

Modélisation des systèmes d'ordre non entier par un intégrateur borné en fréquence : influence des paramètres de réglage

Thierry POINOT et Jean-Claude TRIGEASSOU

Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle

Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers

40, Ave du Recteur Pineau, 86022 POITIERS cedex - FRANCE

Introduction

On s'intéresse à l'entité théorique suivante :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + s^n}$$

où n est non entier

Ou sous forme d'équation différentielle :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Question : comment simuler temporellement ce système non entier, quelque soit l'excitation ?

⇒ Deux types de méthodes de simulation

Méthodes directes

L'opérateur non entier est remplacé par une approximation numérique discrète \Rightarrow Equation récurrente directement simulable

Exemple :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$



$$\sum_{k=0}^K C(k) y((K-k)h) + a_0 y(Kh) = b_0 u(Kh)$$

h : pas d'échantillonnage, K : nombre de points



$$y(Kh) = \frac{b_0 u(Kh) - \sum_{k=1}^K C(k) y((K-k)h)}{a_0 + C(0)}$$

Méthodes directes

avec

$$C(k) = \frac{(-1)^k}{h^n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k}{h^n} \binom{n}{k}$$

ou

$$\begin{cases} C(k) = \frac{k-n-1}{k} C(k-1) \\ C(0) = \frac{1}{h^n} \end{cases}$$

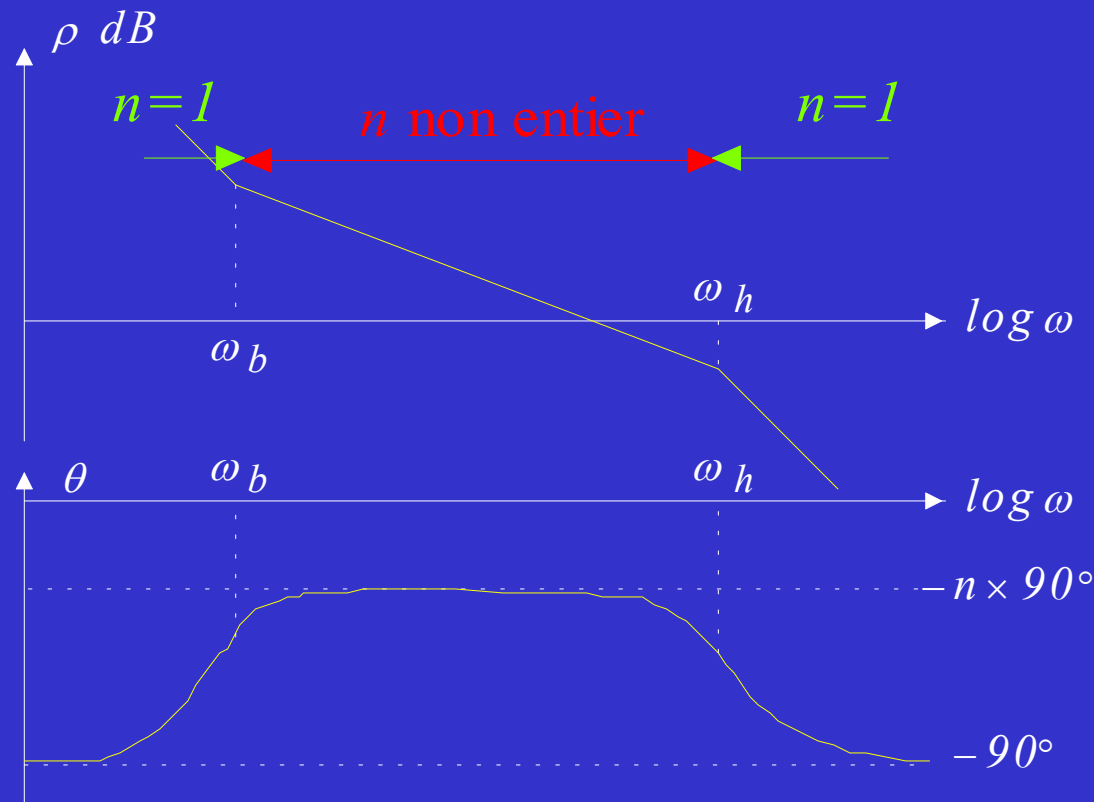
- ♦ Avantage : simplicité de mise en œuvre
- ♦ Inconvénient : la simulation requiert (pour chaque pas) le calcul de sommes de dimension croissante avec le temps
⇒ Mémoire infinie

Méthodes indirectes

- ◆ Approche basée sur l'exploitation de la réponse impulsionnelle analytique
- ◆ Approche basée sur une distribution récursive de zéros et de pôles \Rightarrow Définition d'un intégrateur non entier borné en fréquence

Opérateur d'intégration fractionnaire

Considérons le diagramme de Bode de l'intégrateur fractionnaire $I_n(s)$



Opérateur d'intégration fractionnaire

L'opérateur $I_n(s)$ est un intégrateur conventionnel, excepté dans la bande limitée $[\omega_b, \omega_h]$ où il agit comme $1/s^n$.

On a

$$\frac{1}{s^n} \quad \Rightarrow \quad I_n(s) = \frac{1}{s} \omega_b^{1-n} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{1-n}$$

Il est approché par :

$$I_n(s) = \frac{\omega_b^{1-n}}{s} \prod_{i=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega'_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}}$$

Opérateur d'intégration fractionnaire

Avec

$$\begin{cases} \omega_i = \alpha \omega'_i \\ \omega'_{i+1} = \eta \omega_i \end{cases}$$

où α et η sont appelés facteurs récursifs

- ♦ ω'_1 et ω_N définissent l'intervalle $[\omega_b, \omega_h]$
- ♦ la qualité de l'approximation dépend du nombre de cellules N
- ♦ l'ordre non entier n est directement relié à α et η par :

$$n = 1 - \frac{\log \alpha}{\log \alpha \eta}$$

Représentation d'état de l'opérateur

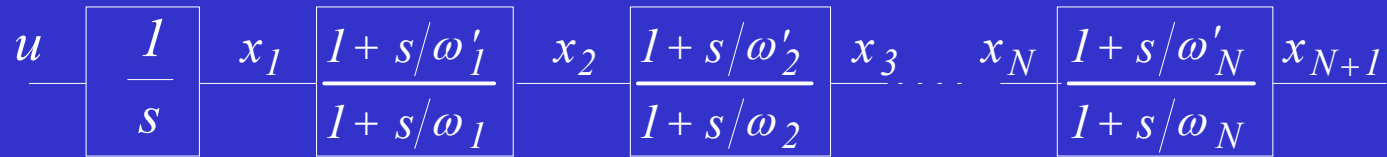


Schéma bloc de $I_n(s)$

Variables d'état : sortie de chaque cellule

Chaque variable d'état x_n est uniquement reliée à la précédente x_{n-1} par :

$$-\alpha \dot{x}_n + \dot{x}_{n+1} = \omega_n (x_n - x_{n+1})$$

Représentation d'état de l'opérateur

On obtient

$$M_I \dot{\underline{x}}_I = A_I \underline{x}_I + \underline{B}_I u$$

$$M_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \omega_1 & -\omega_1 & & & \vdots \\ 0 & \omega_2 & -\omega_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_N & -\omega_N \end{bmatrix}$$

$$B_I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Représentation d'état de l'opérateur

Ou de manière équivalente :

$$\dot{\underline{x}}_I = \underline{A}_I^* \underline{x}_I + \underline{B}_I^* u$$

avec

$$\begin{cases} \underline{A}_I^* = \underline{M}_I^{-1} \underline{A}_I \\ \underline{B}_I^* = \underline{M}_I^{-1} \underline{B}_I \end{cases}$$

Représentation d'état d'un système non entier

Soit le système
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + s^n} \quad (\text{où } 0 < n < 1)$$

On obtient la représentation d'état globale :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u \\ y = \underline{C}^T \underline{x} \end{cases}$$

avec

$$\underline{A} = \underline{A}_I^* + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \underline{B}_I^*, \quad \underline{C}^T = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad b_0]$$

Représentation d'état d'un système non entier

Le système non entier $H(s) = \frac{b_0}{a_0 + s^n}$ est approché par un système entier d'ordre élevé mais non infini (défaut des méthodes directes de simulation temporelle)

Intérêt pour la simulation

On règle la précision par :

- ♦ La complexité : ordre de la représentation d'état
- ♦ L'intervalle fréquentiel

Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

Système étudié

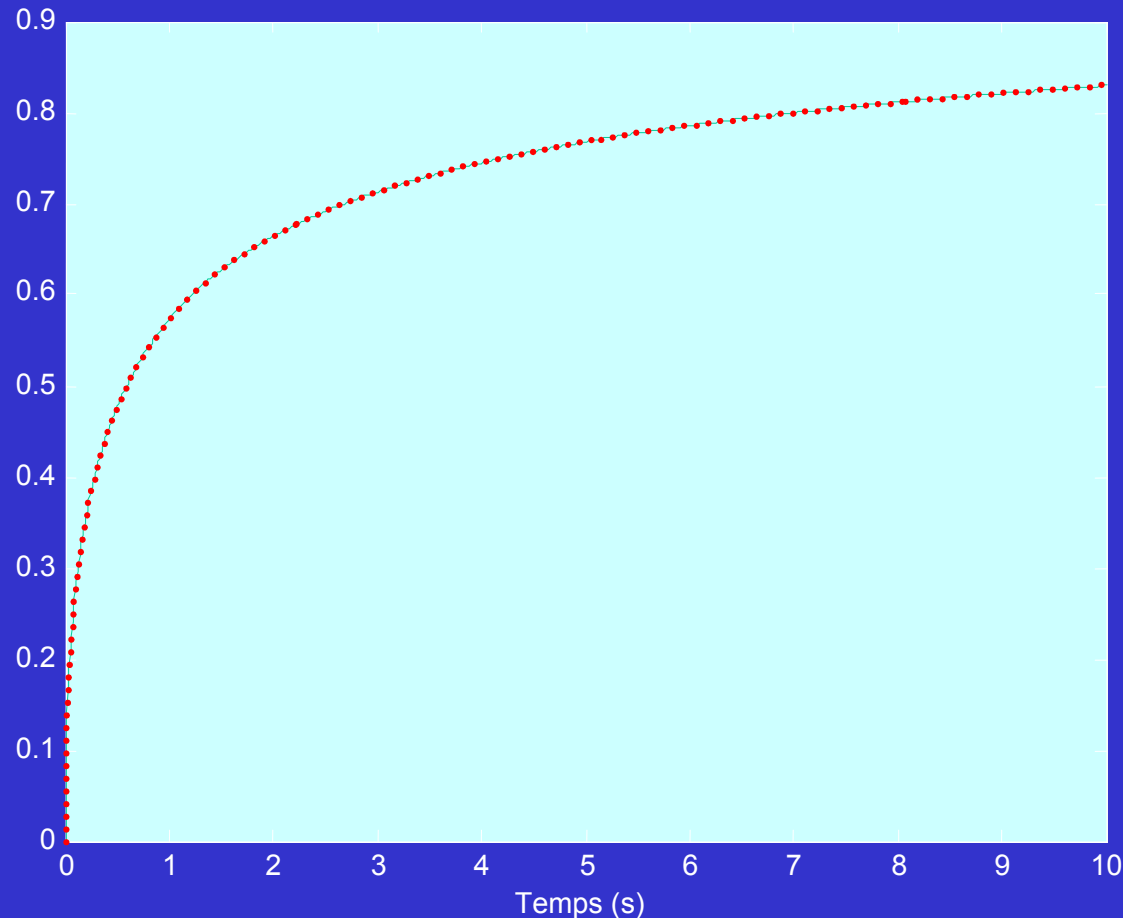
$$H(s) = \frac{b_0}{a_0 + s^n}$$

- ◆ Simulation par l'Equation Différentielle Généralisée
- ◆ Simulation de l'intégrateur borné en fréquence

Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

$$n = 0.5 \quad a_0 = 1 \quad b_0 = 1$$

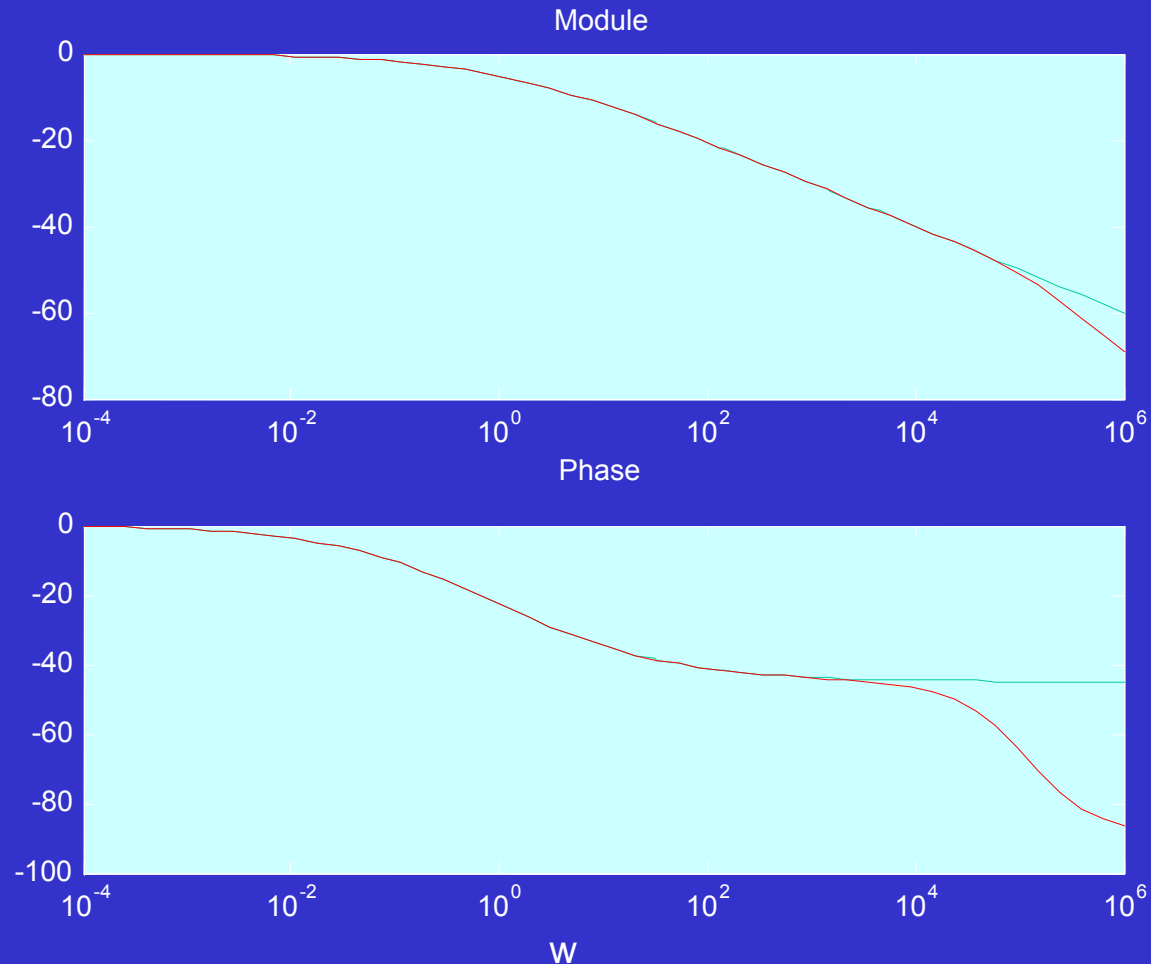
Approximation avec $N = 30$, $\omega'_1 = 10^{-5} \text{ rd/s}$ et $\omega_N = 10^5 \text{ rd/s}$



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

Courbes de Bode

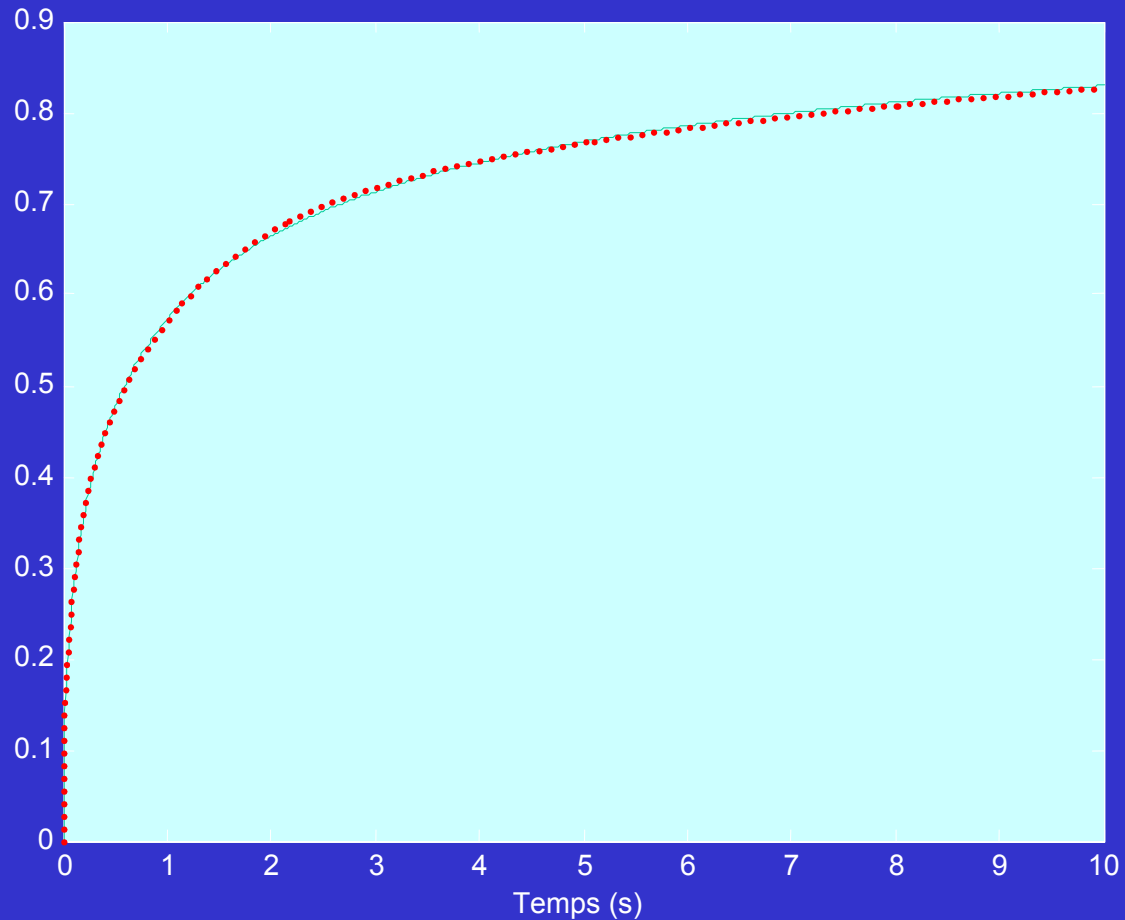
Intégrateur borné en fréquence et modèle exact - $N = 30$



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

Influence de N

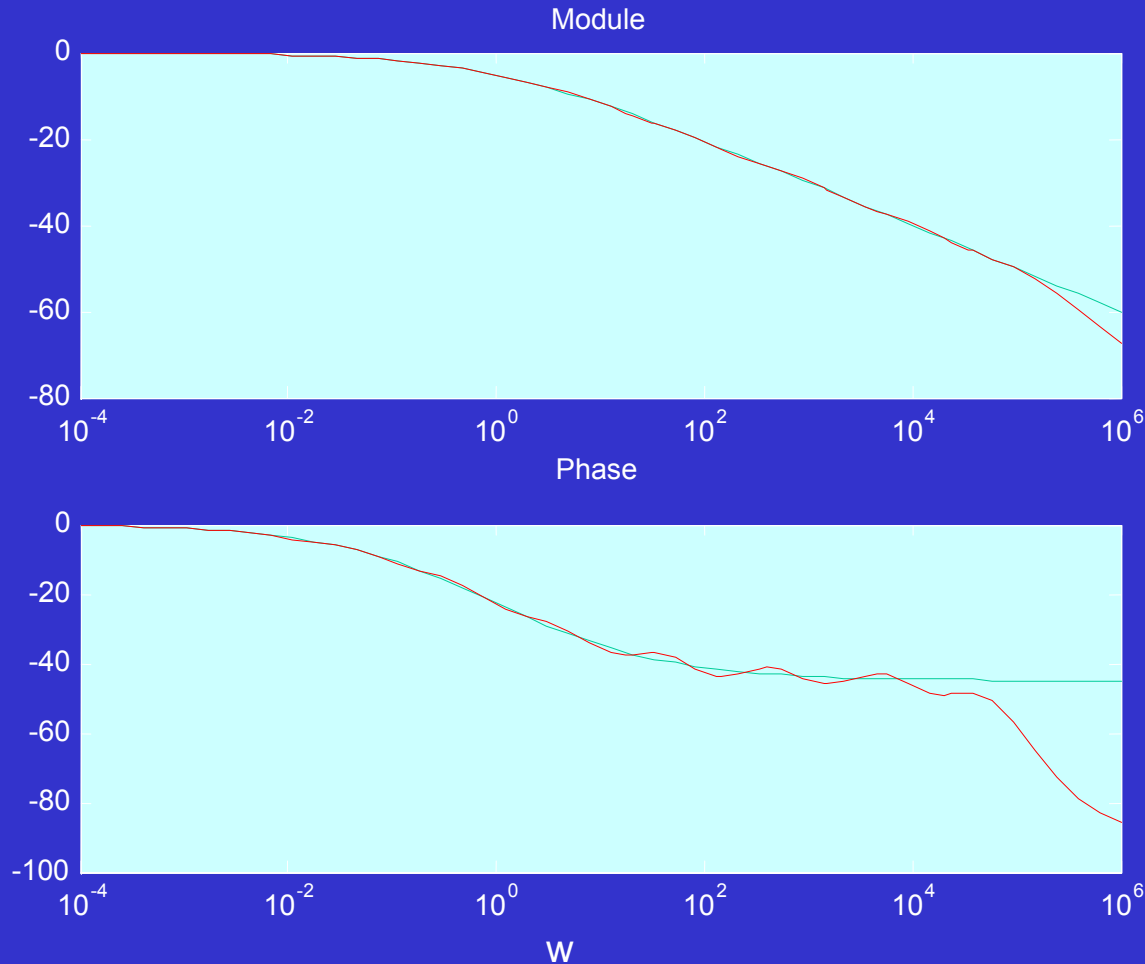
$N = 10$



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

Courbes de Bode

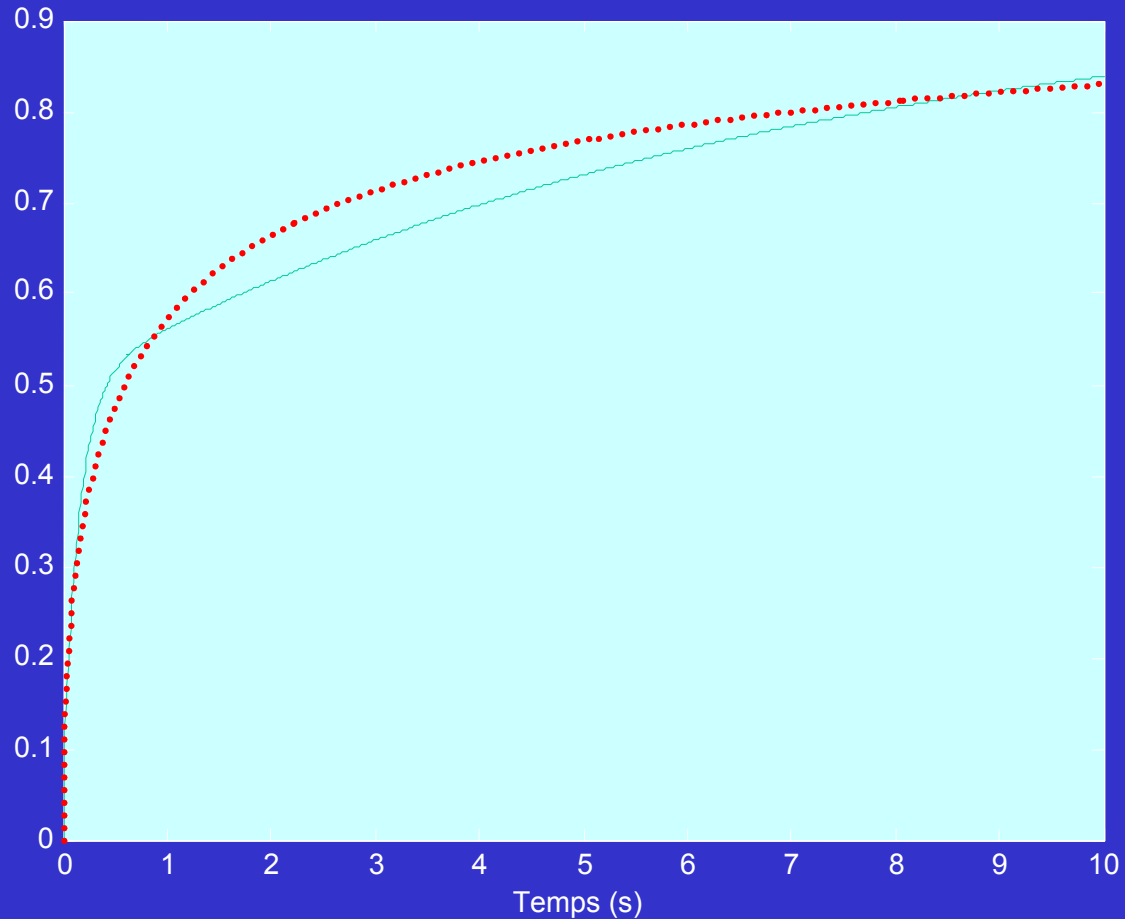
Intégrateur borné en fréquence et modèle exact - $N = 10$



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

Influence de N

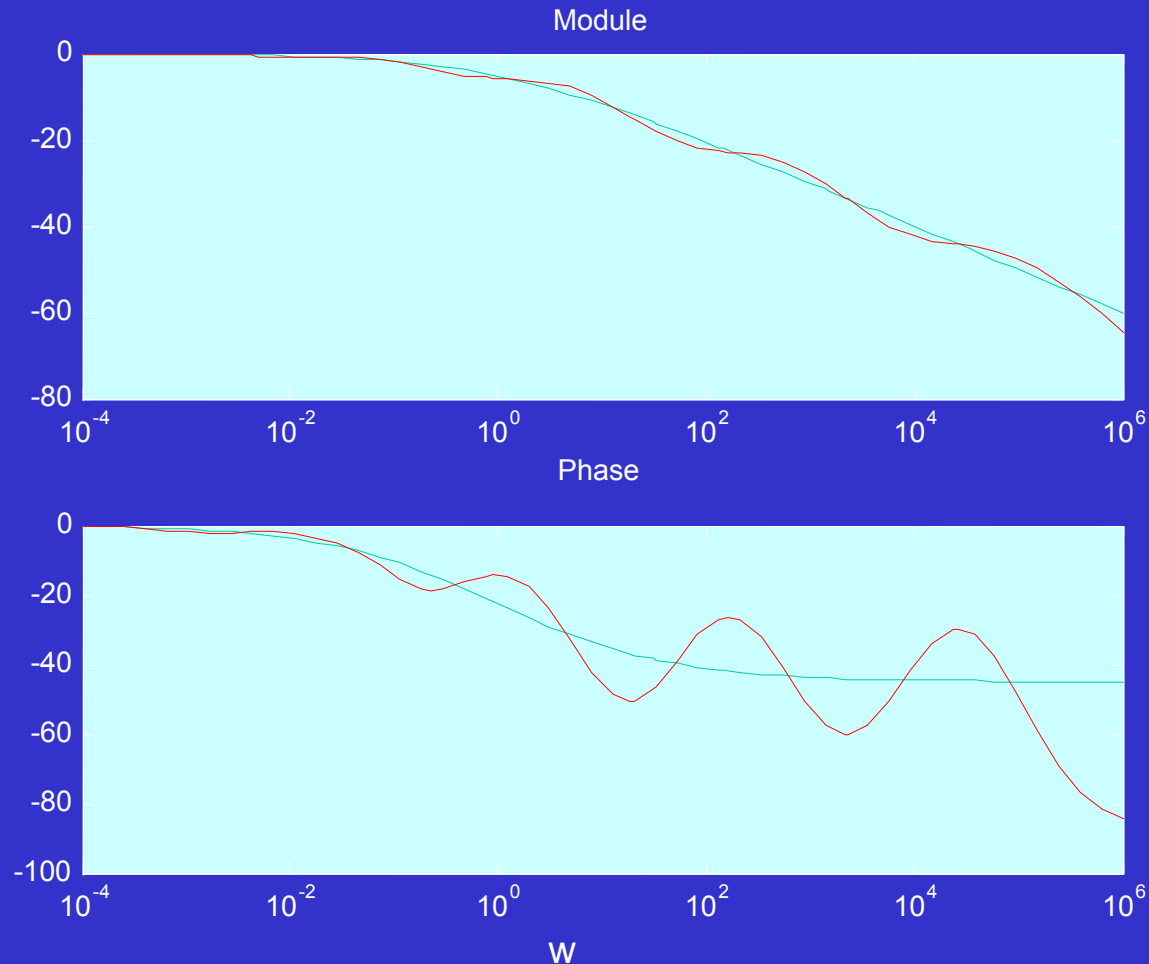
$$N = 5$$



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

Courbes de Bode

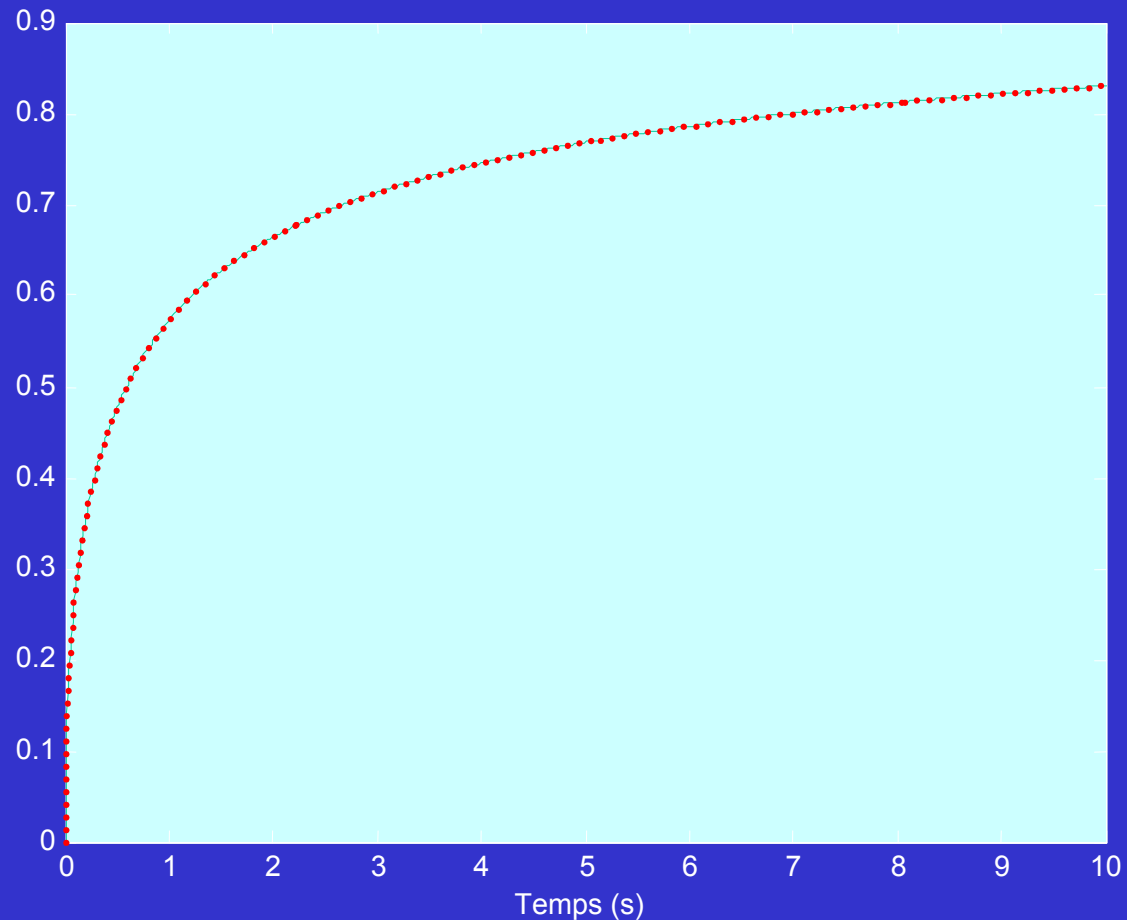
Intégrateur borné en fréquence et modèle exact - $N = 5$



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

Influence de l'intervalle fréquentiel

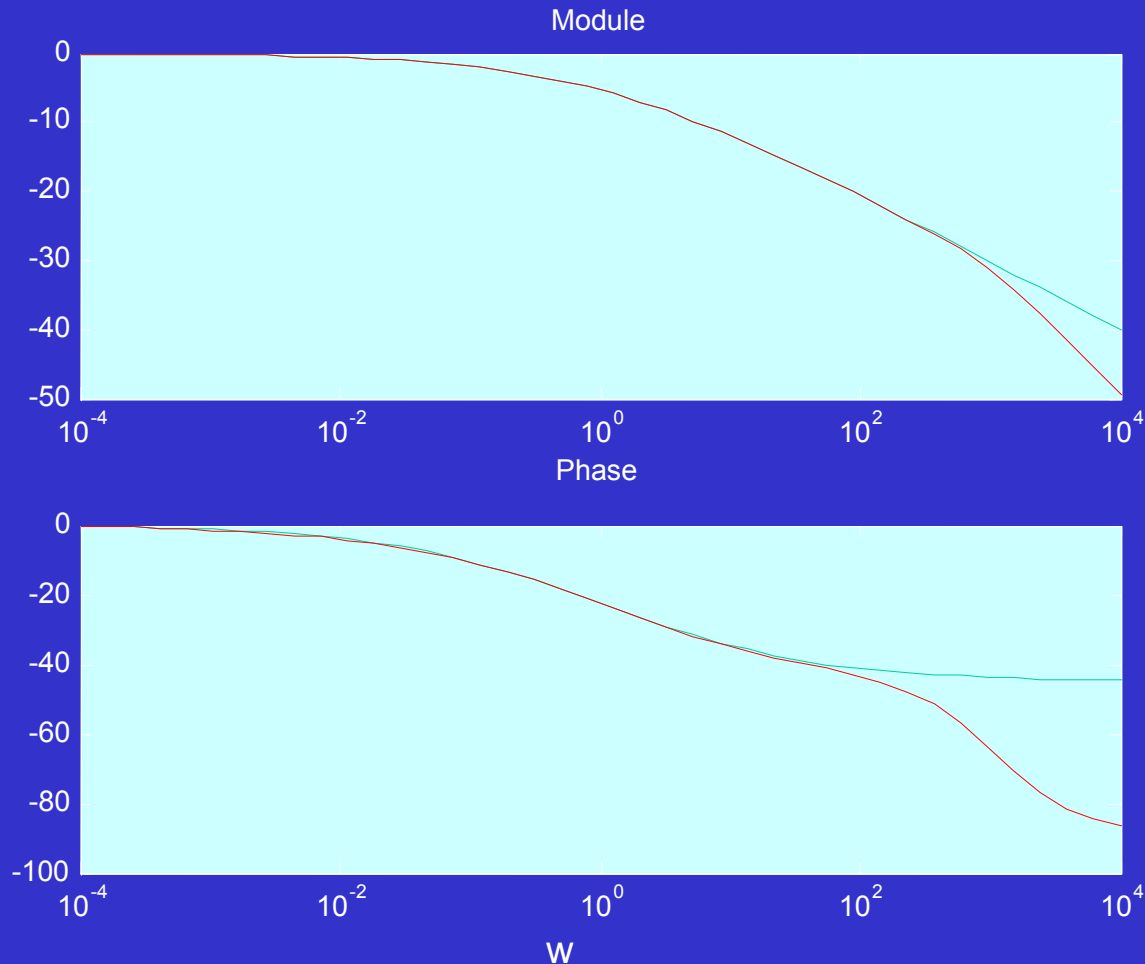
$$N = 30 \quad \omega'_1 = 10^{-3} \text{ rd / s} \quad \omega_N = 10^3 \text{ rd / s}$$



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

Courbes de Bode

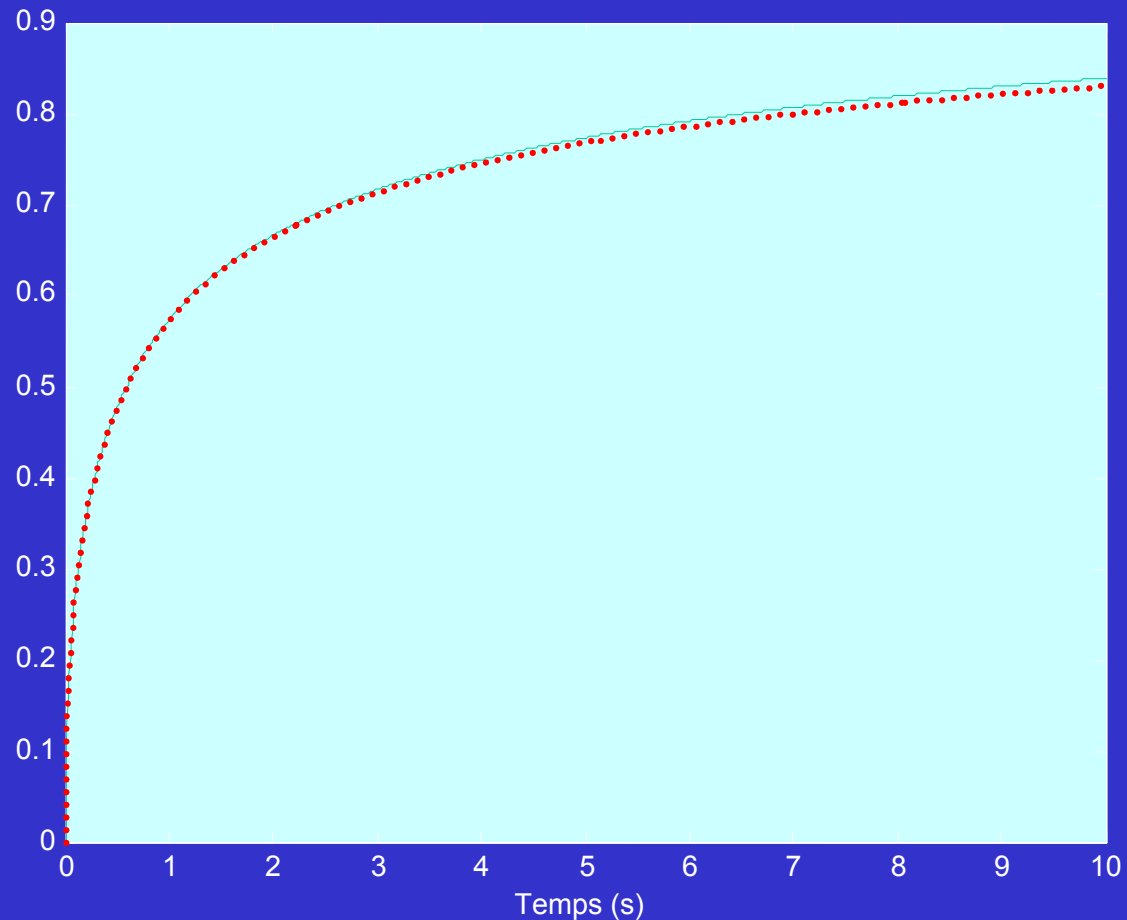
Intégrateur borné en fréquence et modèle exact



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

Influence de l'intervalle fréquentiel

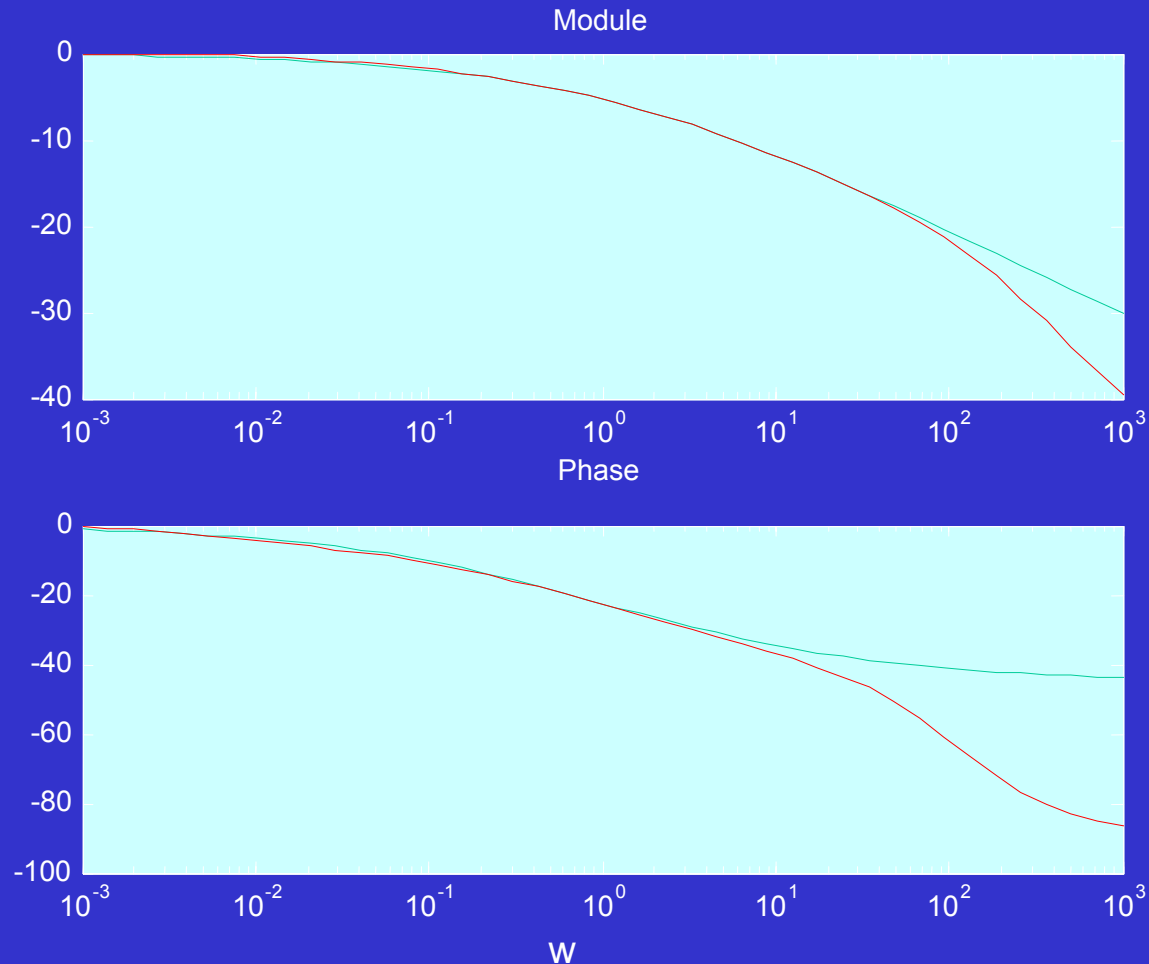
$$N = 30 \quad \omega'_1 = 10^{-2} \text{ rd / s} \quad \omega_N = 10^2 \text{ rd / s}$$



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

Courbes de Bode

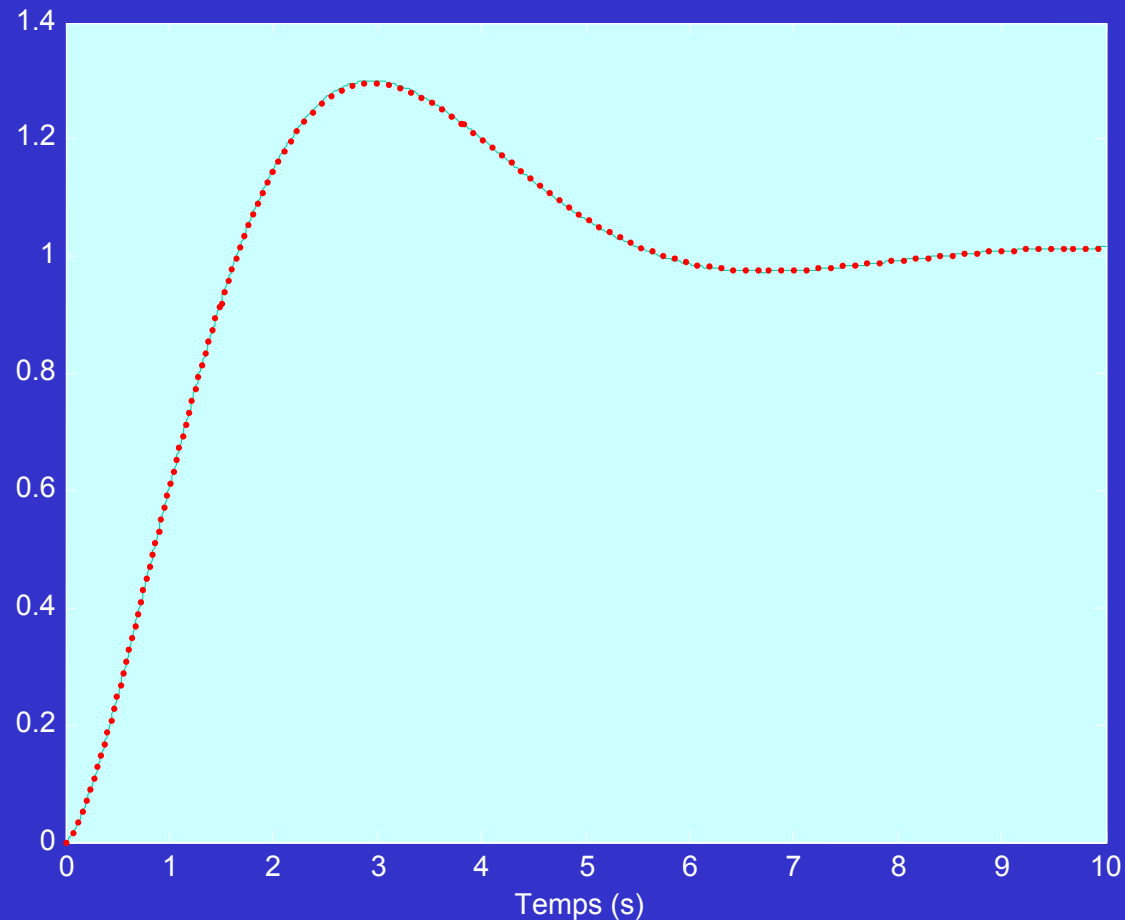
Intégrateur borné en fréquence et modèle exact



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

$$n = 1.5 \quad a_0 = 1 \quad b_0 = 1$$

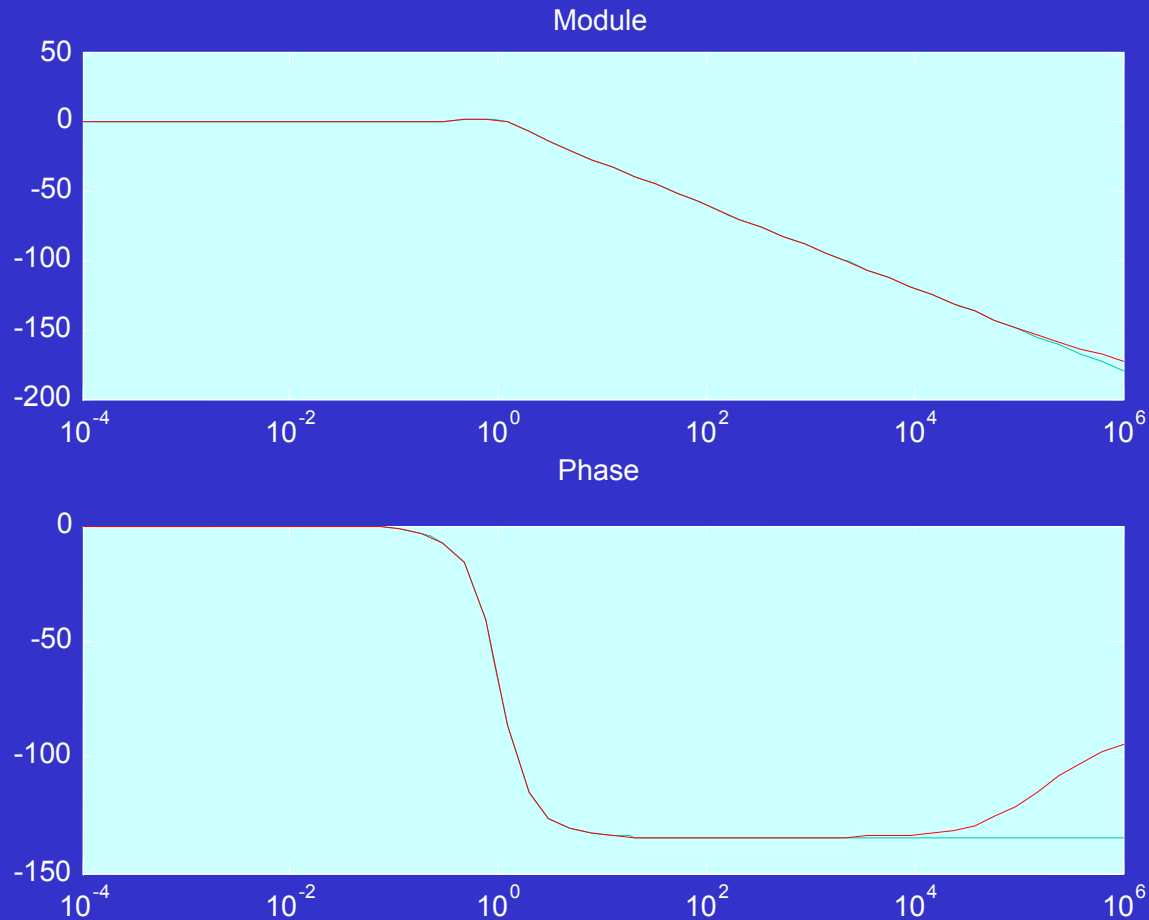
Approximation avec $N = 30$, $\omega'_1 = 10^{-5} \text{ rd/s}$ et $\omega_N = 10^5 \text{ rd/s}$



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

Courbes de Bode

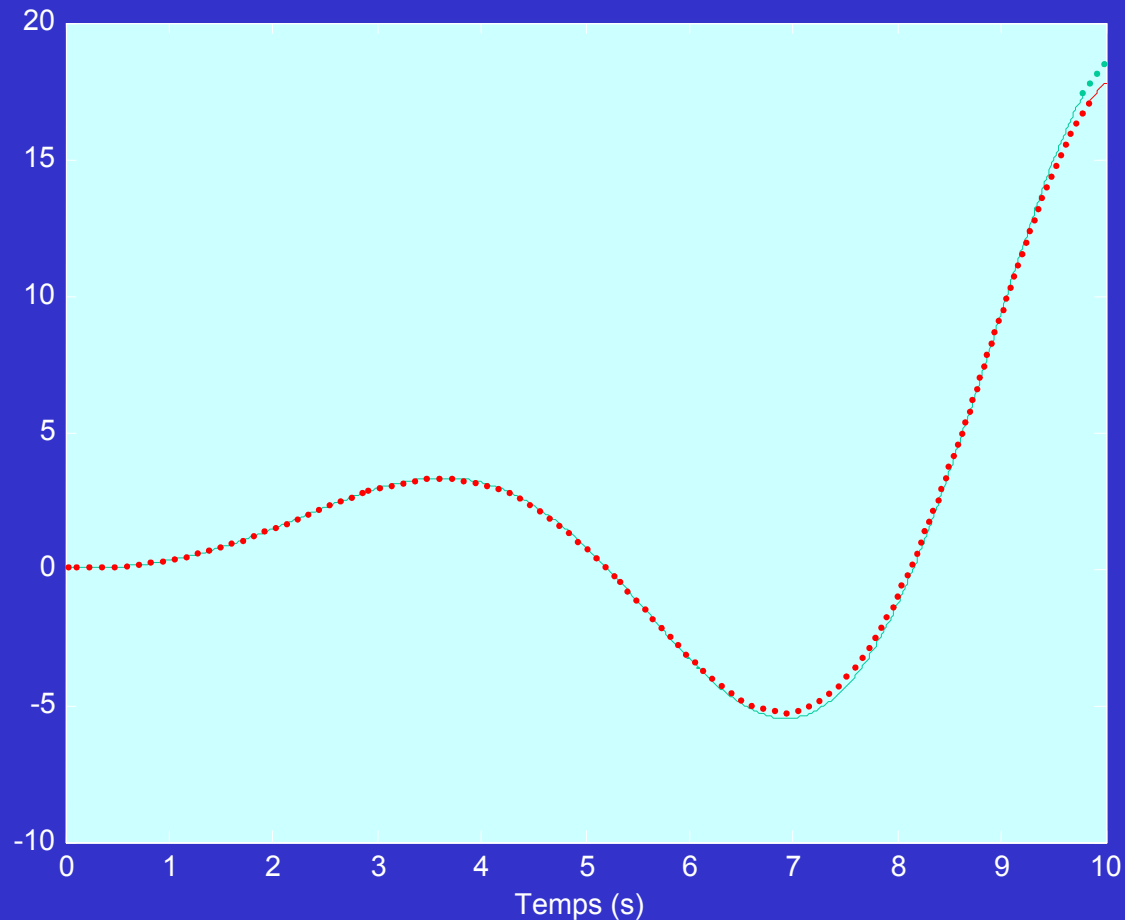
Intégrateur borné en fréquence et modèle exact - $N = 5$



Simulation de systèmes fractionnaires théoriques

$$n = 2.5 \quad a_0 = 1 \quad b_0 = 1$$

Approximation avec $N = 30$, $\omega'_1 = 10^{-5} \text{ rd/s}$ et $\omega_N = 10^5 \text{ rd/s}$



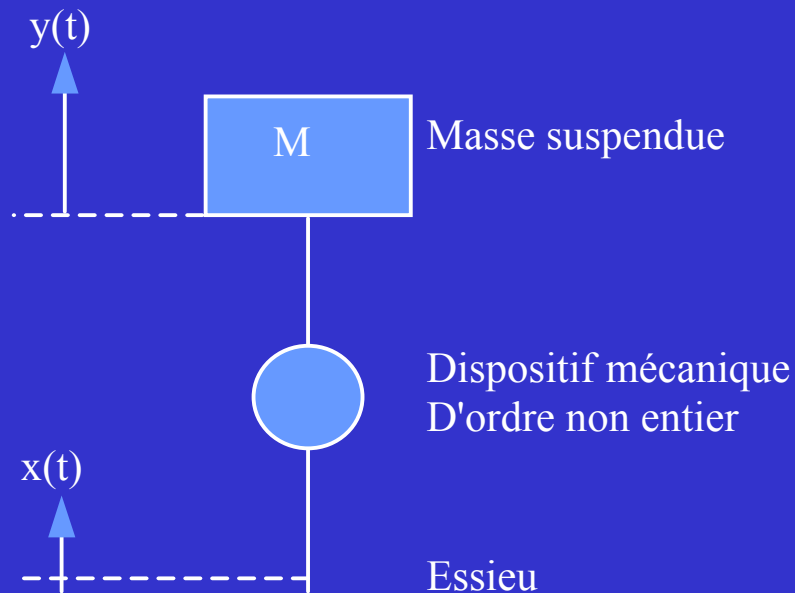
Simulation de systèmes fractionnaires à spectre borné

Autre intérêt

Systèmes partiellement non entier

L'intégrateur borné en fréquence permet de représenter ces systèmes et de les simuler

Exemple : La suspension CRONE



$$G(s) = \frac{\beta(s)}{1 + \beta(s)}$$

Simulation de systèmes fractionnaires à spectre borné

La transmittance en boucle ouverte de la suspension CRONE est approchée par :

$$\beta(s) = C'_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m \left(\frac{\omega_0'}{s} \right)^2$$

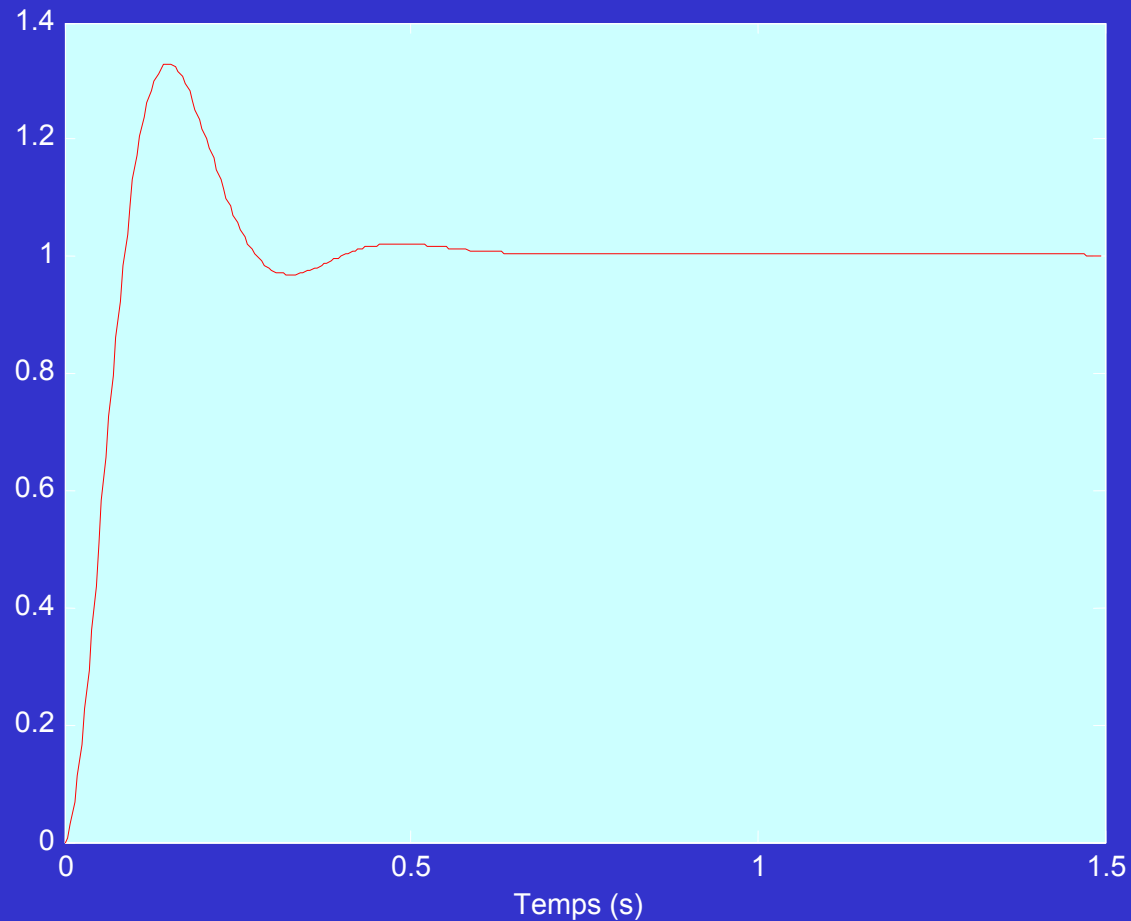
⇓

$$\beta(s) = \frac{C'_0 \omega_0'^2}{\omega_b^{2-n}} \frac{1}{s^2} \omega_b^{2-n} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{2-n}$$

Simulation de systèmes fractionnaires à spectre borné

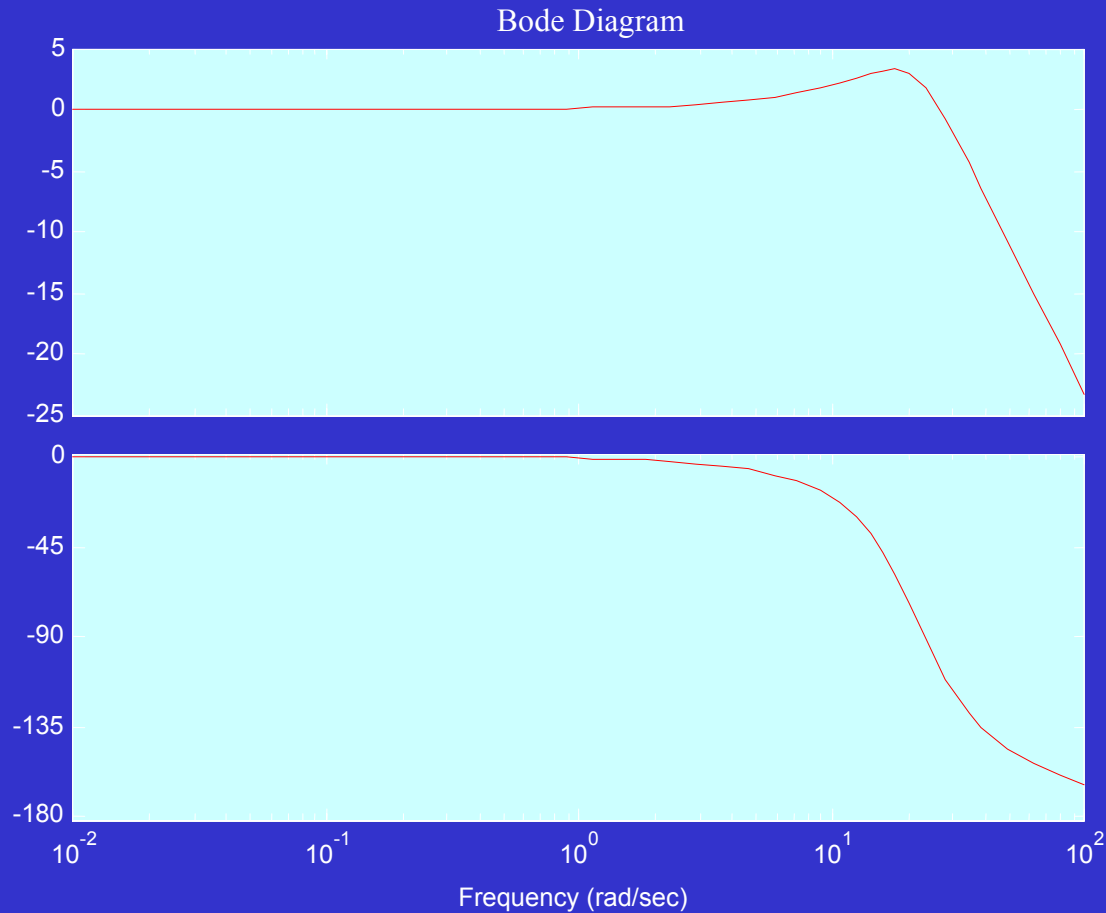
$$n = 1.39 \quad M = 300 \text{ kg} \quad T_e = 0.005 \text{ s} \quad N = 5$$

$$\omega'_1 = 0.5 \text{ rd/s} \quad \omega_N = 200 \text{ rd/s}$$



Simulation de systèmes fractionnaires à spectre borné

Courbes de Bode



Les pôles et les zéros du système non entier

Comparaison des pôles et des zéros du système non entier idéal et ceux du système fractionnaire à spectre borné

$$H(s) = \frac{b_0}{a_0 + s^n}$$

avec $a_0 = 1$, $b_0 = 1$

Approximation avec $\omega'_1 = 0.1 \text{ rd} / \text{s}$ et $\omega_N = 10 \text{ rd} / \text{s}$

Les pôles et les zéros du système non entier

$$0 < n < 1$$

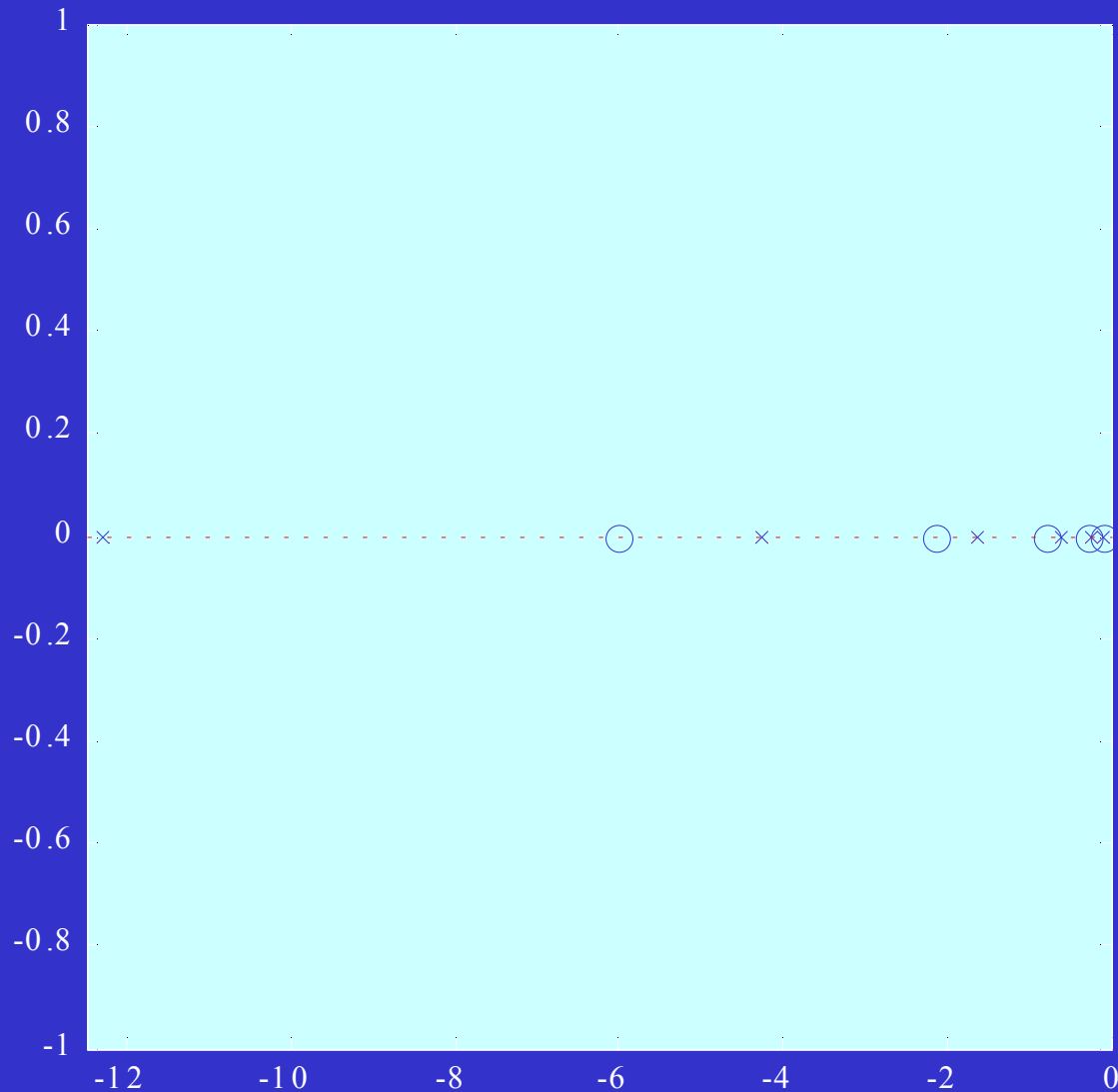
- ◆ Pas de pôle ni de zéro pour le système idéal
- ◆ Le modèle non entier à spectre borné ne possède que des pôles et des zéros alternés sur l'axe réel négatif, correspondant à l'intégrateur non entier à spectre borné

$$N = 5 \Rightarrow 6 \text{ pôles et } 5 \text{ zéros}$$

$$N = 10 \Rightarrow 11 \text{ pôles et } 10 \text{ zéros}$$

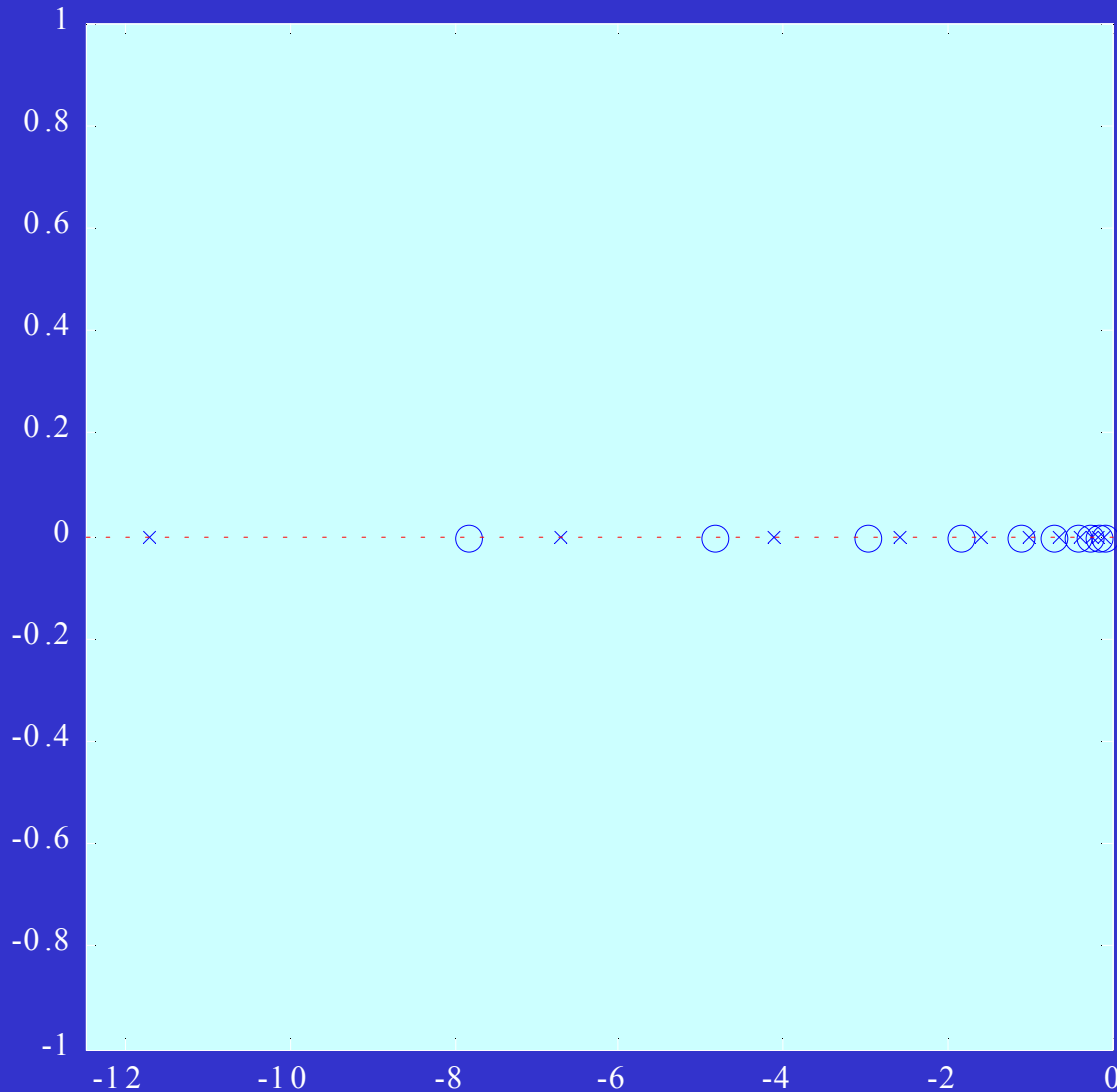
Les pôles et les zéros du système non entier

$n = 0.5, N = 5$



Les pôles et les zéros du système non entier

$n = 0.5, N = 10$



Les pôles et les zéros du système non entier

$$1 < n < 2$$

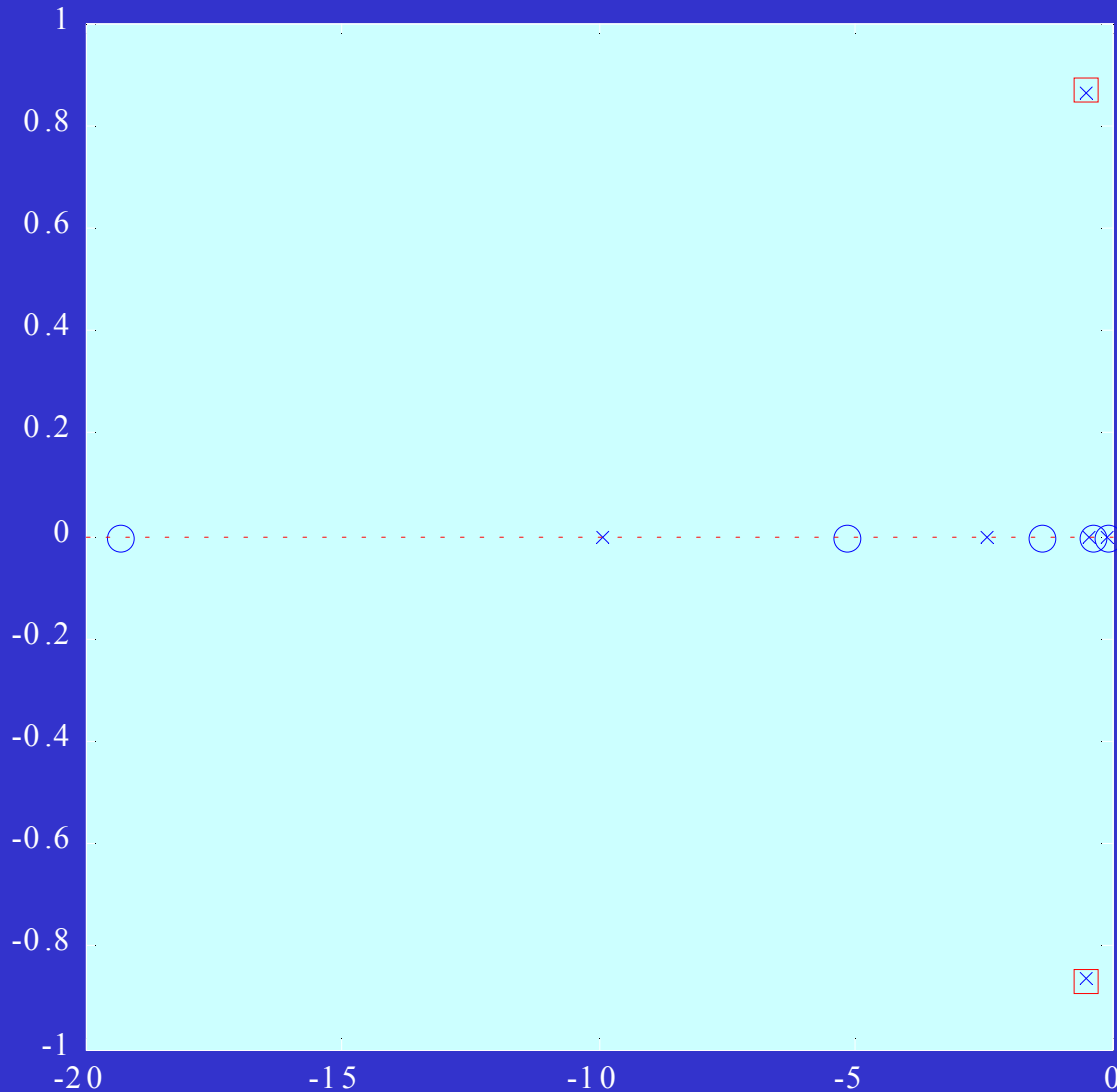
- ◆ 2 pôles à parties réelles négatives et pas de zéro pour le système idéal

$$n = 1.5 \Rightarrow p = -0.5 \pm j 0.866$$

- ◆ Le modèle non entier à spectre borné possède :
 - ◆ des pôles et des zéros alternés sur l'axe réel négatif, correspondant à l'intégrateur non entier à spectre borné
 - ◆ 2 pôles complexes très proches de ceux du système idéal

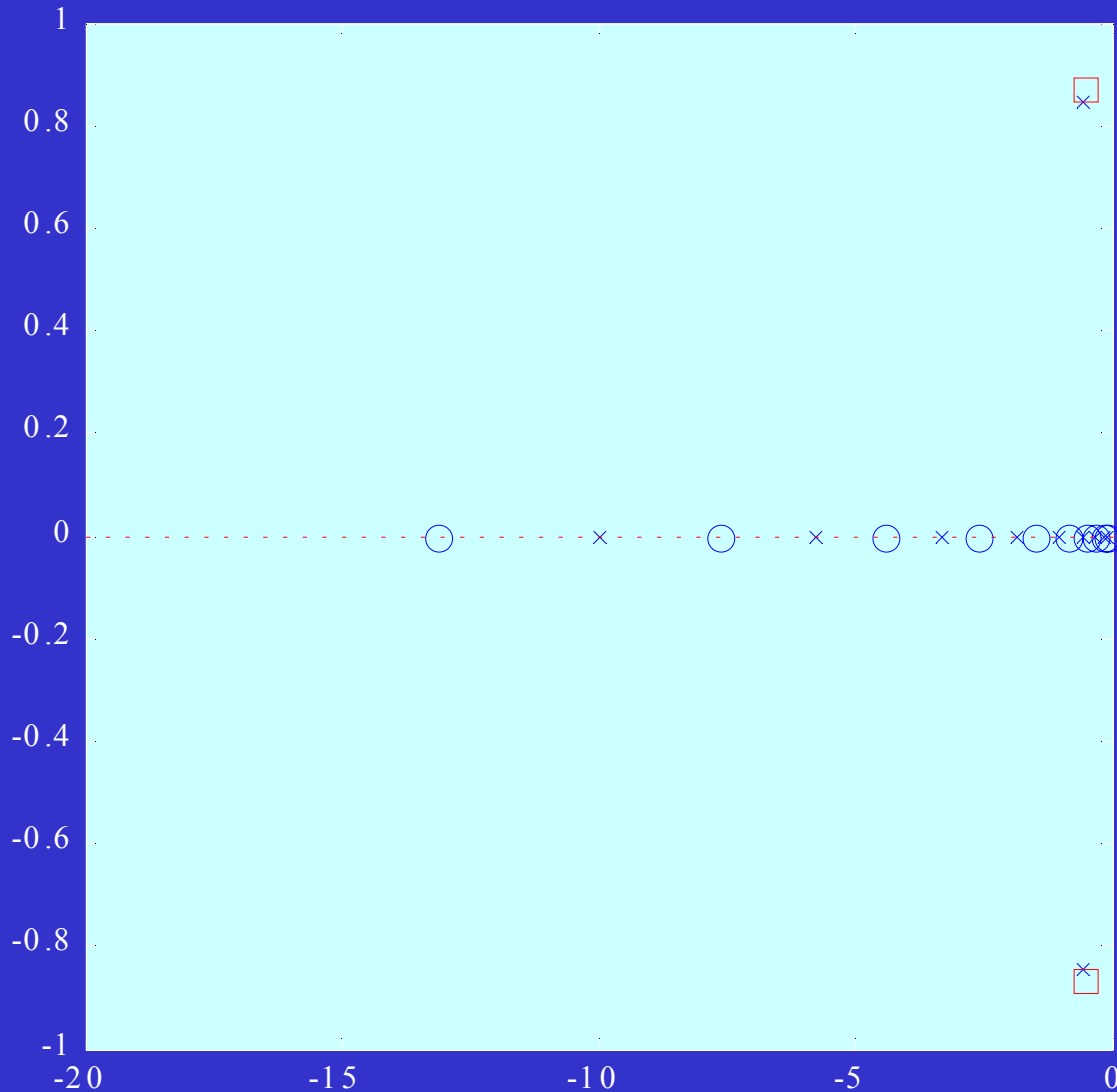
Les pôles et les zéros du système non entier

$n = 1.5, N = 5$



Les pôles et les zéros du système non entier

$n = 1.5, N = 10$



Les pôles et les zéros du système non entier

$n > 2$

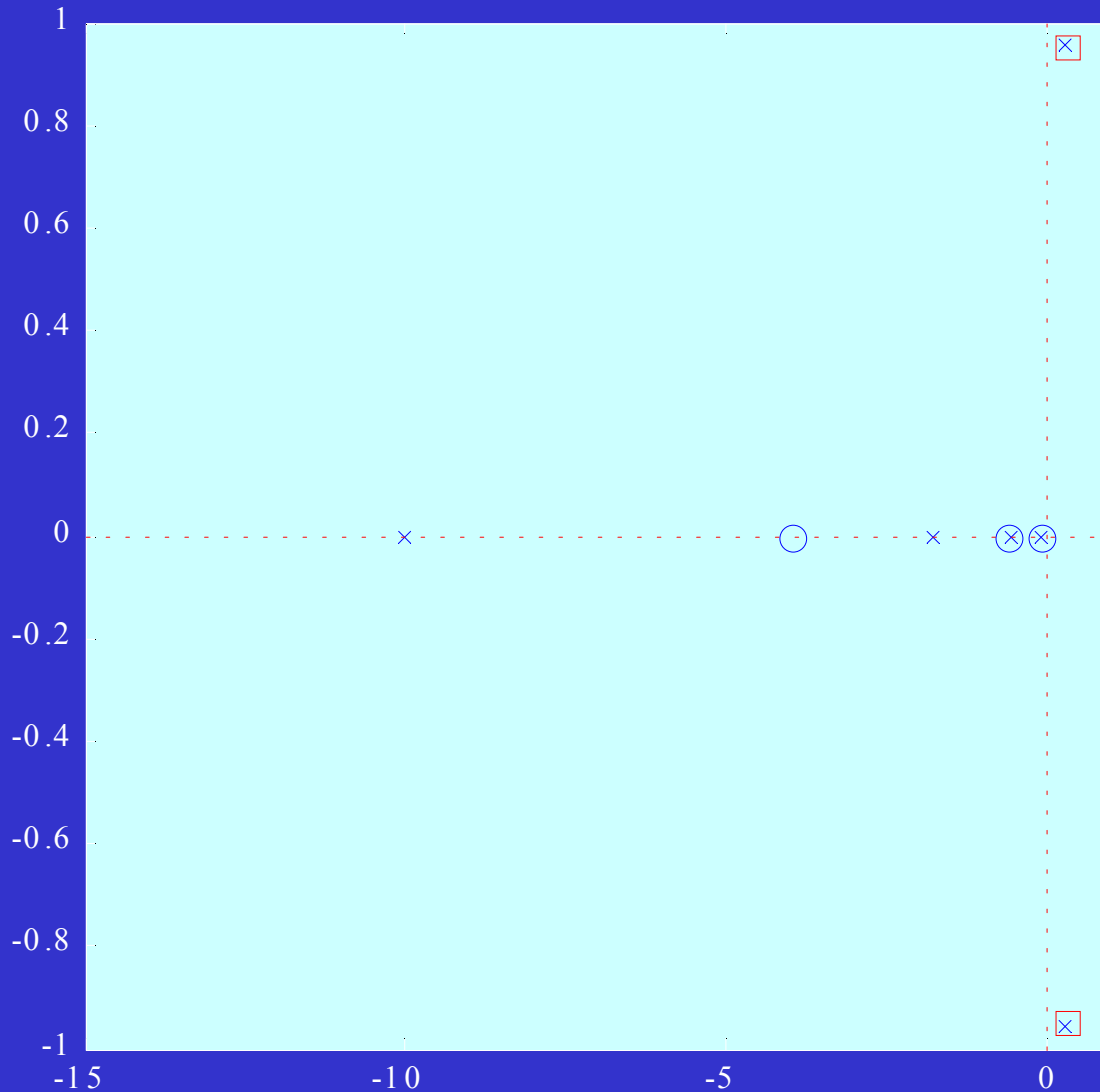
- ♦ 2 pôles à parties réelles positives et pas de zéro pour le système idéal

$$n = 2.5 \Rightarrow p = 0.309 \pm j 0.9511$$

- ♦ Le modèle non entier à spectre borné possède :
 - ♦ des pôles et des zéros alternés sur l'axe réel négatif, correspondant à l'intégrateur non entier à spectre borné
 - ♦ 2 pôles complexes instables très proches de ceux du système idéal

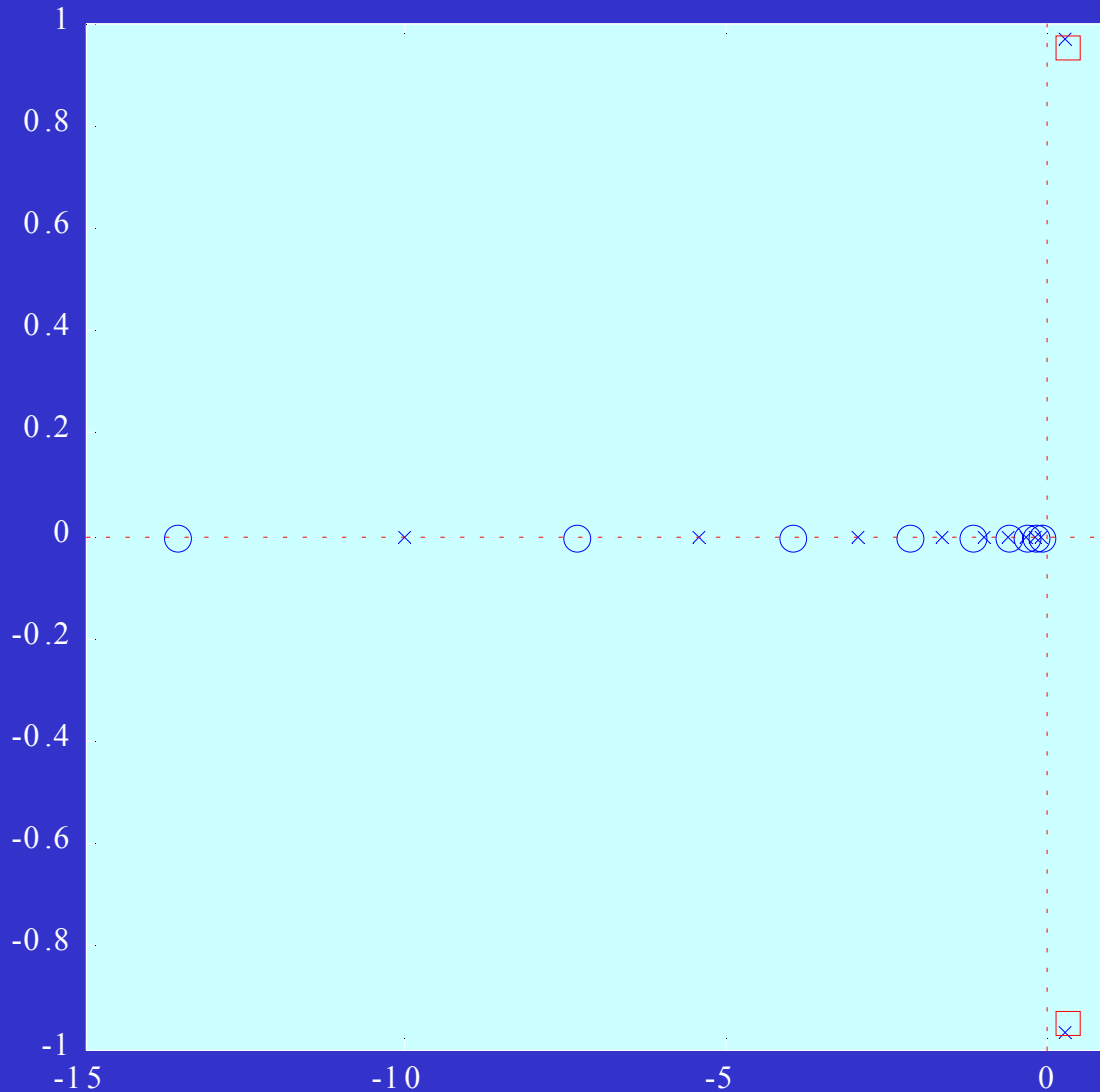
Les pôles et les zéros du système non entier

$n = 2.5, N = 5$



Les pôles et les zéros du système non entier

$n = 2.5, N = 10$



Les pôles et les zéros du système non entier

Comparaison des pôles et des zéros du système non entier idéal et ceux du système fractionnaire à spectre borné

$$H(s) = \frac{b_0 + s^n}{a_0 + a_1 s^n + s^{2n}}$$

avec $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $b_0 = 1$

Approximation avec $\omega'_1 = 0.01 \text{ rd} / \text{s}$ et $\omega_N = 10 \text{ rd} / \text{s}$

Les pôles et les zéros du système non entier

$$0 < n < 1$$

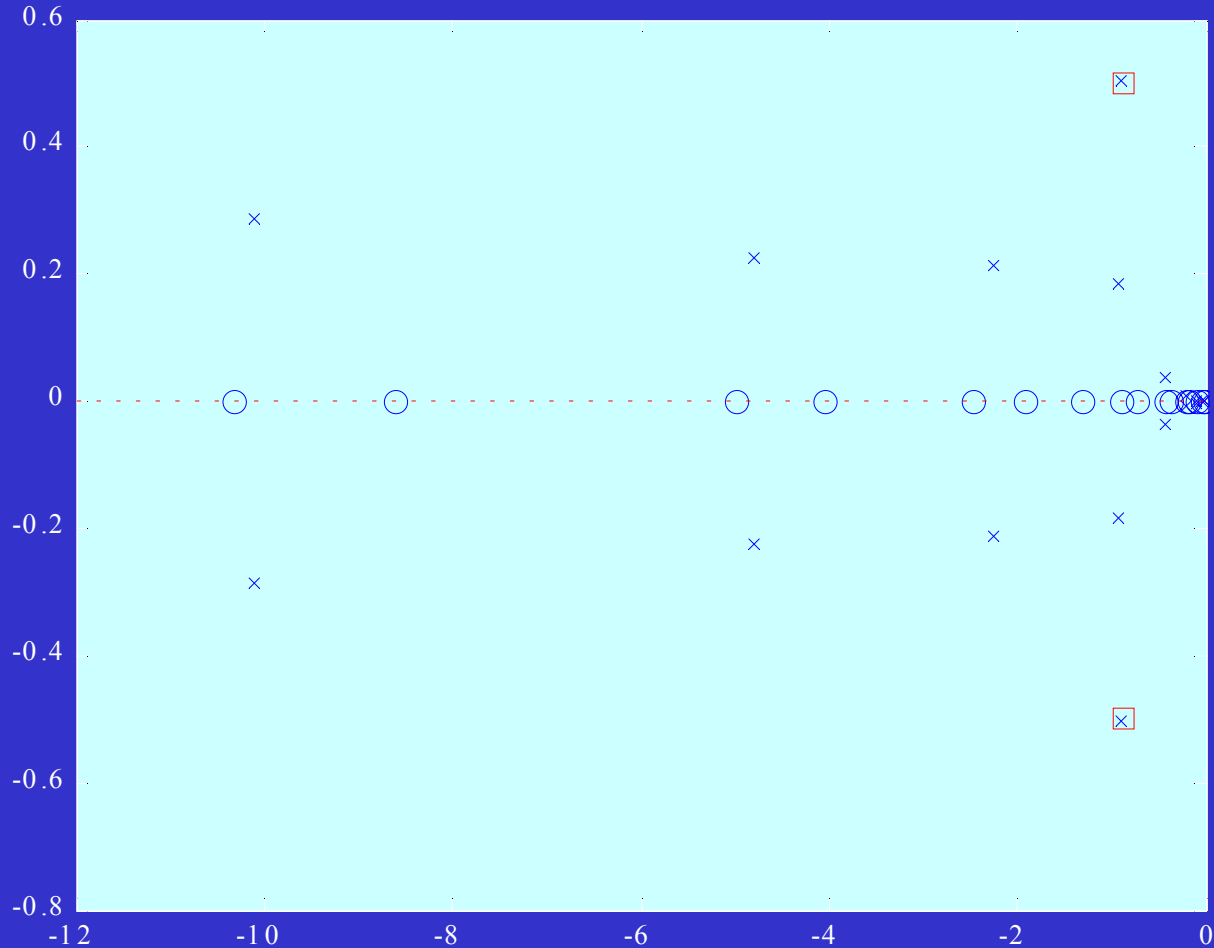
- ◆ 2 pôles à parties réelles négatives et pas de zéro pour le système idéal

$$n = 0.8 \Rightarrow p = -0.866 \pm j 0.5$$

- ◆ Le modèle non entier à spectre borné possède :
 - ◆ des pôles et des zéros alternés sur l'axe réel négatif, correspondant à l'intégrateur non entier à spectre borné
 \Rightarrow les pôles sont complexes conjugués
 - ◆ 2 pôles complexes très proches de ceux du système idéal

Les pôles et les zéros du système non entier

$n = 0.8, N = 10$



Conclusion

Intégrateur fractionnaire à spectre borné :

- ◆ Permet la simulation des systèmes d'ordre non entier et des systèmes partiellement non entier
- ◆ On utilise un nombre restreint de paramètres pour la modélisation
- ◆ Un système entier d'ordre élevé (mais non infini) est utilisé pour la simulation
- ◆ L'observation des pôles et des zéros permet de retrouver le comportement théorique du système non entier