

Commande CRONE de deuxième génération en boucle fermée avec conditions initiales non nulles : approximation et réalisation dans le cas passif

Nicolas Guijarro et Geneviève Dauphin-Tanguy,

LAIL Ecole Centrale de Lille

Cité Scientifique - BP 48
59651 Villeneuve d'Ascq Cedex
nicolas.guijarro@ec-lille.fr

20 octobre 2002

Résumé

Il s'agit ici de monter sur un exemple comment des conditions initiales peuvent être prise en compte dans la construction de l'approximant d'un modèle d'ordre non entier.

1 Formulation du problème

Notre objectif est ici de trouver une méthode permettant, lors de l'implantation ou de la simulation de l'approximant d'un modèle d'ordre non entier, de déterminer une réalisation de la condition initiale imposée sur le modèle original.

Pour bien comprendre¹ pourquoi nous avons ici recours à la définition de *Caputo* de l'opérateur de dérivation d'ordre non entier nous allons nous replacer dans le contexte classique des équations différentielles ordinaires (*E.D.O.*) d'ordre entier.

¹Nous reprenons ici la démarche exposée par F. Mainardi et R. Gorenflo dans [1].

L'équation de relaxation ou *E.D.O.* du premier ordre :

$$D^1 y(t) = y'(t) = -y(t) + u(t), \quad t \geq 0,$$

avec $u(t)$ une fonction continue, admet pour solution :

$$y(t) = c_0 e^{-t} + \int_0^t u(t - \tau) e^{-\tau} d\tau,$$

où $c_0 \doteq y(0^+)$ est la condition initiale.

De même l'équation du deuxième ordre :

$$D^2 y(t) = y''(t) = -y(t) + u(t),$$

admet pour solution :

$$y(t) = c_0 \cos(t) + c_1 \sin(t) + \int_0^t u(t - \tau) \sin(\tau) d\tau,$$

où $c_0 \doteq y(0^+)$ et $c_1 \doteq y'(0^+)$ sont les conditions initiales.

Si maintenant nous souhaitons généraliser ces équations à un ordre de dérivation non entier α , nous sommes amené à considérer une équation du type :

$$D_*^\alpha y(t) = D^\alpha \left(y(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y^{(k)}(0^+) \right) = -y(t) + u(t). \quad (1)$$

Dans (1) m est l'entier tel que $m - 1 < \alpha \leq m$ et les conditions initiales sont données par $y^{(k)}(0^+) \doteq c_k$ avec $k = 0, \dots, m - 1$. La solution, dans le cas où $\alpha (= m)$ est entier, peut être résumée par :

$$y(t) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} c_k y_k(t)}_{\text{réponse due aux conditions initiales}} + \underbrace{\int_0^t u(t - \tau) y_\delta(\tau) d\tau}_{\text{réponse due à l'entrée}}$$

$$y_k(t) = J^k u_0(t), \quad u_k^{(h)}(0^+) = \delta_{kh}, \quad h, k = 0, 1, \dots, m - 1,$$

$$y_\delta(t) = -y_0'(t).$$

Pour $m = 1$ (relaxation) nous avons $y_0(t) = e^{-t} = y_\delta(t)$ et pour $m = 2$ (oscillation), $y_0(t) = \cos(t)$ et $y_1(t) = Jy_0(t) = \sin(t) = \cos(t - \pi/2) = y_\delta(t)$.

L'application de la transformée de *Laplace* à l'équation (1) donne :

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{s^{\alpha-k-1}}{1+s^\alpha} + \frac{1}{1+s^\alpha} U(s), \\
Y(s) &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k H_k(s) + H(s)U(s).
\end{aligned}$$

Nous remarquons au passage que la transformée de *Laplace* de $D_*^\alpha y(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(D_*^\alpha y(t)) &= s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{m-1} y^{(k)}(0^+) s^{\alpha-k-1}, \\
&= s^{\alpha-m} \left(s^m Y(s) - \sum_{k=0}^{m-1} y^{(k)}(0^+) s^{m-k-1} \right), \\
&= s^{\alpha-m} \mathcal{L}(D^m y(t)).
\end{aligned} \tag{2}$$

Un retour dans le domaine temporel nous permet d'obtenir les expressions :

$$y(t) = c_0 y_0(t) + \int_0^t u(t-\tau) y_\delta(\tau) d\tau, \tag{3}$$

où :

$$\begin{cases} y_0(t) = \int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,0}(r) dr, \\ y_\delta(t) = - \int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,-1}(r) dr, \end{cases} \tag{4}$$

avec $y_0(0^+) = 1$, $y_\delta(0^+) = \infty$, $0 < \alpha < 1$ et :

$$K_{\alpha,k}(r) \doteq \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{r^{\alpha-1-k} \sin(\alpha\pi)}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha \cos(\alpha\pi) + 1}.$$

Remarque 1 : Nous nous restreindrons ici volontairement au cas où α est compris entre zéro et un car c'est le seul pour lequel le transfert H est positif réel (passivité). Le transfert $H_0(s)$ est également positif réel puisque c'est le résultat de l'interconnexion passive (boucle de rétroaction) de deux fonctions positives réelles $H_0^1(s) \doteq 1/s$ et $H_0^2(s) \doteq s^{1-\alpha}$. On a :

$$H_0(s) = \frac{H_0^1(s)}{1 + H_0^1(s)H_0^2(s)}.$$

Nous pouvons comparer l'expression (1) à celle obtenue par *Alain Oustaloup* dans [5, chapitre 1, section 1.4]. Il y donne la définition suivante de la transformée de *Laplace* d'un dérivateur non entier en présence de conditions initiales :

$$\mathcal{L}(D^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - \sum_{i=0}^{\infty} s^{\alpha-i-1} f^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{\infty} s^{-i-1} f^{(n+i)}(0). \quad (5)$$

L'expression (5) généralise bien au cas non entier l'expression bien connue :

$$\mathcal{L}(D^n f(t)) = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0),$$

où n est un entier. En revanche il est nécessaire de connaître une infinité de conditions initiales (liées) pour déterminer l'expression de la transformée de *Laplace* de l'opérateur d'ordre non entier dans (5) contrairement à (2) où seul un nombre fini est requis.

La même remarque s'applique au cas de la réponse à une entrée quelconque de la commande *CRONE* de deuxième génération pour des conditions initiales non nulles [5, chapitre 1, section 1.5]. L'équation correspondant à une commande *CRONE* de deuxième génération en boucle fermée est donnée par (pour une constante de relaxation unitaire dans [5, chapitre 1, section 1.5]) :

$$D^\alpha y(t) = -y(t) + u(t),$$

dans le domaine temporel et par :

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(0) \frac{s^{\alpha-k-1}}{1+s^\alpha} - \sum_{k=0}^{\infty} y^{(\alpha+k)}(0) \frac{s^{-k-1}}{1+s^\alpha} + \frac{1}{1+s^\alpha} U(s),$$

dans le domaine de *Laplace*.

La section suivante propose différentes solutions concernant la réalisation à l'aide d'éléments passifs élémentaires (R , I et C) des fonctions de transfert $H_0(s)$ et $H(s)$.

2 Commande *CRONE* de deuxième génération en boucle fermée avec conditions initiales non nulles

L'équation correspondant à une commande *CRONE* de deuxième génération en boucle fermée est donnée par (pour une constante de relaxation unitaire

dans [5, chapitre 1, section 1.5]):

$$D_*^\alpha y(t) = D^\alpha \left(y(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y^{(k)}(0^+) \right) = -y(t) + u(t), \quad (6)$$

Dans (6) m est l'entier tel que $m - 1 < \alpha \leq m$ et les conditions initiales sont données par $y^{(k)}(0^+) = c_k$ avec $k = 0, \dots, m - 1$.

L'application de la transformée de Laplace à l'équation (6) donne:

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{s^{\alpha-k-1}}{1+s^\alpha} + \frac{1}{1+s^\alpha} U(s), \quad (7)$$

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k H_k(s) + H(s)U(s).$$

Si $0 < \alpha \leq 1$ alors (7) devient :

$$Y(s) = c_0 H_0(s) + H(s)U(s),$$

$$Y(s) = c_0 \frac{s^{\alpha-1}}{1+s^\alpha} + \frac{1}{1+s^\alpha} U(s).$$

Les deux transferts $H_0(s)$ et $H(s)$ étant positifs réels nous pouvons en obtenir une réalisation par bond graph passif après approximation-réduction.

Remarque 2: La réalisation de $H_0(s)$ permet de tenir compte de l'effet des conditions initiales mais ceci au prix d'une augmentation du nombre d'éléments dynamiques utilisés. Ce nombre correspond au rang de l'approximant choisi.

Différentes possibilités s'offrent à nous pour approximer-réduire $H(s)$. Nous pouvons reprendre la méthode développée pour l'intégrateur implicite avec un changement de variable pour se ramener en zéro ce qui permet d'obtenir une approximation de $1/s^\alpha$ puis par un bouclage unitaire en déduire une approximation de $1/(1+s^\alpha) = H(s)$.

La méthode [4] peut constituer une alternative intéressante, elle construit également une approximation de s^α .

Pour ce qui est du transfert $H_0(s)$ il suffit de boucler un approximant de $s^{\alpha-1}$ avec un intégrateur. L'approximant résultant sera passif par construction.

Exemple 1 : Pour $\alpha = 1/2$ et $c_0 = 1$, on a :

$$H_0(s) \doteq \frac{s^{-1/2}}{1 + s^{1/2}} = \frac{\frac{1}{s^{1/2}}}{1 + s \frac{1}{s^{1/2}}},$$

$$H(s) \doteq \frac{1}{1 + s^{1/2}}.$$

Si nous utilisons pour le calcul de $s^{1/2}$ le modèle réduit de l'exemple de l'intégrateur implicite nous obtenons :

$$H_0^6(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{H_{kl}^6((s-1)p_T)}},$$

$$H^6(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{H_{kl}^6((s-1)p_T)}},$$

$$H_{kl}^6((s-1)p_T) = \sum_{i=1}^6 \frac{r_i}{p_T} \cdot \frac{1}{s - (1 + p_i/p_T)}.$$

où les paramètres r_i et p_i sont ceux du tableau 1.

La fonction de transfert du modèle réduit est donnée par :

$$H_6^{kl}(s) = \sum_{i=1}^6 r_i \frac{1}{s - p_i},$$

Pôles (p_i)	Résidus (r_i)
-63,95	0,250
-18,02	0,173
-5,076	0,132
-1,430	0,106
-0,4033	0,0972
-0,1132	0,241

Tableau 1: Développement en éléments simples (suspension)

Exemple 2 : Nous pouvons remarquer que la précision en basses fréquences, de $H_{kl}^6((s-1)p_T)$, dépendra de la proximité de zéro du plus petit pôle, c'est-à-dire la valeur de $1 + p_0/p_T$. Pour le modèle d'ordre 6 réduit par la

méthode de *Krylov-Lanczos* nous obtenons une valeur de 0,0932 alors que pour un modèle d'ordre 6 réduit par la méthode de la fonction singularité la valeur passe à 0,256. Pour avoir la même valeur pour la deuxième méthode de réduction il faudrait que le modèle soit d'ordre 9.

A titre indicatif, en utilisant $H_{kl}^6((s-1)p_T)$ comme modèle réduit pour $s^{-1/2}$, l'erreur relative en gain reste inférieure à 0,5% sur une bande de pulsations de 1 à 135 rad.s⁻¹. Une amélioration notable serait toutefois envisageable en prévoyant le changement de variable dans le calcul du modèle réduit (choix des points d'interpolation).

3 Conclusion

Nous avons proposé une méthode permettant d'obtenir une réalisation approchée des conditions initiales relatives au modèle d'une commande CRONE de deuxième génération en boucle fermée. Il est à remarquer que celle-ci ne consiste pas en la détermination des conditions initiales sur les éléments dynamiques du bond graph mais en l'adjonction d'un bond graph supplémentaire représentant un opérateur de dérivation non entière. Le nombre d'éléments dynamiques nécessaires augmentera d'autant plus que la précision sera grande concernant les conditions initiales.

Une communication en congrès [2] et une présentation lors d'un séminaire [3] reprennent l'application de la méthode relative à l'intégrateur implicite.

Références

- [1] R. Gorenflo and F. Mainardi. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, chapter Fraction Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order, pages 223–276. Springer Verlag, Wien and New York, carpinteri, a. and mainardi, f. edition, 1997.
- [2] Nicolas Guijarro, Laurent Lefèvre, and Geneviève Dauphin-Tanguy. Infinite Dimensional Models: Approximation and Realization. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3295–3300, Sydney, Australia, 2000.
- [3] Nicolas Guijarro, Laurent Lefèvre, and Geneviève Dauphin-Tanguy. Approximation et réalisation d'un intégrateur implicite d'ordre non entier. In *Actes des journées thématiques «Systèmes à dérivées non entières »*, Bordeaux, 2001.

- [4] H.E. Jones and B.A. Sheno. Maximally Flat Lumped-Element Approximation to a Fractional Operator Immittance Function. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, pages 125–128, 1970.
- [5] Alain Oustaloup. *La dérivation non entière*. Hermès, Paris, 1995.