

Approximation d'un modèle d'ordre non entier : application à la suspension passive CRONE

Nicolas Guijarro et Geneviève Dauphin-Tanguy
LAIL, Ecole Centrale de Lille
Cité Scientifique - BP 48
59651 Villeneuve d'Ascq Cedex
nicolas.guijarro@ec-lille.fr

Résumé

Nous proposons ici une méthode d'approximation-réduction-réalisation d'un intégrateur implicite d'ordre non entier par un bond graph. Celle-ci est ensuite appliquée au cas d'une suspension CRONE.

1 Intégrateur implicite d'ordre non entier

Des modèles du type de l'intégrateur implicite apparaissent dans diverses applications : impédances polarisées, interfaces et diélectriques, lignes de transmission, rythme cardiaque [2] et impédance fractale hydraulique [4], pour en citer quelques unes.

Le modèle d'un intégrateur implicite est donné par :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \quad \text{avec } p_T : \text{ constante de relaxation } , \alpha : \text{ ordre, } 0 < \alpha \leq 1. \quad (1)$$

Pour les applications numériques nous utilisons $p_T = 5$ et $\alpha = 0.5$.

1.1 Approximation

Un grand réseau en échelle (du type *Cauer* [3]) proposé par [4], composé de 150 capacités et autant de résistances, conduit à un approximant de (1) avec une erreur absolue sur le gain inférieure à 10^{-15} dB sur la bande de fréquence $[0, 100 \text{ Hz}]$. Les valeurs des paramètres sont celles d'un approximant de *Padé* d'ordre $[149/150]$ en $s = 0$. Ce modèle d'ordre 150 est notre point de départ pour la réduction et la réalisation. Notre cahier des charges s'exprime en termes d'erreur relative sur le gain et d'erreur absolue sur la phase. Le modèle réduit final devra garantir une erreur relative en gain inférieure à 0,5% et une erreur absolue en phase inférieure à $0,5 \text{ rad.s}^{-1}$.

1.2 Réduction

Pour obtenir le modèle réduit, nous appliquons l'algorithme de *Krylov-Lanczos* rationnel avec les points d'interpolation¹: $s_1 = \sigma_1 = 0$, $s_2 = \sigma_2 = 160$ et $s_3 = \sigma_3 = 375$ ($s_i = \sigma_i + j\omega_i$). Deux moments sont vérifiés par point d'interpolation donc l'ordre de l'approximant est de six.

Les points d'interpolation sont choisis de façon à minimiser l'erreur H_∞ sur la bande de fréquence $[0, 100 \text{ Hz}]$. Concrètement le premier point d'interpolation est tel que l'erreur H_∞ est minimale pour un approximant d'ordre 2. Ce même point est conservé pour construire l'approximant d'ordre 4 et le point supplémentaire est tel que l'erreur est minimale. Le dernier point est choisi de façon similaire. Nous avons remarqué que parmi les approximants d'ordre $2n$, celui minimisant l'erreur H_∞ sur la bande de fréquence $[0, 100 \text{ Hz}]$ partage les mêmes points d'interpolation que celui d'ordre $2(n - 1)$ qui minimise l'erreur H_∞ sur la même bande de fréquence.

En conséquence, le choix des points d'interpolation d'un approximant d'ordre $2n$ revient à reprendre ceux de l'approximant d'ordre $2(n - 1)$ et à y ajouter un point.

Dans notre cas, pour obtenir un approximant d'ordre 6, cela revient à choisir 3 points d'interpolation. Les figures 1 et 2 présentent une comparaison, en termes d'erreur relative en gain et absolue en phase, des approximants obtenus pour des ordres variants entre 4 et 8. Il est à remarquer que l'approximant d'ordre 8 n'est pas optimal puisque nous avons choisi 2 points et 4 moments par point. Les figures 3 et 4 présentent quant à elles ces mêmes

¹Le choix des points est heuristique.

erreurs pour l'approximant choisi, i.e. $H_{kl}^6(s)$ (modèle réduit par la méthode de *Krylov-Lanczos*).

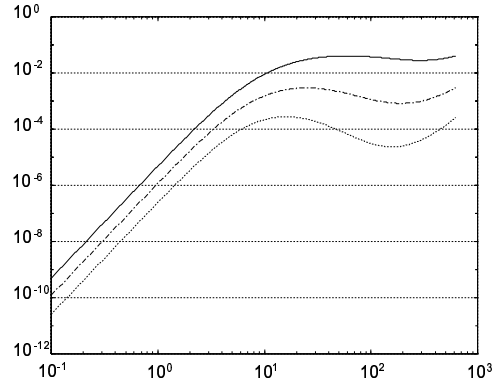


Figure 1: Erreur de gain relative pour des approximants du 4^e ordre (2 pts : s_1 et s_2) (—), du 6^e ordre (3 pts : s_1 , s_2 et s_3) (---) et du 8^e ordre (2 pts : s_1 et s_2) (- -).

La vérification, *a posteriori*, de la passivité du modèle réduit est réalisée grâce à un test de passivité ([1]) sur la fonction de transfert $H_{kl}^n(s)$.

Le tableau 1 donne le résultat d'un développement en éléments simples de $H_{kl}^6(s)$.

$$H_{kl}^6(s) = \sum_{i=1}^6 r_i \cdot \frac{1}{s - p_i}. \quad (2)$$

Pôles (p_i)	Résidus (r_i)
-5922, 0	223, 54
-557, 52	26, 878
-138, 32	11, 067
-37, 507	6, 1679
-11, 060	3, 2938
-5, 4658	2, 0321

Tableau 1: Développement en éléments simples

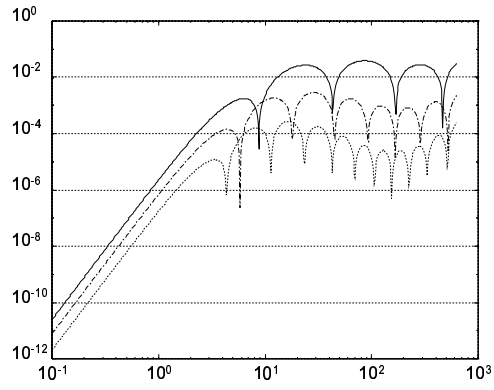


Figure 2: Erreur de phase absolue pour des approximations du 4^e ordre (-), du 6^e ordre (-.) et du 8^e ordre (..).

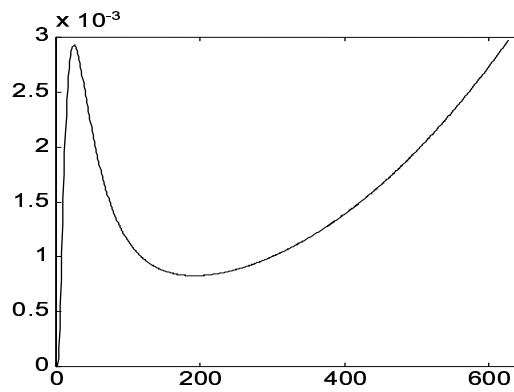


Figure 3: Erreur relative sur $|H_{kl}^6(j\omega)|$ (%) en fonction de $\omega(\text{rad.s}^{-1})$.

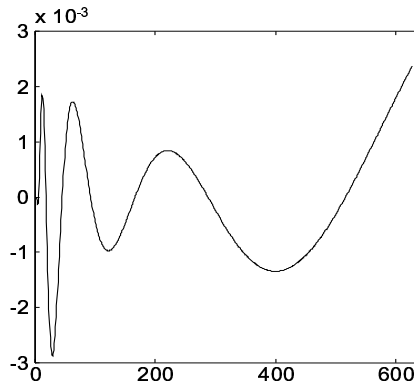


Figure 4: Erreur de phase absolue (rad) en fonction de ω (rad.s^{-1}).

1.3 Réalisation

La somme (2) peut être réalisée par une connexion en série de cellules R - C en parallèle.

La réalisation bond graph est donnée par la figure 5.

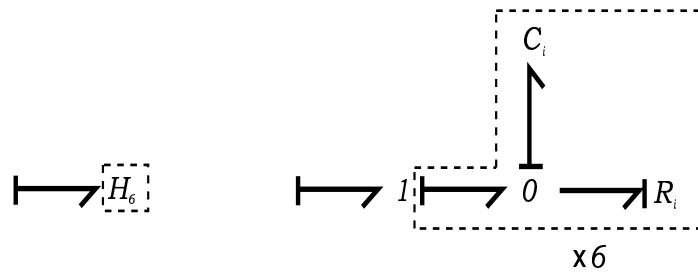


Figure 5: Bond graph de $H_{kl}^6(s)$ correspondant au modèle réduit d'une impédance fractale.

La section suivante présente une méthode développée par *A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao and B. Onaral* [2] puis une comparaison est faite avec celle faisant appel à la méthode de *Krylov-Lanczos*.

2 La suspension *CRONE*

2.1 Principe

Le rôle de la suspension d'un véhicule automobile est d'assurer le meilleur confort possible aux passagers, en stabilisant la caisse, malgré les imperfections de la route tout en assurant un niveau de sécurité optimal. Pour atteindre un tel objectif un compromis est nécessaire entre confort et tenue de route et suivant le type de suspension utilisée (passive, semi-active et active) différentes performances sont atteintes. Par exemple une suspension active permettra d'obtenir des performances accrues au prix d'une fiabilité plus faible et d'un coût d'implantation plus grand. Nous ne nous intéressons ici qu'aux suspensions passives puisque les éléments fonctionnels que nous considérons doivent être passifs. Plus précisément nous comparons une suspension mécanique classique à une suspension basée sur un système mécanique d'ordre non entier dite suspension *CRONE* [5]. Nous nous intéressons uniquement au comportement de la suspension en basses fréquences et nous négligeons les modes de roue.

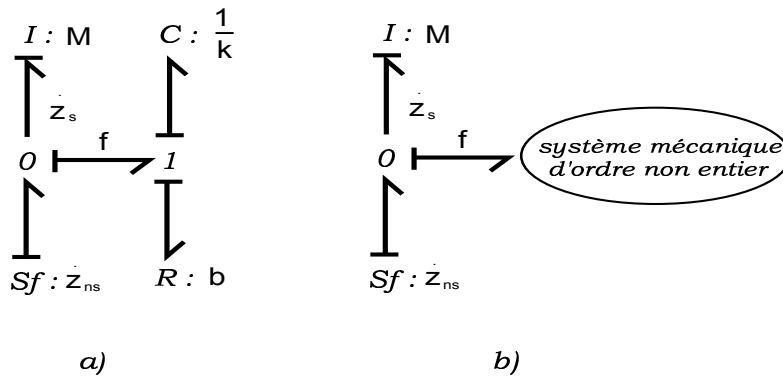


Figure 6: Modèles bond graph d'un quart de suspension mécanique classique a) et d'une suspension *CRONE* b).

La suspension (cf. figure 6) permet de générer un effort $f(t)$ qui est une fonction du déplacement relatif entre la partie suspendue $z_s(t)$ (déplacement de M) et la partie non suspendue $z_{ns}(t)$ (déplacement de la roue). Dans le

cas d'une suspension mécanique classique l'effort $f(t)$ (cas a) de la figure 6) est donné par :

$$f(t) = k(z_{ns}(t) - z_s(t)) + b \frac{d}{dt}(z_{ns}(t) - z_s(t)),$$

où k est la raideur de la suspension et b son amortissement.

Pour la suspension *CRONE*, l'effort et le déplacement relatif entre la caisse et la roue sont reliés par :

$$F(s) = C(s)(Z_{ns}(s) - Z_s(s)),$$

où $C(s)$ est la transmittance de la suspension que nous définirons par la suite.

Si nous supposons qu'un décollement de la roue du sol n'est pas possible et que les déplacements sont mesurés par rapport à une position d'équilibre statique alors l'application du principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$M \left(\frac{d}{dt} \right)^2 z_s(t) = f(t).$$

La transformée de *Laplace* appliquée à cette expression donne :

$$Ms^2 Z_s(s) = F(s).$$

L'analyse de l'isolation vibratoire se fait à travers l'étude de deux transmittances :

$$T(s) = \frac{Z_s(s)}{Z_{ns}(s)} \text{ et } S(s) = \frac{Z_{ns}(s) - Z_s(s)}{Z_{ns}(s)} = 1 - T(s).$$

$T(s)$ correspond à la poursuite et $S(s)$ à la régulation.

Pour une suspension classique on a :

$$T(s) = \frac{k + bs}{k + bs + Ms^2} \text{ et } S(s) = \frac{Ms^2}{k + bs + Ms^2},$$

et pour la suspension *CRONE* :

$$T(s) = \frac{C(s)}{C(s) + Ms^2} \text{ et } S(s) = \frac{Ms^2}{C(s) + Ms^2}.$$

La synthèse de la suspension se résume à la construction d'une transmittance $\beta(s)$ définie par :

$$\beta(s) = \frac{C(s)}{Ms^2}.$$

Ce qui permet de réécrire T et S en fonction de β :

$$T(s) = \frac{\beta(s)}{1 + \beta(s)} \text{ et } S(s) = \frac{1}{1 + \beta(s)},$$

ici β est la transmittance en boucle ouverte.

Nous souhaitons idéalement pouvoir conserver un facteur d'amortissement constant dans une certaine bande de fréquence indépendamment de la valeur de masse suspendue. En d'autres termes, le facteur d'amortissement doit être robuste par rapport à une modification de la charge. Cela revient à définir le cahier des charges suivant pour la transmittance $\beta(s)$:

- le comportement en basse fréquences doit être asymptotiquement celui d'un deuxième ordre pour éliminer l'erreur de poursuite,
- le comportement autour de la fréquence ω_u , correspondant à un gain unité, doit être asymptotiquement d'ordre α où $1 < \alpha < 2$. Ceci limite la synthèse du dérivateur d'ordre non entier à un intervalle de fréquence,
- le comportement en hautes fréquences doit être asymptotiquement celui d'un filtre du premier ordre pour filtrer les vibrations de fréquences élevées.

Une transmittance vérifiant ce cahier des charges est de la forme :

$$\beta(s) = C_0 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_b}\right)^{\alpha'}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_h}\right)^{\alpha'-1}} \left(\frac{\omega_0}{s}\right)^2,$$

où :

$$\omega_b \ll \omega_A, \omega_B \ll \omega_h \text{ et } \alpha' = 2 - \alpha \in]0, 1[.$$

ω_A et ω_B sont les limites du comportement de type dérivateur non entier (phase constante) et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{M}}$ et :

$$C(s) = \frac{F(s)}{Z_{ns}(s) - Z_s(s)} = C_0 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_b}\right)^{\alpha'}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_h}\right)^{\alpha'-1}}. \quad (3)$$

2.2 Réduction

Pour pouvoir implanter le contrôleur défini par (3) il est nécessaire de l'approcher, ce qui conduit à la transmittance d'ordre entier [5] :

$$C_N(s) = C_0 \frac{\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{\omega_i}\right)}{\prod_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{\omega_i}\right)}, \quad (4)$$

où :

$$\frac{\omega'_{i+1}}{\omega'_i} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \gamma\eta > 1, \quad \frac{\omega_i}{\omega'_i} = \gamma, \quad \frac{\omega'_{i+1}}{\omega_i} = \eta, \quad \gamma\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{1}{N}}, \quad (5)$$

$$\gamma = (\gamma\eta)^{\alpha'}, \quad \omega'_1 = \omega_b\eta^{\frac{1}{2}} \text{ et } \omega_N = \omega_h\eta^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

[5] présente un exemple numérique et une discussion des performances.

Afin de comparer le modèle réduit défini par (4) et à un autre obtenu par la méthode de *Krylov-Lanczos* nous avons, comme pour l'intégrateur implicite, construit un modèle approché d'ordre élevé que nous avons ensuite réduit. Plus précisément nous avons étudié :

$$H_{100}(s) = \frac{1}{C_0} \frac{\prod_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{\omega_i}\right)}{\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{\omega_i}\right)} = \frac{\omega_{100}\eta^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{N-1} (s + \omega_i)}{C_0\gamma^{100} \prod_{i=1}^N (s + \omega'_i)},$$

$$H_{100}(s) = \frac{\omega_{100}\eta^{-\frac{1}{2}}}{C_0\gamma^{100}} \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{s + \omega'_i}, \quad (7)$$

avec $r_i = H_{100}(s)(s + \omega'_i)|_{s=\omega'_i}$.

Les figures 7, 8, 9 et 10 confirme qu'un modèle d'ordre 100 est suffisant pour effectuer la réduction.

Nous déduisons aisément de (7) une réalisation modale qui permet d'alimenter l'algorithme de *Krylov-Lanczos*. Les figures 11, 12, 13 et 14 présentent les erreurs relatives en gains et absolues en phases pour différents choix de points d'interpolation.

La fonction de transfert du modèle réduit est donnée par :

$$H_6^{kl}(s) = \sum_{i=1}^6 r_i \frac{1}{s - p_i},$$

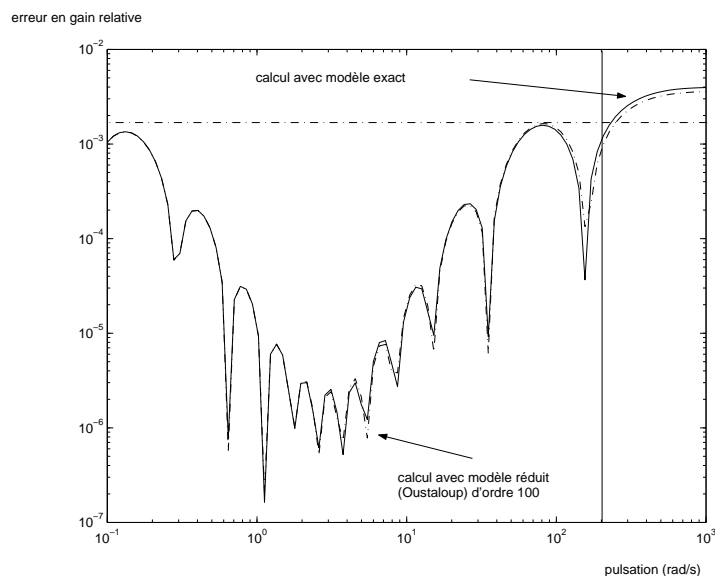


Figure 7: Comparaison des erreurs relatives en gain avec le modèle original et le modèle réduit d'ordre 100 pour un modèle réduit (un point d'interpolation).

où les paramètres p_i et r_i sont donnés dans le tableau 2.

Remarque : Les conditions initiales du modèle d'ordre non entier sont ici choisies nulles ce qui entraîne la nullité des conditions initiales du modèle approché (cf. communication *Commande CRONE de deuxième génération en boucle fermée avec conditions initiales non nulles : approximation et réalisation dans le cas passif* pour des conditions initiales non nulles).

Les définitions (5) et (6) des pôles et zéros de (3) montrent qu'ils sont entrelacés ce qui constitue une condition suffisante pour l'existence d'une réalisation passive par éléments dissipatifs et capacitifs.

3 Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'approximation-réduction-réalisation d'un intégrateur implicite d'ordre non entier par un bond graph. L'application de

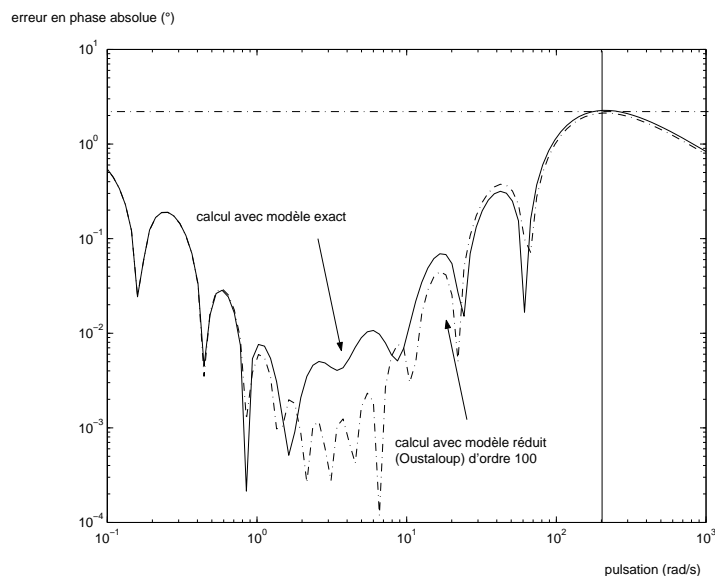


Figure 8: Comparaison des erreurs absolues en phase avec le modèle original et le modèle réduit d'ordre 100 pour un modèle réduit (un point d'interpolation).

cette méthode à la suspension CRONE a permis d'en faire ressortir ses particularités. Notamment l'introduction des points d'interpolation qui donne la possibilité de pondérer l'erreur lors de l'étape de réduction.

Références

- [1] Z. Bai and R.W. Freund. Eigenvalue-Based and Characterization and Test for Positive Realness of Scalar Transfer Functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(12): 2393–2396, December 2000.
- [2] A. Charef, H. H. Sun, Y. Y. Tsao, and B. Onaral. Fractal System as Represented by Singularity Function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9): 1465–1470, September 1992.
- [3] E. A. Guillemin. *Synthesis of Passive Networks*. John Wiley and Sons, New York, 1957.

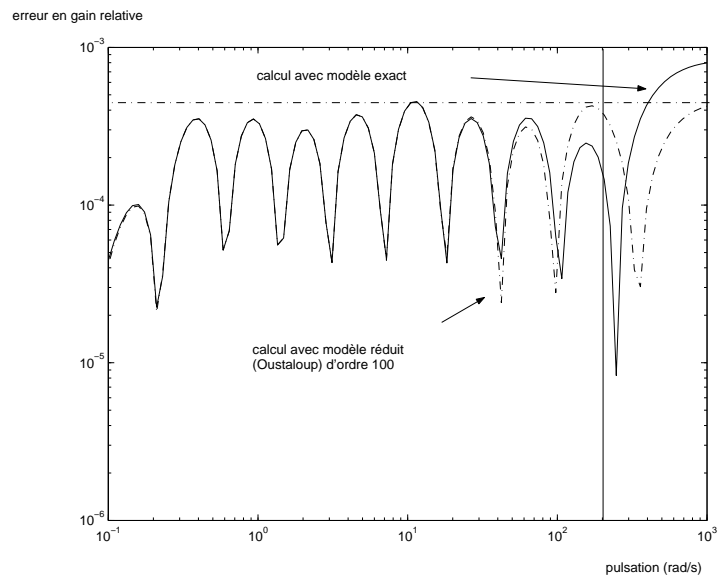


Figure 9: Comparaison des erreurs relatives en gain avec le modèle original et le modèle réduit d'ordre 100 pour un modèle réduit (trois points d'interpolation).

- [4] Laurent Lefèvre. De l'introduction d'éléments fonctionnels dans la théorie des bond graphs, 1999.
- [5] A. Oustaloup, J. Sabatier, and X. Moreau. From Fractal robustness to the CRONE Approach. *ESIAM: Proceedings of Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, 5: 177–192, 1998.

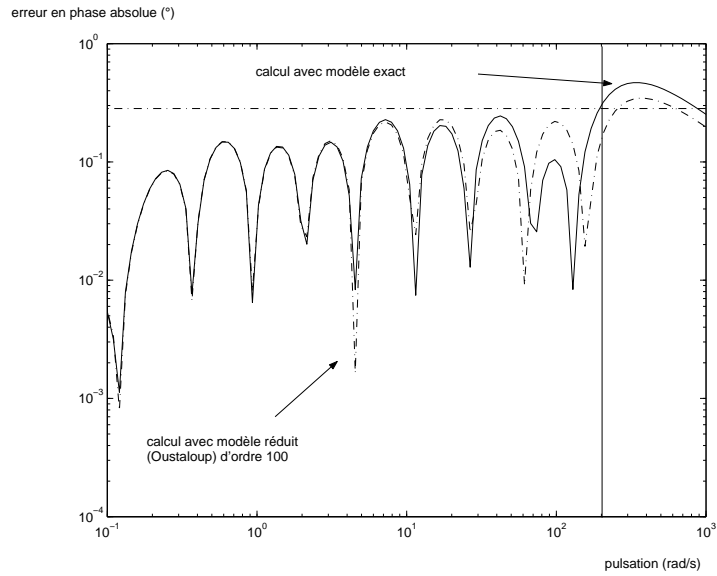


Figure 10: Comparaison des erreurs absolues en phase avec le modèle original et le modèle réduit d'ordre 100 pour un modèle réduit (trois points d'interpolation).

Pôles (p_i)	Résidus (r_i)
-63,95	0,250
-18,02	0,173
-5,076	0,132
-1,430	0,106
-0,4033	0,0972
-0,1132	0,241

Tableau 2: Développement en éléments simples (suspension)

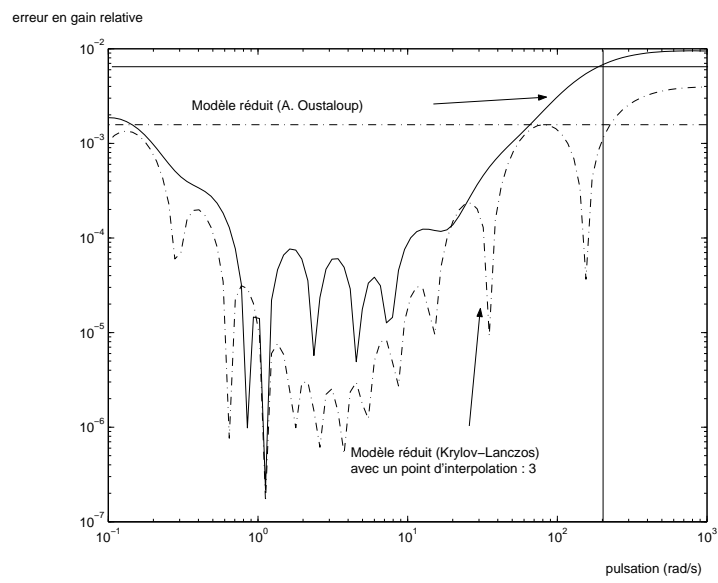


Figure 11: Comparaison de l'erreur relative en gain de deux modèles réduits d'ordre 6 pour la suspension *CRONE* passive : 1 point d'interpolation en 3.

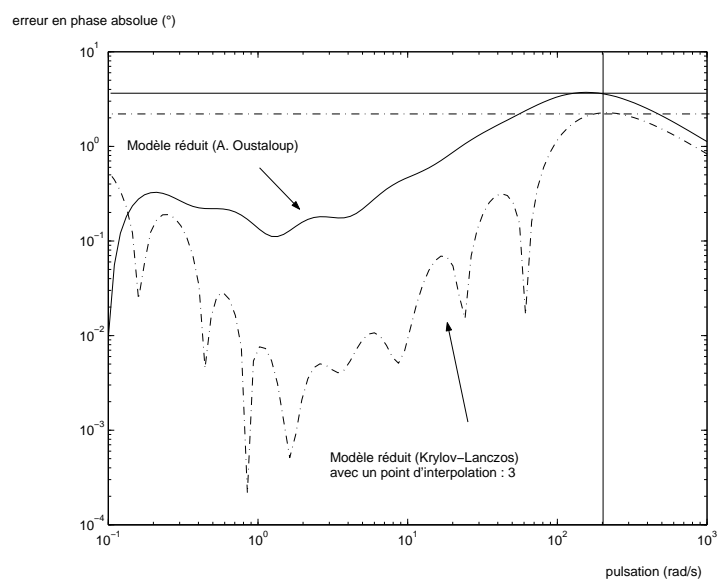


Figure 12: Comparaison de l'erreur absolue en phase de deux modèles réduits d'ordre 6 pour la suspension *CRONE* passive : 1 point d'interpolation en 3.

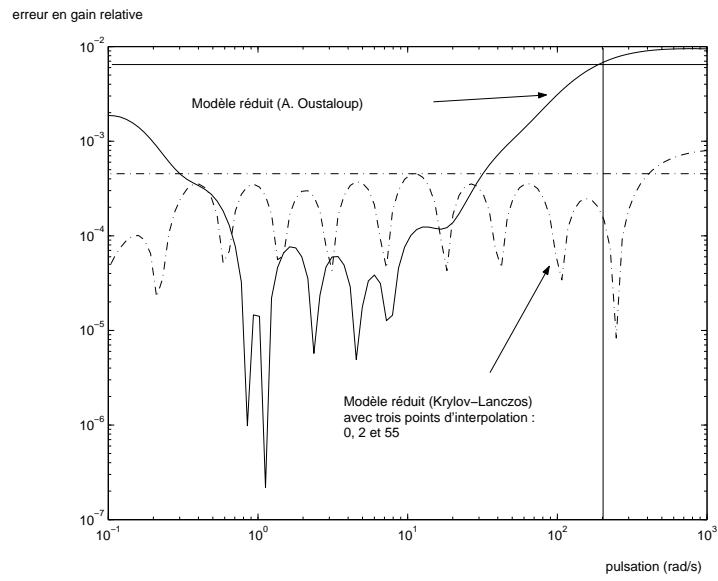


Figure 13: Comparaison de l'erreur relative en gain de deux modèles réduits d'ordre 6 pour la suspension *CRONE* passive : 3 points d'interpolation (0, 2 et 55).

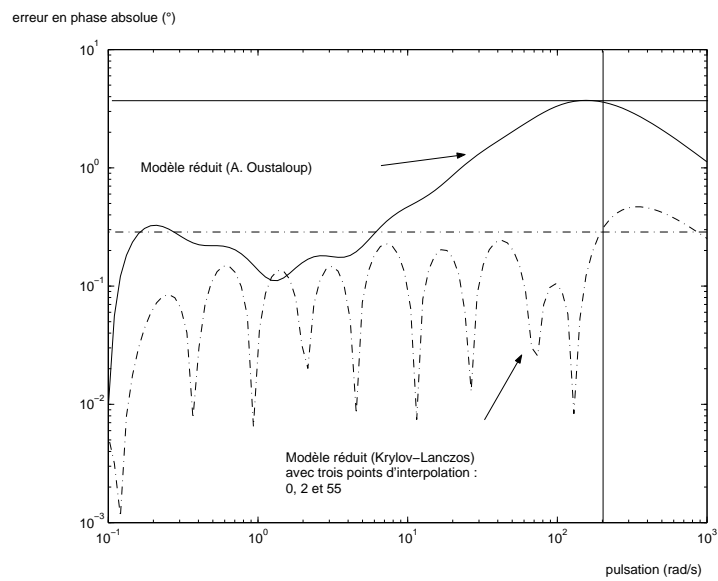


Figure 14: Comparaison de l'erreur absolue en phase de deux modèles réduits d'ordre 6 pour la suspension *CRONE* passive : 3 points d'interpolation (0, 2 et 55).