n}$)
- jonction entre paliers par x^D

$f(x) = x^2$



5. Conclusions

- Distinction support d'intégration [a,x] / support d'étude [a,b]

- Introduction de quantités pertinentes J_m J'_m F_m F'_m

- Notations cohérentes $\int_a^b f(t)(dt)^D$ $\int_{a,a}^{x,b} f(t)(dt)^D$

- Fonction primitive « remplacée » par F(a,b)

Perspectives

- Convergence à approfondir
- Extension de la théorie à d'autres supports
- Formulaire de fonctions F(a,b)