



LABORATOIRE ENERGETIQUE ET PHENOMENES DE TRANSFERT

**Modélisation de la diffusion de chaleur à partir de
l'opérateur de dérivation non entière
Application à la Caractérisation Thermique**

Jean Luc Battaglia, J.-C. Batsale, A. Kusiak



L'intégrale non entière (Riemann et Liouville, 1847 !!)

- Soit une fonction intégrable, c'est à dire définie et bornée, sur l'intervalle (a, ∞) sur lequel nous effectuons n intégrations successives

$${}_a I_t^n f(t) = \int_a^t du_1 \int_a^{u_1} du_2 \cdots \int_a^{u_{n-1}} f(u_n) du_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-u)^{n-1} f(u) du$$

- Il est alors aisé de généraliser l'expression ci-dessus à tout nombre n réel, et plus généralement complexe, et donc de définir l'intégrale d'ordre fractionnaire n ($\operatorname{Re} \nu > 0$), ou plus simplement l'intégrale non entière, par :

$${}_a I_t^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-u)^{\nu-1} f(u) du$$

- L'intégrale non entière s'apparente à un produit de convolution entre $t^{\nu-1}$ et la fonction $f(t)$

La dérivée non entière

➤ Définition :

$$D^\nu f(t) = D^n I^{n-\nu} f(t) \quad n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re} \nu > 0, n-1 \leq \operatorname{Re} \nu < n$$

➤ On connaît de nombreuses dérivées non entière de façon analytique :

$$D^\nu \delta(t-t_0) = \frac{(t-t_0)^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)}$$

$$D^\nu t^{\nu-1} \sin\left(\frac{1}{t}\right) = t^{-\nu-1} \sin\left(\frac{1}{t} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

$$D^\nu \ln(t) = \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} [\ln(t) - \gamma - \psi(1-\nu)] \quad \dots\dots$$

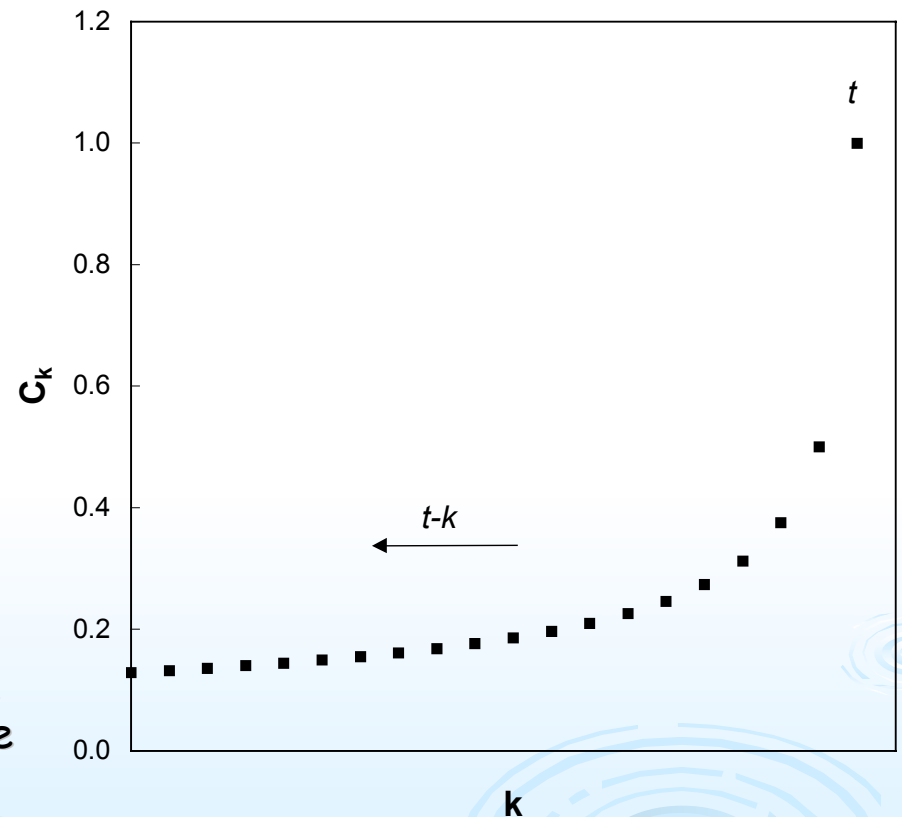
Différence entre dérivée entière et dérivée non entière

- La définition de Riemann et celle de Grünwald montre que l'intégrale ou la dérivée non entière d'une fonction à l'instant t nécessite de connaître toutes les valeurs de la fonction aux instants précédents, depuis l'instant initial.

$$I^{0,5} f(t) = \sum_{k=0}^K (-1)^k c_k f((K-k)h)$$

$$c_k = \frac{1}{h^{-0,5}} \binom{\nu}{k}$$

- On parle souvent de la compacité de l'opérateur de dérivation non entière



Les transformations intégrales de la dérivées non entière

- La transformée de Laplace :

$$\boxed{\mathbf{L}[I^\nu f(t)] = s^{-\nu} \mathbf{L}[f(t)]}$$

$$\boxed{\mathbf{L}[D^\nu f(t)] = s^\nu \mathbf{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-k-1)} D^k I^{n-\nu} f(t=0)}$$

- La transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction garde le même sens que lorsque l'ordre de dérivation est entier
- Cela reste vrai pour la transformée de Fourier et la transformée de Mellin

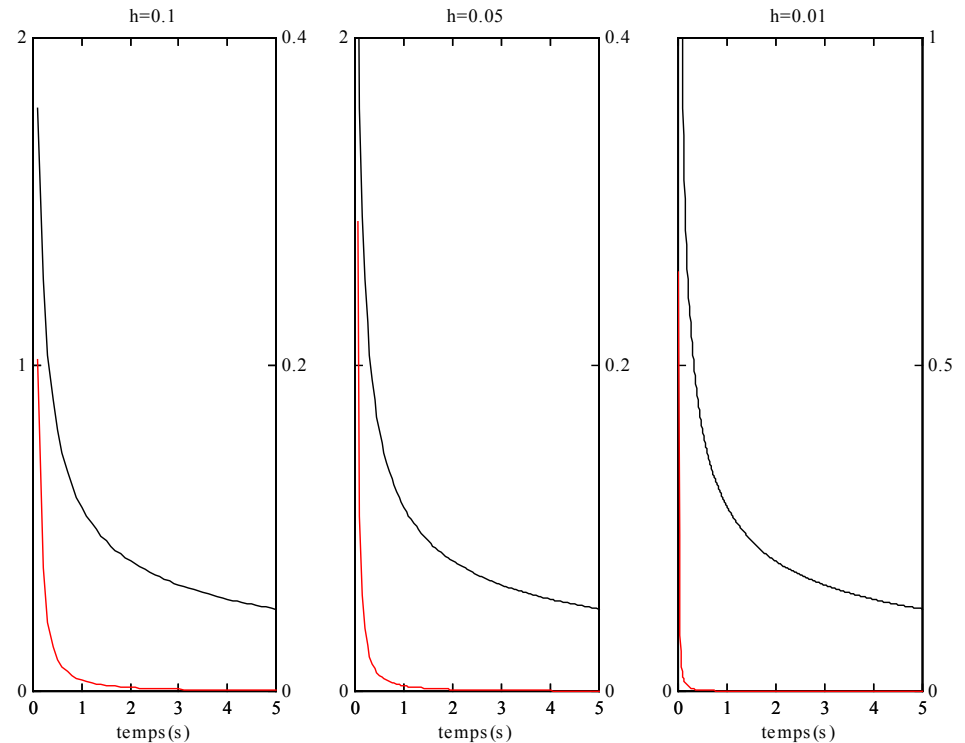
Calcul pratique de l'intégrale et de la dérivée non entière

- La représentation discrète de la dérivée non entière par Grünwald :

$$D^\nu f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^\nu f(t)}{h^\nu}, \forall \nu \in \mathbb{R}$$

- où Δ_h^ν représente l'accroissement non entier défini par :

$$\Delta_h^\nu f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\nu}{j} f(t - jh)$$



Dérivée d'ordre 0,5 de la fonction d'Heaviside représentée en noir. Les écarts avec le calcul discret sont représentés en rouge.

Nouvelle expression du modèle de diffusion dans des configurations 1D

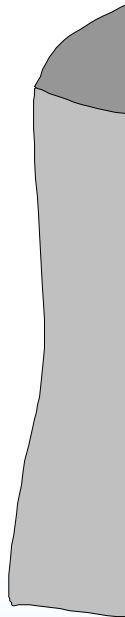
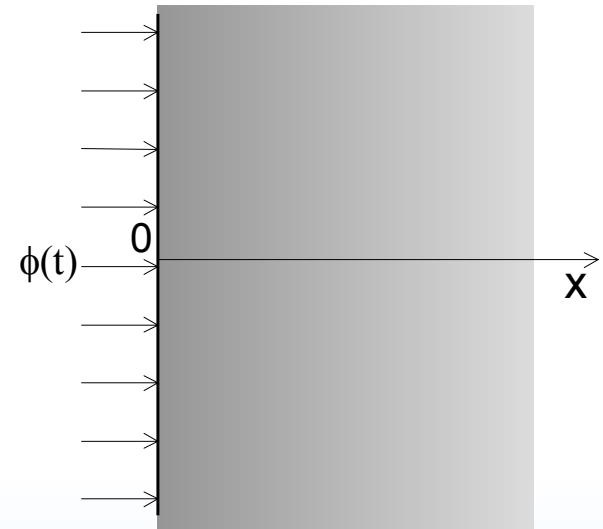
- Transfert de chaleur dans un milieu semi infini plan

$$\bar{T}(x=0, s) = H_0(s) \bar{\phi}(s)$$

Avec :

$$H_0(s) = \frac{1}{S \sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{1}{\sqrt{s}}$$

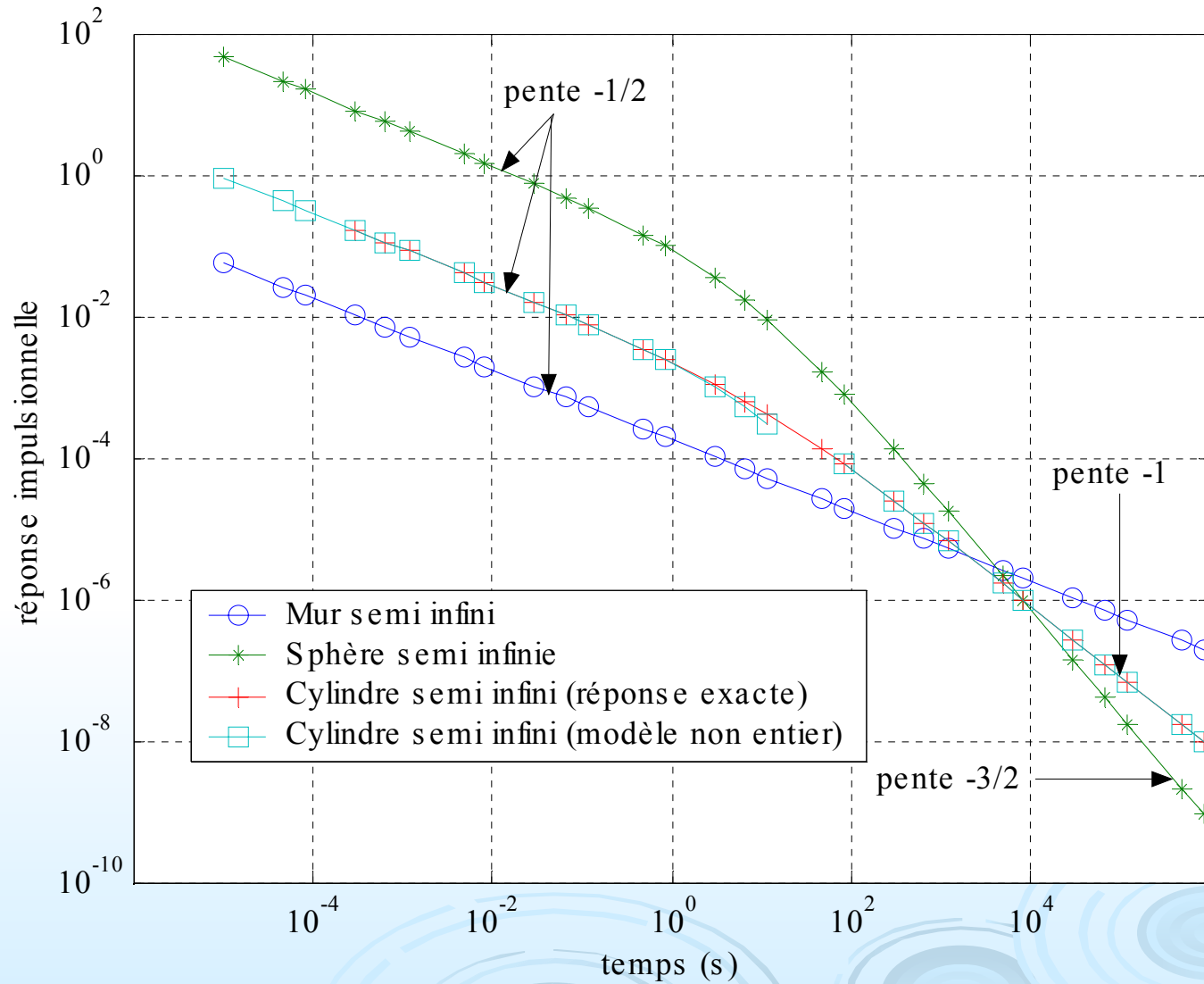
$$T_0(t) = \frac{1}{S \sqrt{\lambda \rho C_p}} I^{0,5} \phi(t)$$



D'autres milieux semi infinis - Résultats

Géométrie	Cylindrique	Sphérique
$H_0(s)$	$\frac{K_0(R\sqrt{s/\alpha})}{2\pi\lambda l R\sqrt{s/\alpha} K_1(R\sqrt{s/\alpha})}$	$\frac{1}{4\pi\lambda R(1+R\sqrt{s/\alpha})}$
$s \rightarrow 0$	$\propto \ln s$	\propto Constante
$s \rightarrow \infty$	$\propto \frac{1}{\sqrt{s}}$	$\propto \frac{1}{\sqrt{s}}$
Modèle	(Réduit)	(Exact)
non entier équivalent	$\alpha_0 D^{1/2}T_0(t) + \alpha_1 DT_0(t) =$ $-1 + \beta_0 D^{1/2}\phi(t)$ $\alpha_0 = \frac{3\pi\lambda l}{4}\beta_0$ $\alpha_1 = \frac{16\pi\lambda l R^2}{\alpha}\beta_0$ $\beta_0 = \frac{8R}{\sqrt{\alpha}}$	$\alpha_0 T_0(t) + \alpha_1 D^{1/2}T_0(t) = \phi(t)$ $\alpha_0 = 4\pi\lambda R$ $\alpha_1 = \frac{4\pi\lambda R^2}{\sqrt{\alpha}}$

$$\phi(t) = \text{Dirac}(t)$$



Et si maintenant on considère une paroi d'épaisseur finie...

$$\bar{T}(x=0, s) = H_0(s) \bar{\phi}(s)$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$H_0(s) = \frac{\cosh(ke)}{\lambda k S \sinh(ke)}$$

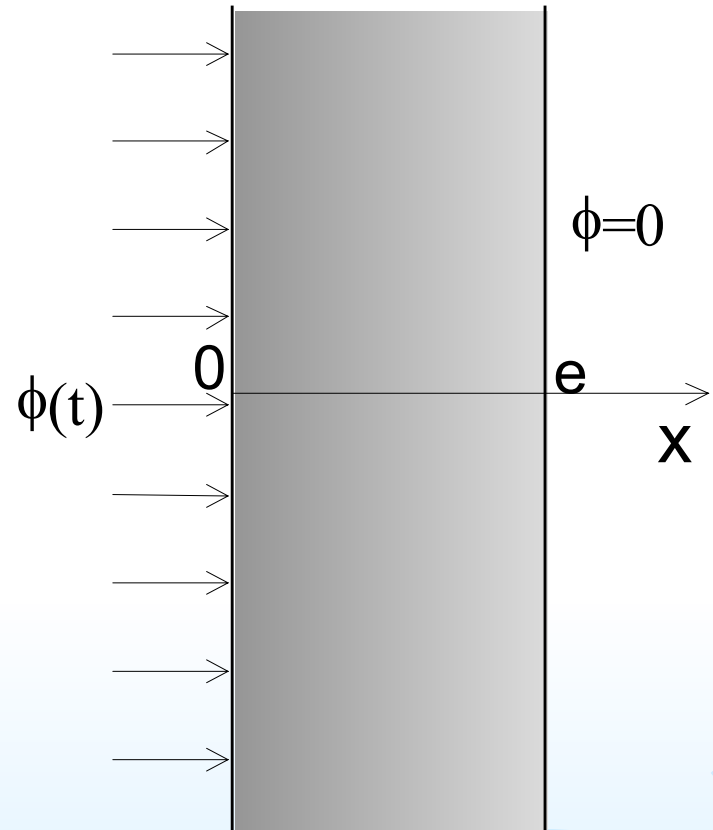
Comportements asymptotiques

$$\bar{T}_0(s \rightarrow \infty) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\phi}(s)$$

$$\bar{T}_0(s \rightarrow 0) = \frac{1}{\rho C_p e} \frac{1}{s} \bar{\phi}(s)$$

$$(MSI) \quad T_0(t \rightarrow 0) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} I^{1/2} \phi(t)$$

$$T_0(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{\rho C_p e} I^1 \phi(t)$$



Obtention de la forme fractionnaire de la fonction de transfert: Première approche

- On remplace les fonctions hyperboliques par leur développement en série entière

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- On trouve :

$$H_0(s) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n s^n}{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n s^{n/2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^{n+1} T_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \varphi(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{\lambda e^{2n+1}}{(2n+1)! \alpha^{n+1}} \\ b_n = \frac{e^{2n}}{(2n)! \alpha^n} \end{array} \right.$$

- Problème : on retrouve le comportement asymptotique aux temps longs mais pas celui aux temps courts

Deuxième approche (la bonne)

➤ On fait d'abord : $\cosh z = \frac{e^{-z} (e^{2z} + 1)}{2}$ et $\sinh z = \frac{e^{-z} (e^{2z} - 1)}{2}$

➤ Puis : $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

➤ Et après quelques calculs (très faciles) on trouve : $H_0(s) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n s^{n/2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n s^{(n+1)/2}}$

➤ Soit : $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D^{(n+1)/2} T_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n D^{n/2} \varphi(t)$ ←

$$\alpha_n = \frac{e^{n-1}}{\alpha^{(n-1)/2} n!}, \quad \beta_n = \frac{e^{n-1}}{\lambda \alpha^{(n-2)/2} n!}$$

➤ Qui vérifie exactement les comportements asymptotiques aux temps courts et aux temps longs

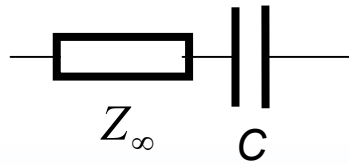
Réduction du modèle

$$H_0(s) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n s^{n/2}}{\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n s^{(n+1)/2}}$$

Développement
fractionnaire complet

Réduction

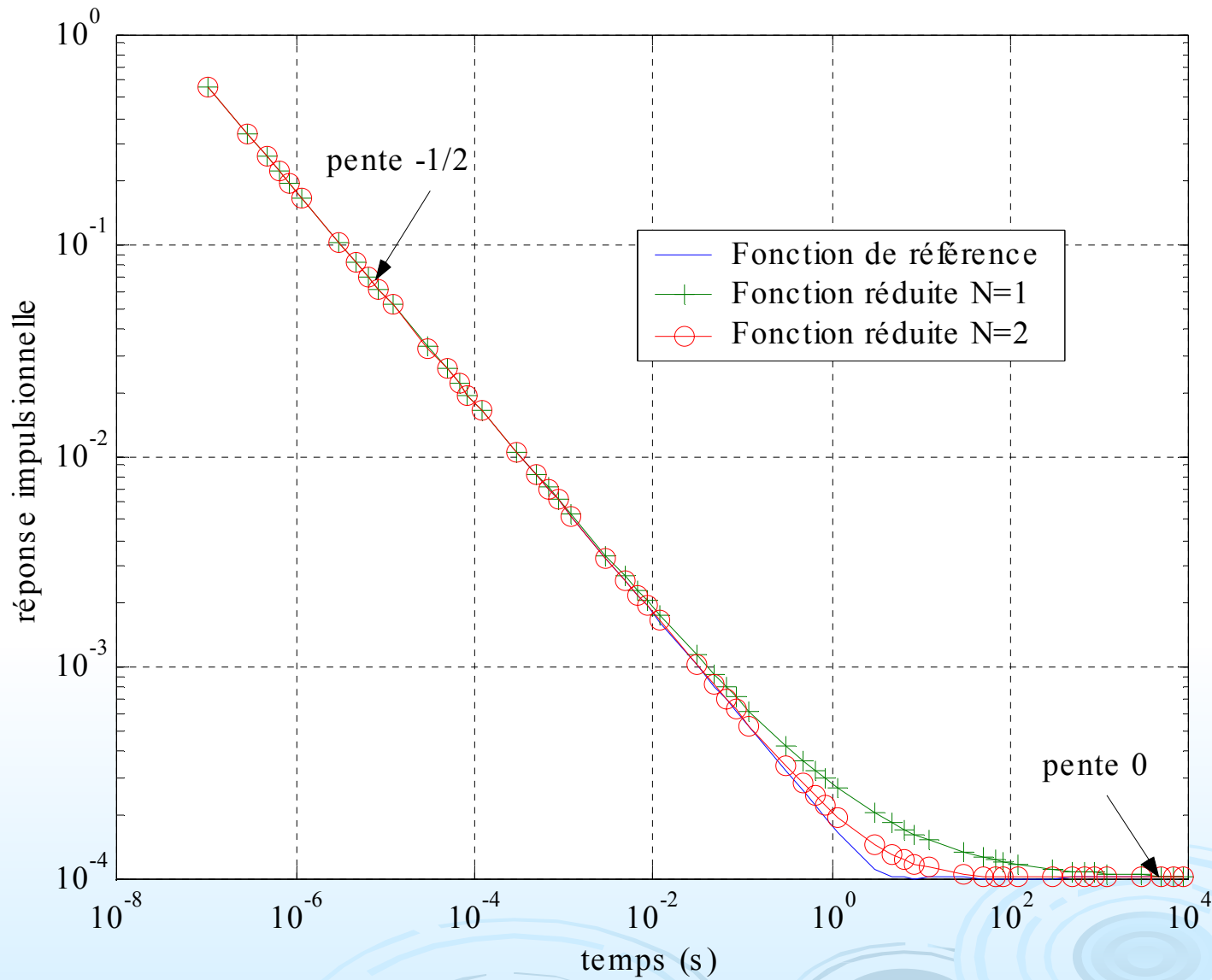
$$H_{0,1} = \frac{\beta_0 + \beta_1 s^{1/2}}{\alpha_2 s}$$



Le modèle réduit décrit les comportements asymptotiques du système réel et assure leur raccordement.

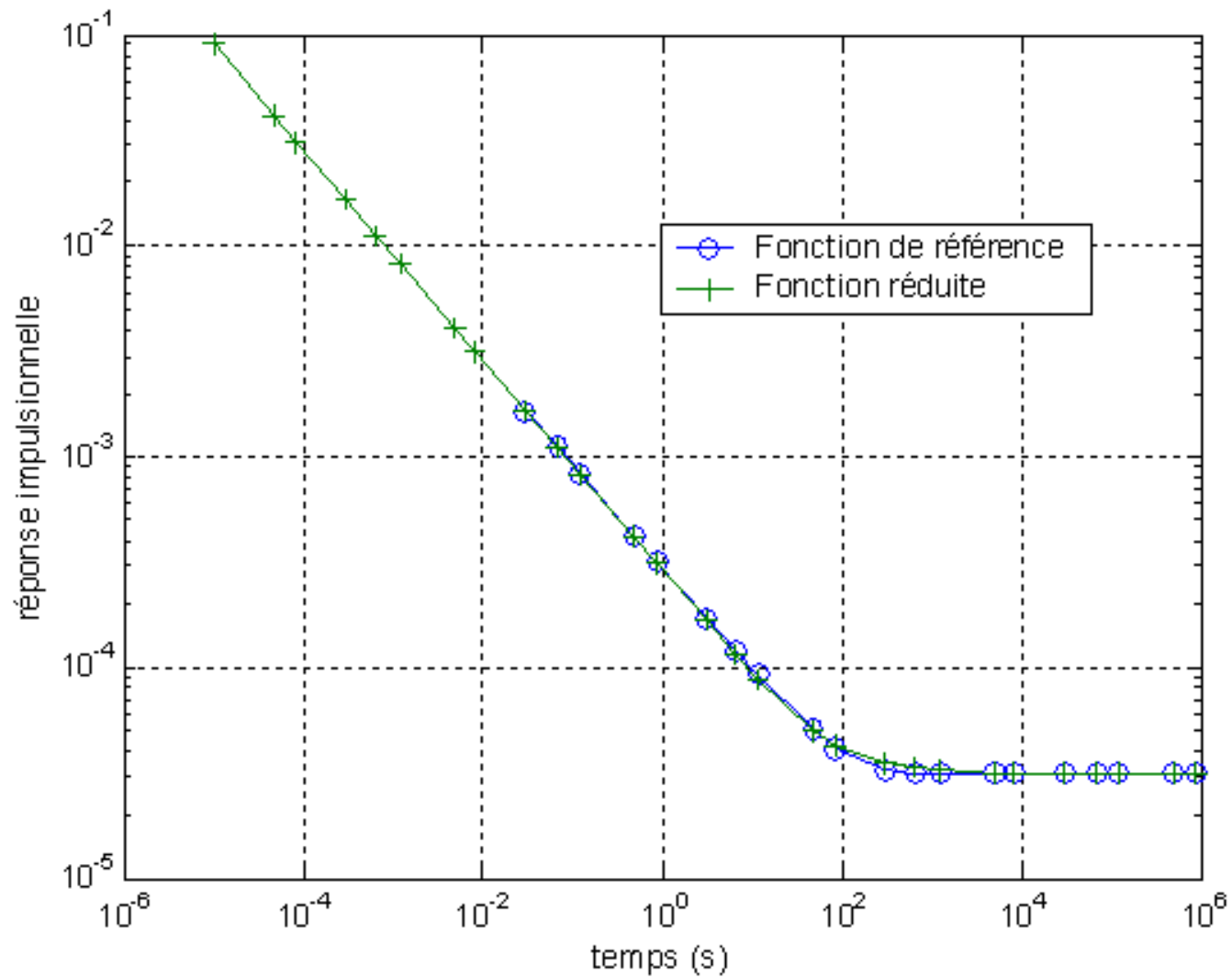
Raccordement

$$H_{0,2} = \frac{\beta_0 + \beta_1 s^{1/2} + \beta_2 s}{\alpha_2 s + \alpha_3 s^{3/2}} \longrightarrow [\alpha_2 D + \alpha_3 D^{3/2}]T(0,t) = [\beta_0 + \beta_1 D^{1/2} + \beta_2 D]\varphi(t)$$

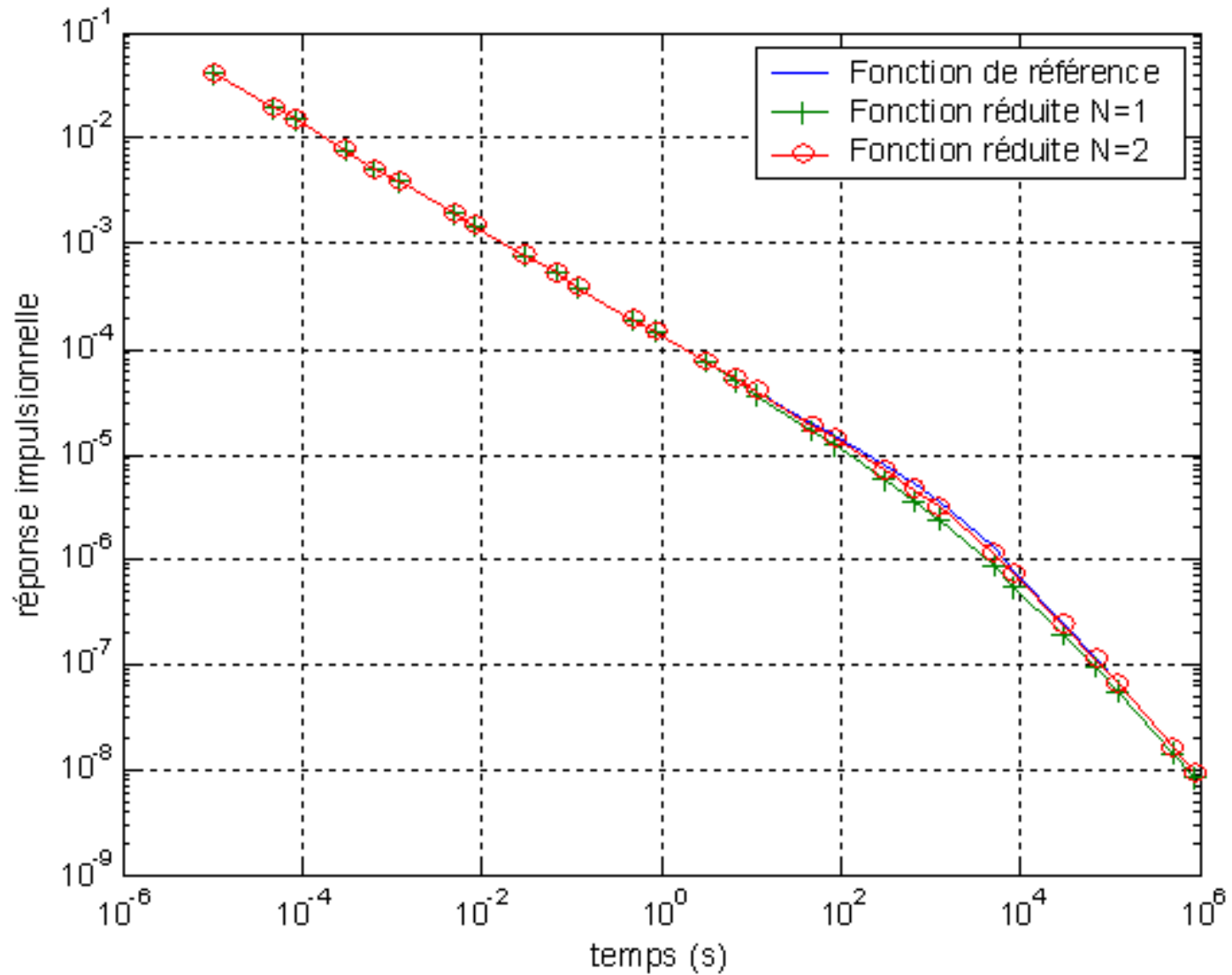


Géométrie	Cylindrique	Sphérique
$H_0(s)$ $\left(k = \sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi a \lambda} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)}$	$\frac{b^2 \sinh(kb)}{\lambda r l (k \cosh(kb) - \sinh(kb))}$
$s \rightarrow 0$	$\frac{1}{\pi a^2 l \rho C_p} \frac{1}{s}$	$\frac{b^2}{\lambda(1-b)}$
$s \rightarrow \infty$	$\frac{1}{2\pi l a \sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{b\alpha}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{s}}$
Modèle non entier équivalent	$\sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i D^{n_i/2} T_0(t) = \sum_{i=0}^N \beta_i D^{n_i/2} \varphi(t)$	
	$\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \omega_1 d_0, \dots$ $\beta_0 = \gamma_0 c_0, \beta_1 = \gamma_1 c_0, \dots$	$\beta_n = \frac{b^2 (2b)^n}{\alpha^{n/2} n!},$
	<p>Avec :</p> $\omega_n = \frac{e^{n-1}}{\alpha^{(n-1)/2} n!}, \gamma_n = \frac{e^{n-1}}{\lambda \alpha^{(n-2)/2} n!}$	$\alpha_n = \frac{\lambda 2^{n-1} b^n}{(n-1)! \alpha^{n/2}} \left(1 - \frac{2b}{n}\right)$

Réponse impulsionnelle pour le cylindre



Réponse impulsionnelle pour la sphère



Premières conclusions

- Pour toutes les configurations 1D, quelque soit le type de condition aux limites, on trouve que la température en tout point du milieu s'exprime en fonction du flux (pour une condition de 2ème espèce) sous la forme d'une relation liant les dérivées non entières d'ordre multiples de 0,5 de ces deux grandeurs :

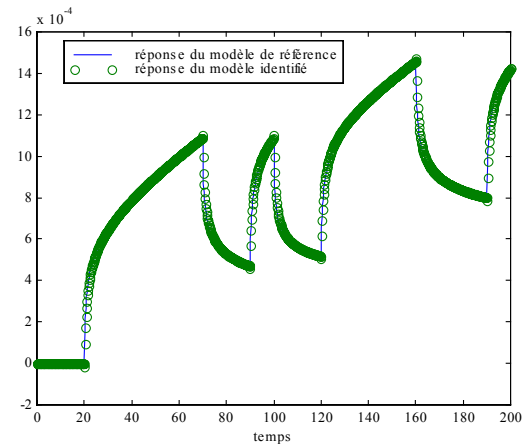
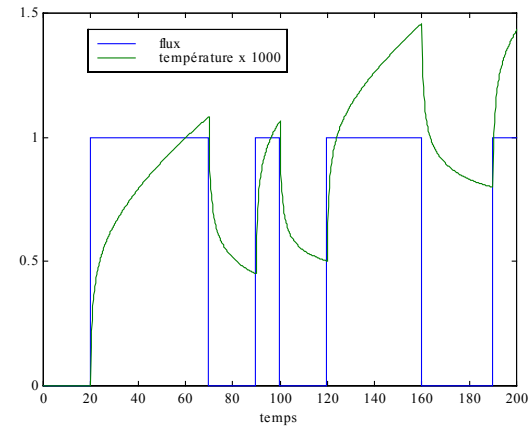
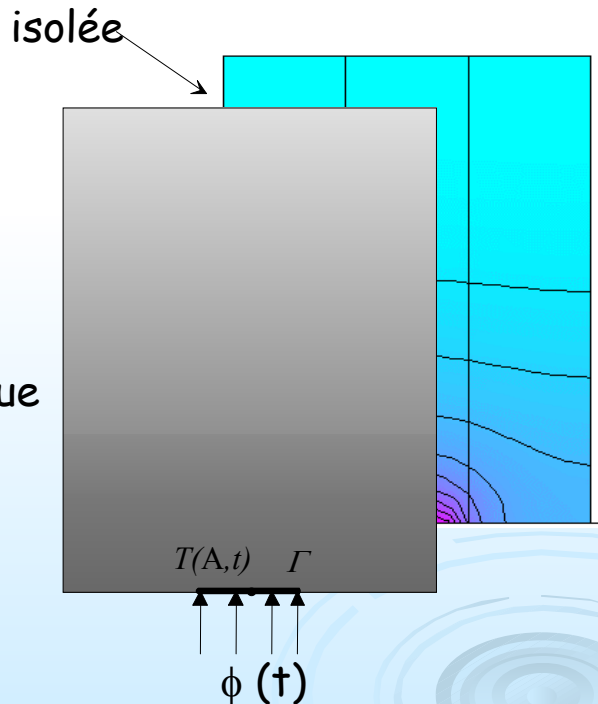
$$\sum_{n=M_0}^{\infty} \alpha_n D^{n/2} T(x, t) = \sum_{n=L_0}^{\infty} \beta_n D^{n/2} \phi(t)$$

- Ce modèle est une représentation continue et exacte du processus de diffusion de la chaleur en 1D
- Les paramètres du modèle non entier s'expriment explicitement en fonction des paramètres thermophysiques du système
- On peut réduire très significativement le nombre de paramètres selon la précision voulue sur le raccordement des comportements asymptotiques et de la position du point d'observation (abscisse x)

Qu'en est t'il en 2D et 3D ?

- On ne peut pas s'en sortir analytiquement
- On procède alors à une simulation de problèmes 2D et 3D en éléments finis et on vérifie que l'on trouve un ordre commun de dérivation égale à 0,5 par identification.

Simulation du transfert 2D dans une plaque (MEF)



On identifie les paramètres du modèle non entier sous forme modale et l'ordre

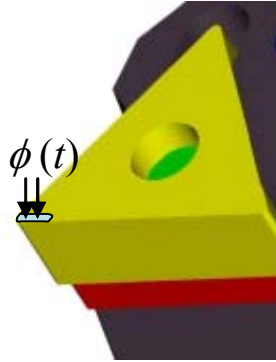
Méthode de minimisation non linéaire de Levenberg Marquardt

N	A_i	λ_i	α
1	4	-0,024	0,5486
3	-2,928-j 3,65	-0,703+j 1,46	0,51
	-2,928-j 3,65	-0,703+j 1,46	
4	3,087	-0,023	0,501
	-0,414-j 0,487	-1,5324-j 1,33	
	-0,414+j 0,487	-1,5324+j 1,33	
	-2,171-j 0,605	-0,022+j 0,0006	
	-2,171+j 0,605	-0,022-j 0,0006	

Conclusion (certainement non satisfaisante en l'état) : *'toute théorie reste exacte tant qu'elle n'est pas mise en défaut par l'expérience.'*

Intérêt pour l'identification de système thermique non entier en vue de la résolution de problèmes inverses

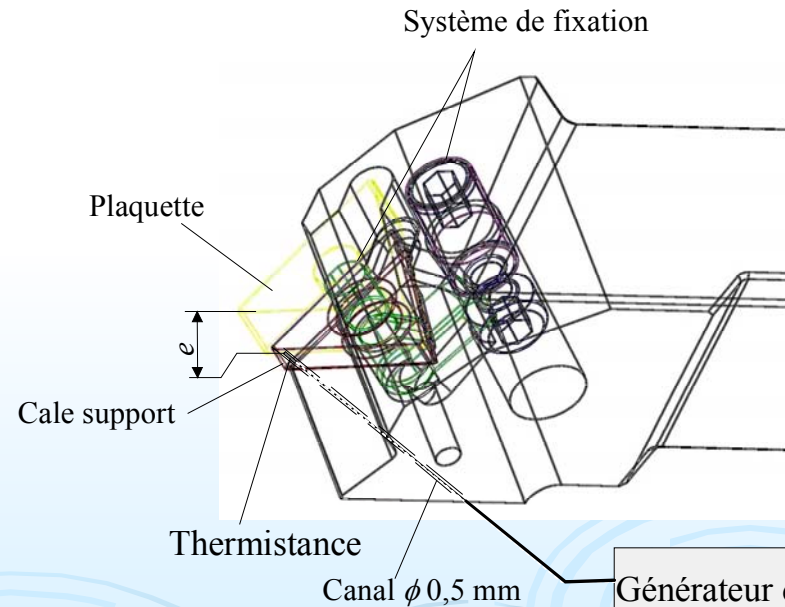
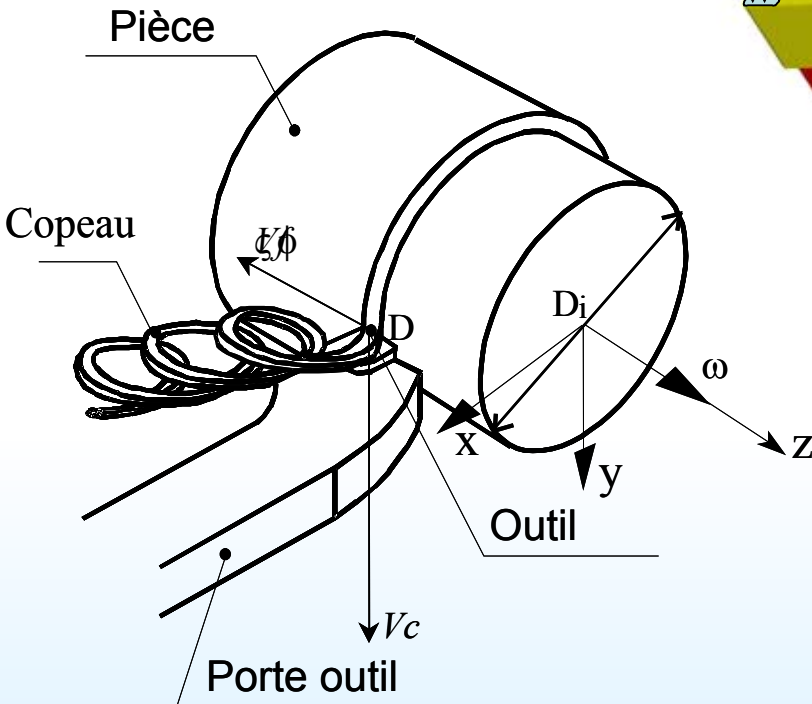
Estimation du flux de chaleur dans un outil d'usinage



Système complexe

Mesure non ponctuelle

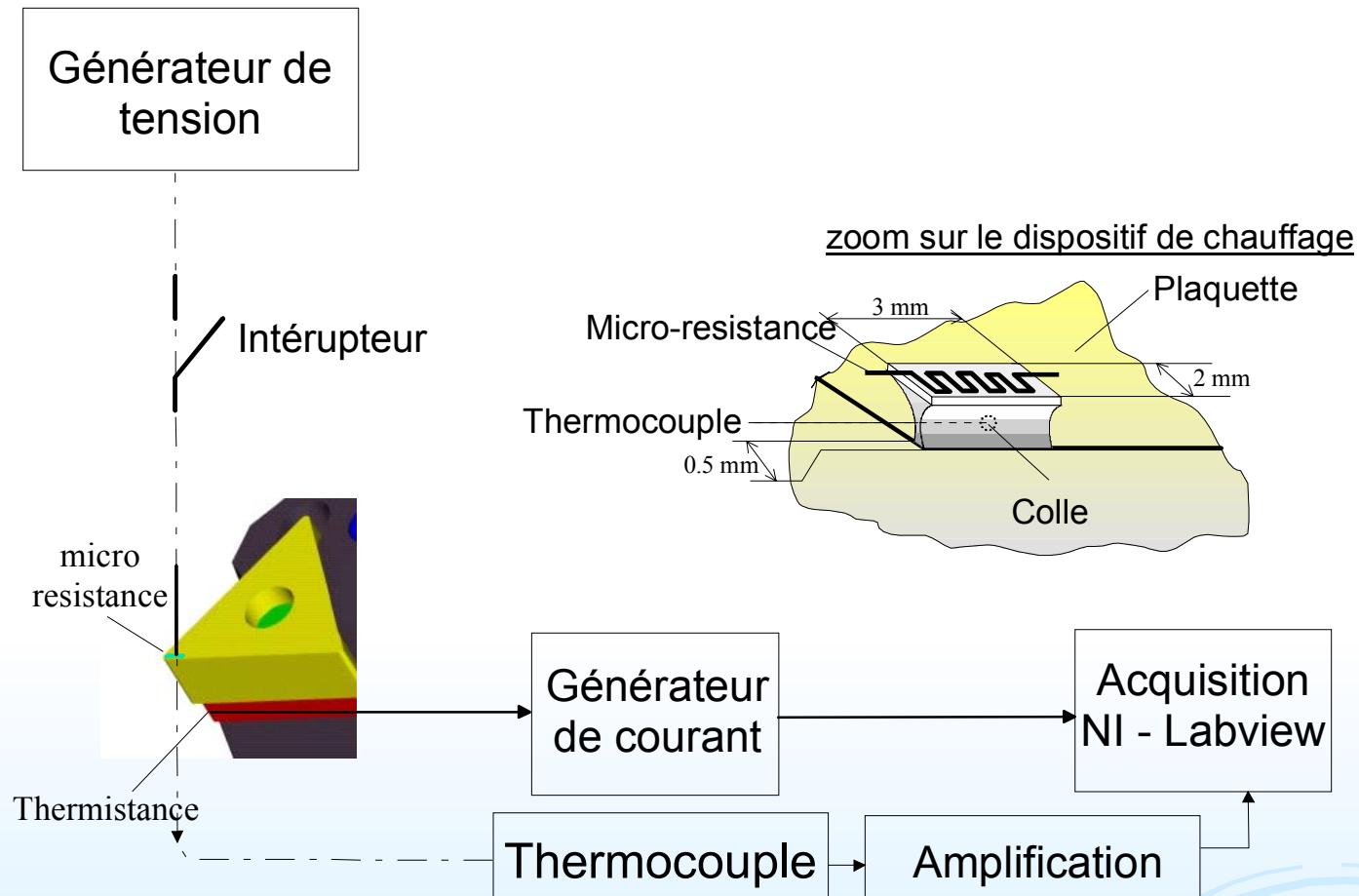
Influence du capteur significative



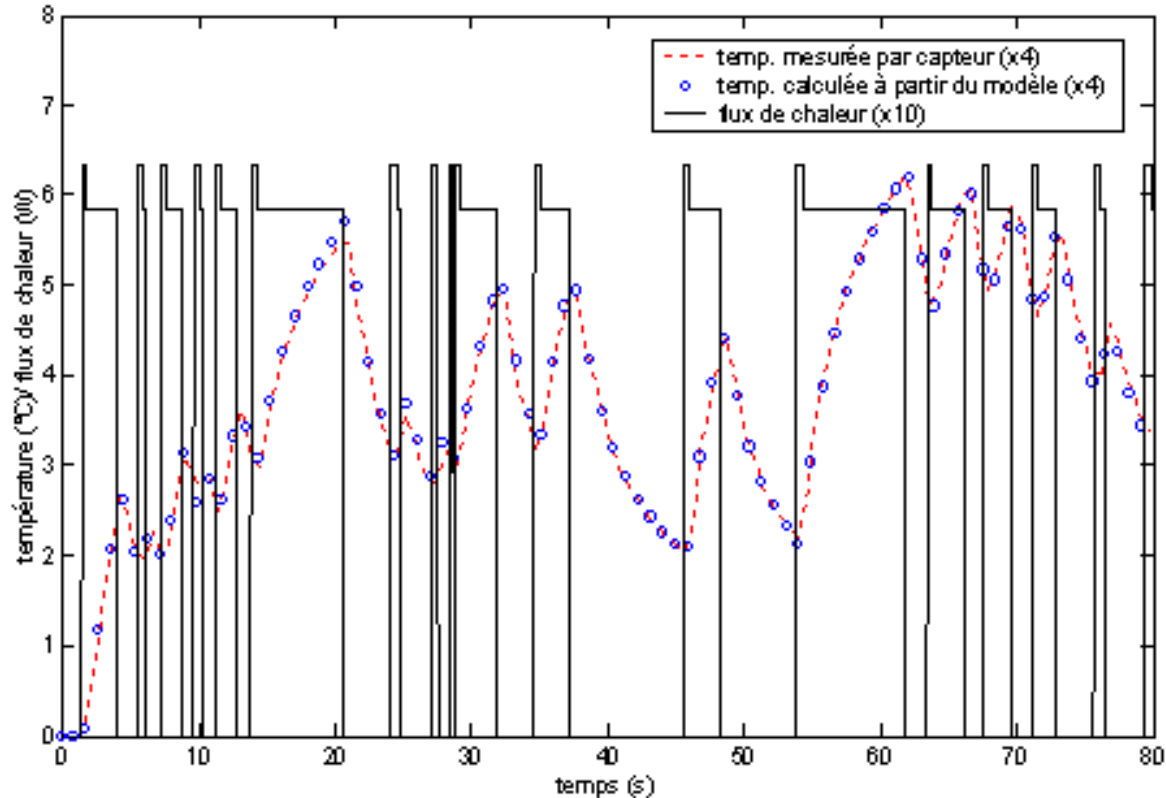
Acquisition

Générateur de courant

➤ Identification du modèle : mise au point d'une expérience de caractérisation



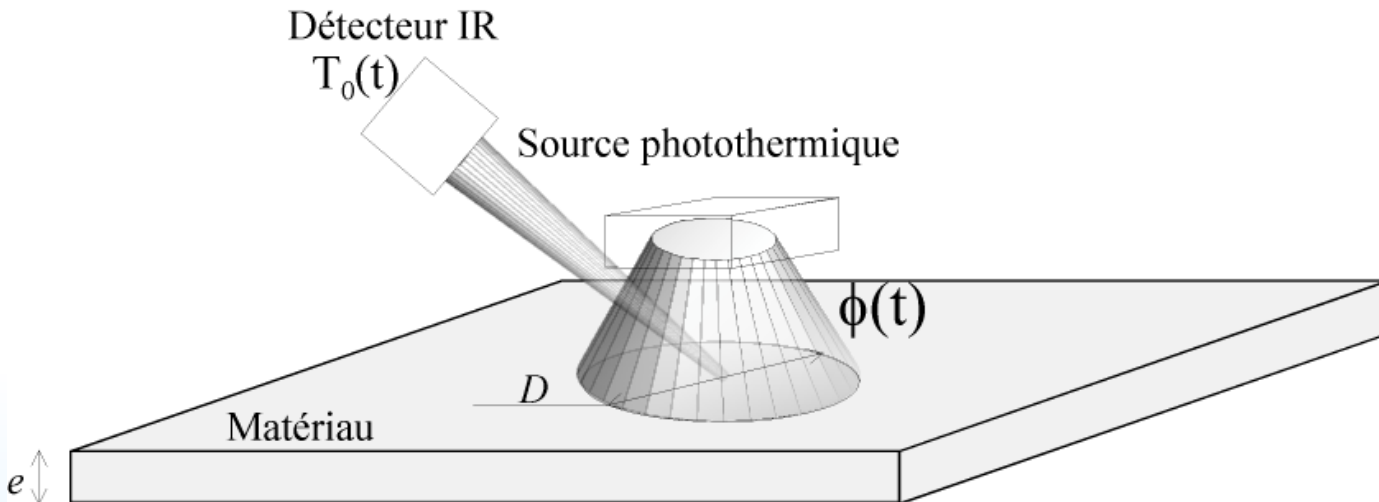
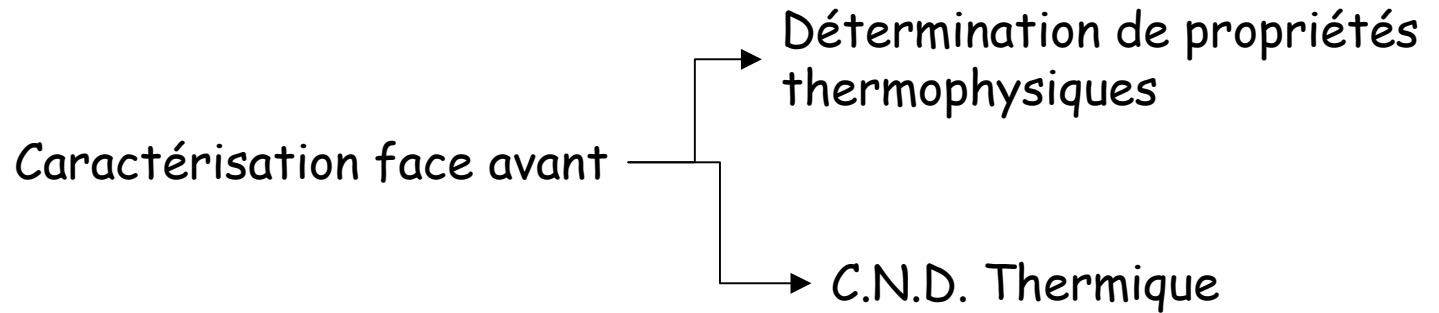
➤ Résultats de l'identification



$$\left[\begin{array}{ccc} 1 + 6.444D^{1/2} & 1.539D & 4.252D^{3/2} \\ \left[\pm 0.798 \right]^- & \left[\pm 0.803 \right]^+ & \left[\pm 0.231 \right] \end{array} \right] T_P(t) = \left[\begin{array}{ccc} 6.425 & 3.627D^{1/2} & 0.563D \\ \left[\pm 1.434 \right]^- & \left[\pm 1.192 \right]^+ & \left[\pm 0.295 \right] \end{array} \right] \phi(t)$$

J'ai mon modèle direct !!

Intérêt pour la caractérisation thermique

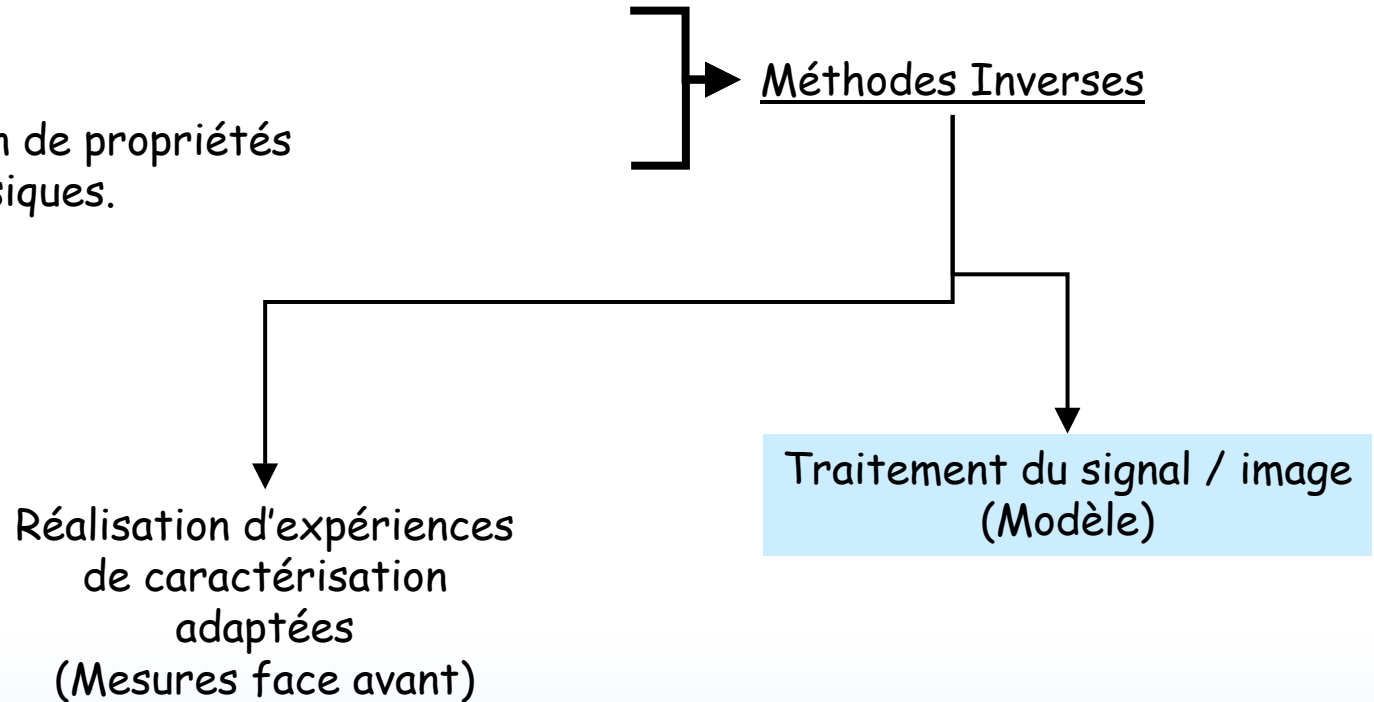


Signal d'excitation : Dirac, Périodique (phase)

Démarche générale

• C.N.D.T.

• Estimation de propriétés thermophysiques.



• Hypothèses de travail 'confortable' : Systèmes linéaires et stationnaires

• Caractérisation de Systèmes multi échelles : Constantes de temps réparties sur plusieurs décades

Le modèle

Dans des configurations sympathiques (transfert 1D plan , cylindrique ou sphérique)

$$\bar{T}(s, x=0) = H_{\{\lambda, \alpha, R_c, \dots\}}(x=0, s) \bar{\phi}(s)$$

Si :  Fonction de transfert

$$\phi(t) = \text{Dirac}(t)$$

On obtient directement la réponse impulsionnelle dans le domaine opérationnel (Laplace)

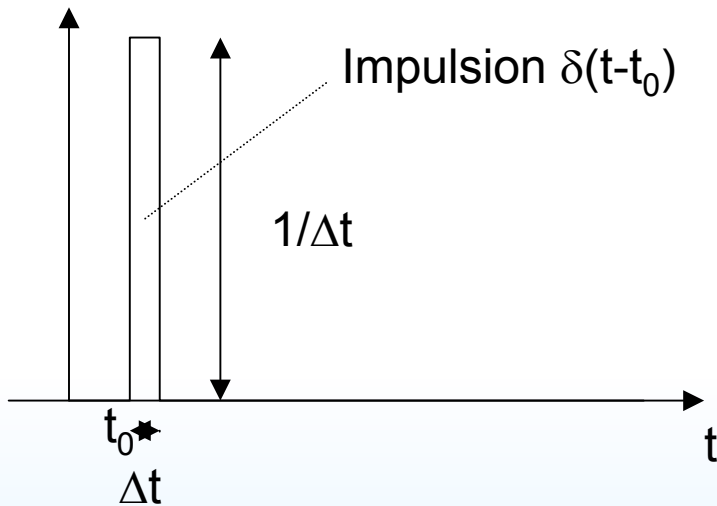
$$\bar{h}_0(s) = H_{\{\lambda, \alpha, R_c, \dots\}}(x=0, s)$$

Ce qui est généralement fait : On revient dans le domaine temporel par transformée inverse numérique et on identifie les paramètres

$$\{\lambda, \alpha, R_c, \dots\}$$

Répercussion sur l'expérience

Il faut générer un signal de largeur 'nulle' et d'amplitude 'infinie'



En pratique

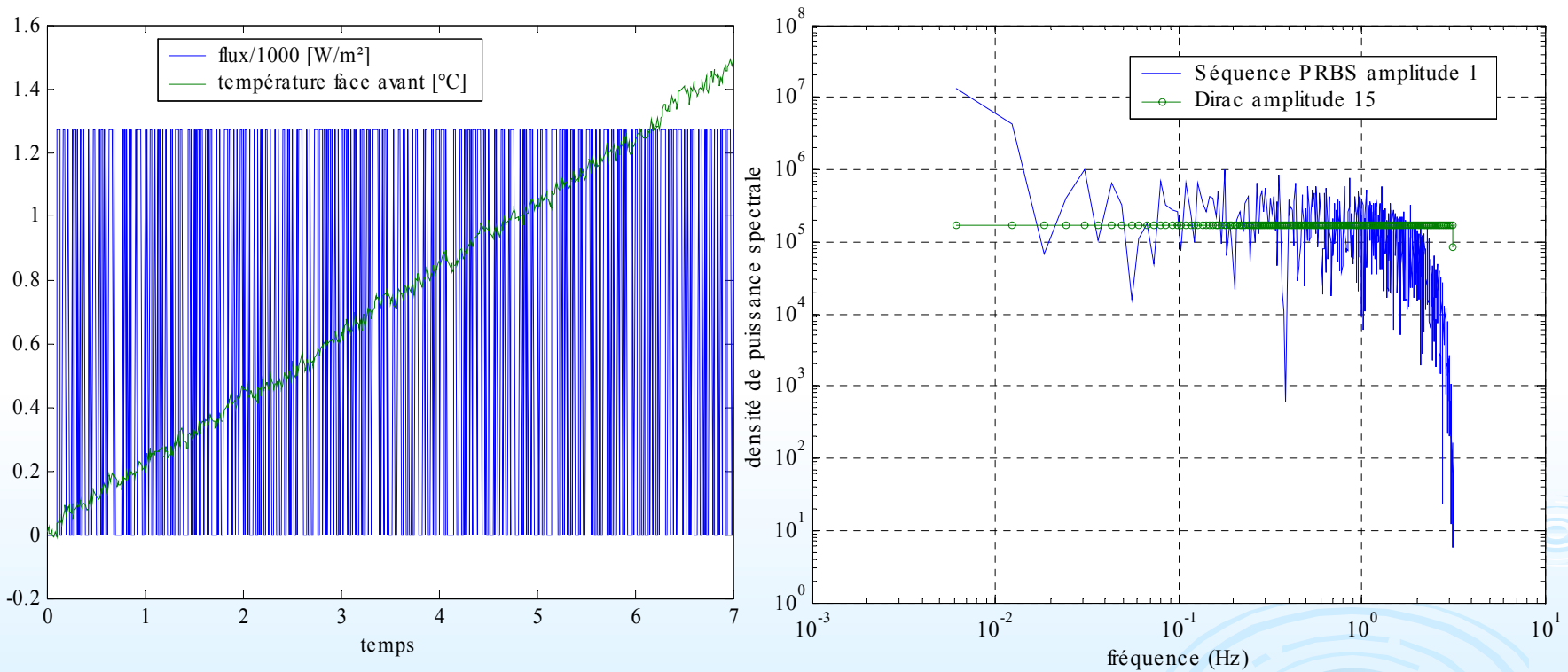
Risque d'apparition de non linéarités

On sort de l'hypothèse fondamentale de travail

La modélisation est une idéalisation du signal réellement généré

En conclusion : il vaut mieux reconstruire la réponse impulsionnelle

Comment? En générant un signal aléatoire du flux de chaleur sur la face avant





$$\bar{\phi}(s) ???$$

Donc on n'utilise pas le modèle dans le domaine de Laplace

Mais on identifie les paramètres du modèle non entier réduit à partir des mesures de températures $Y_0(t)$ et de flux $\phi(t)$ pour une excitation aléatoire

$$\sum_{n=M_0}^M \alpha_n D^{n/2} T(x,t) = \sum_{n=L_0}^L \beta_n D^{n/2} \phi(t)$$

Et on peut reconstruire la réponse impulsionnelle $h(t)$

$$\sum_{n=M_0}^M \alpha_n I^{n/2} h(t) = \sum_{n=L_0}^L \beta_n \frac{t^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)}$$

La connaissance du domaine de confiance des paramètres du modèle non entier permet d'exprimer le domaine de confiance de la réponse impulsionnelle:

$$\Delta h = \sum_{i=0}^L \Delta \beta_i I^{i/2} \delta(t) - \sum_{i=0}^M \Delta \alpha_i I^{i/2} h(t) - \sum_{i=0}^M (\alpha_i + \Delta \alpha_i) I^{i/2} \Delta h(t), \quad \alpha_0 = 1, \Delta \alpha_0 = 0$$

L'identification des paramètres du modèle

- Mesure de température au point m dans le système

$$Y_0(t) = T_0(t) + e(t)$$

- Expression de $Y(t)$ sous forme d'une régression linéaire

$$Y_0(t) = \mathbf{H}(t) \boldsymbol{\theta} + \varepsilon(t)$$

Avec:

- Matrice de régression linéaire contenant les dérivées successives de la température et du flux

$$\mathbf{H}(t) = \left[-D^{(L_0+1)/2} Y_0(t) \quad \dots \quad -D^{L/2} Y_0(t) \quad D^{M_0/2} \phi(t) \quad D^{(M_0+1)/2} \phi(t) \quad \dots \quad D^{M/2} \phi(t) \right]$$

- Vecteur des paramètres à estimer

$$\boldsymbol{\theta} = \left[\alpha_{L_0+1} \quad \dots \quad \alpha_L \quad \beta_{M_0} \quad \dots \quad \beta_M \right]^T$$

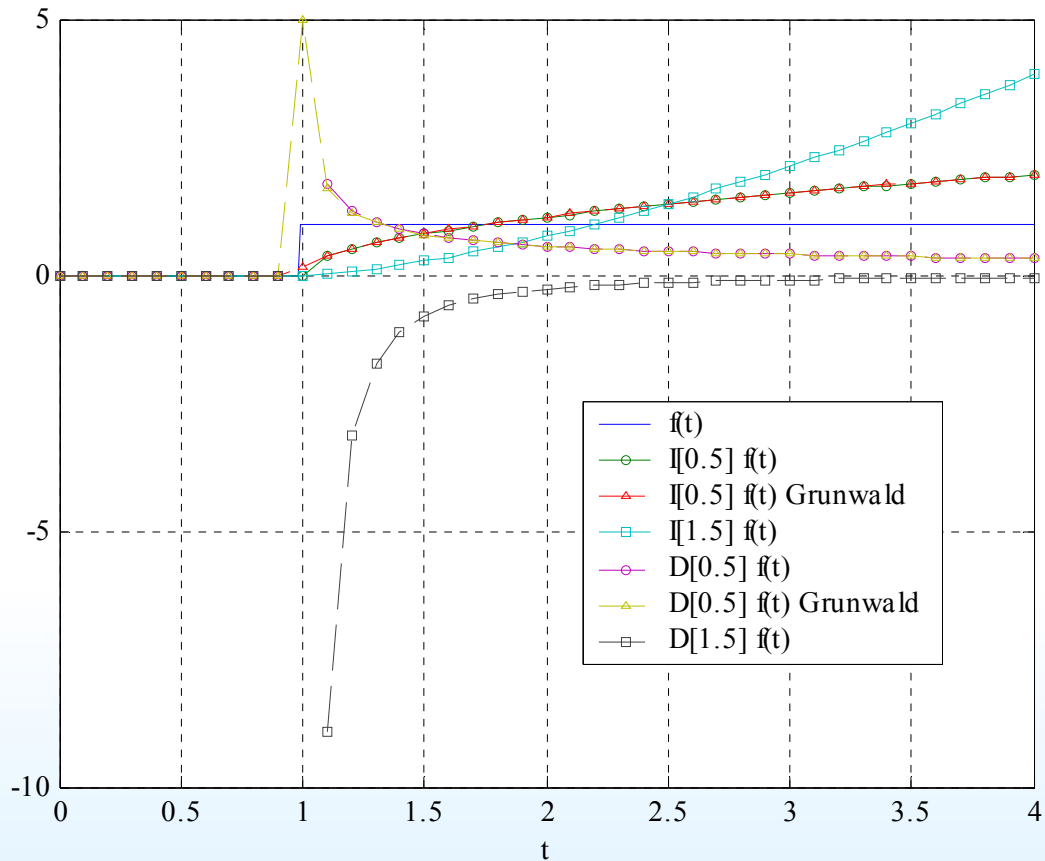
- Résidu

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^L a_i D^{i/2} e(t)$$

Identification au sens des moindres carrés linéaires

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}_K^T \mathbf{H}_K \right)^{-1} \mathbf{H}_K^T \mathbf{Y}_K$$

Problème : la dérivation des données expérimentales dans la matrice de régression amplifie les erreurs de mesures:



On doit donc filtrer les données de flux et de température : utilisation d'un filtre d'état non entier.

Nouvelle expression du modèle non entier

$$H_0(s) = \frac{\sum_{i=L_0}^L \beta_i s^{i/2}}{\sum_{i=M_0}^M \alpha_i s^{i/2}}$$

On divise le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert fractionnaire par:

$$s^{M/2}$$

On obtient:

$$H_0(s) = \frac{\sum_{i=L_0}^L \beta_i s^{-(M-i)/2}}{\sum_{i=M_0}^M \alpha_i s^{-(M-i)/2}}$$

$$\sum_{i=M_0}^M \alpha_i I^{(M-i)/2} T_0(t) = \sum_{i=L_0}^L \beta_i I^{(M-i)/2} \phi(t) \quad \alpha_0 = 1$$

Ainsi la nouvelle expression de la matrice de régression devient:

$$H'(t) = \left[-I^{(M-M_0-1)/2} Y_0(t) \quad \dots \quad Y_0(t) \quad I^{(M-L_0)/2} \phi(t) \quad \dots \quad I^{(M-L)/2} \phi(t) \right]$$

Il n'est plus nécessaire de filtrer les données de flux et de température !

Autre problème : On veut traiter beaucoup de données (K très grand), on utilise la méthode des moindres carrés linéaires récurrents pour l'estimation du vecteur des paramètres (filtre de Kalman) :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \mathbf{L}(t) \left[y(t) - \mathbf{H}'(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \right]$$

Où:

$$\mathbf{L}(t) = \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{H}'^T(t)}{\lambda(t) + \mathbf{H}'(t)\mathbf{P}(t-1)\mathbf{H}'^T(t)} \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{H}'^T(t)\mathbf{H}'(t)\mathbf{P}(t-1)}{\lambda(t) + \mathbf{H}'(t)\mathbf{P}(t-1)\mathbf{H}'^T(t)}$$

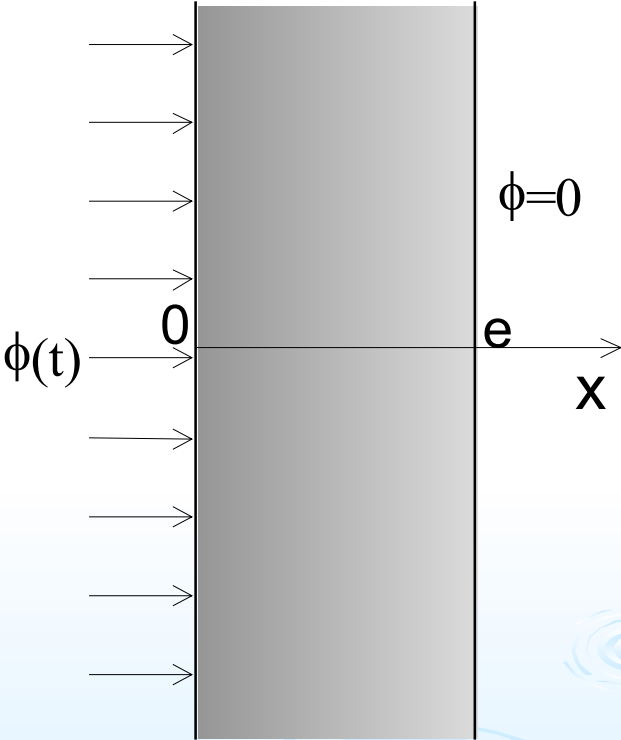
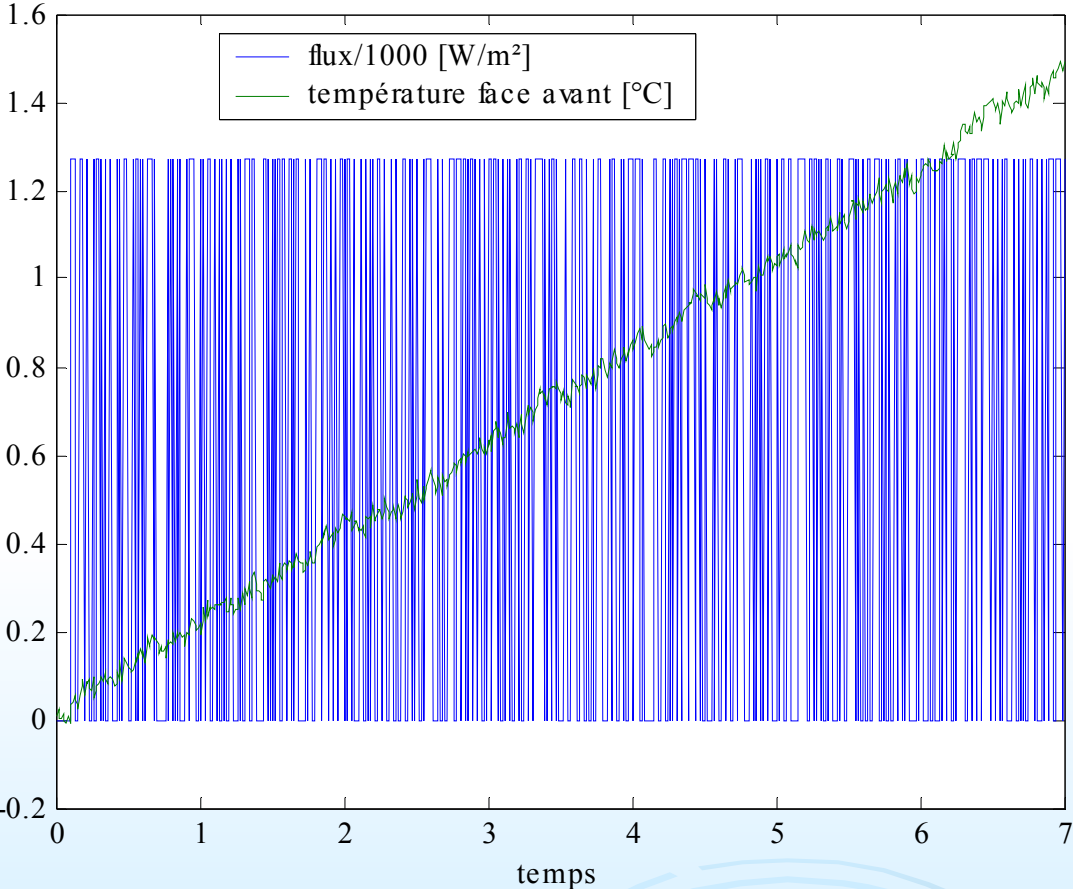
Avec valeurs initiales: $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \mathbf{0}_D$ $\mathbf{P}(0) = 10^6 \mathbf{I}_D$

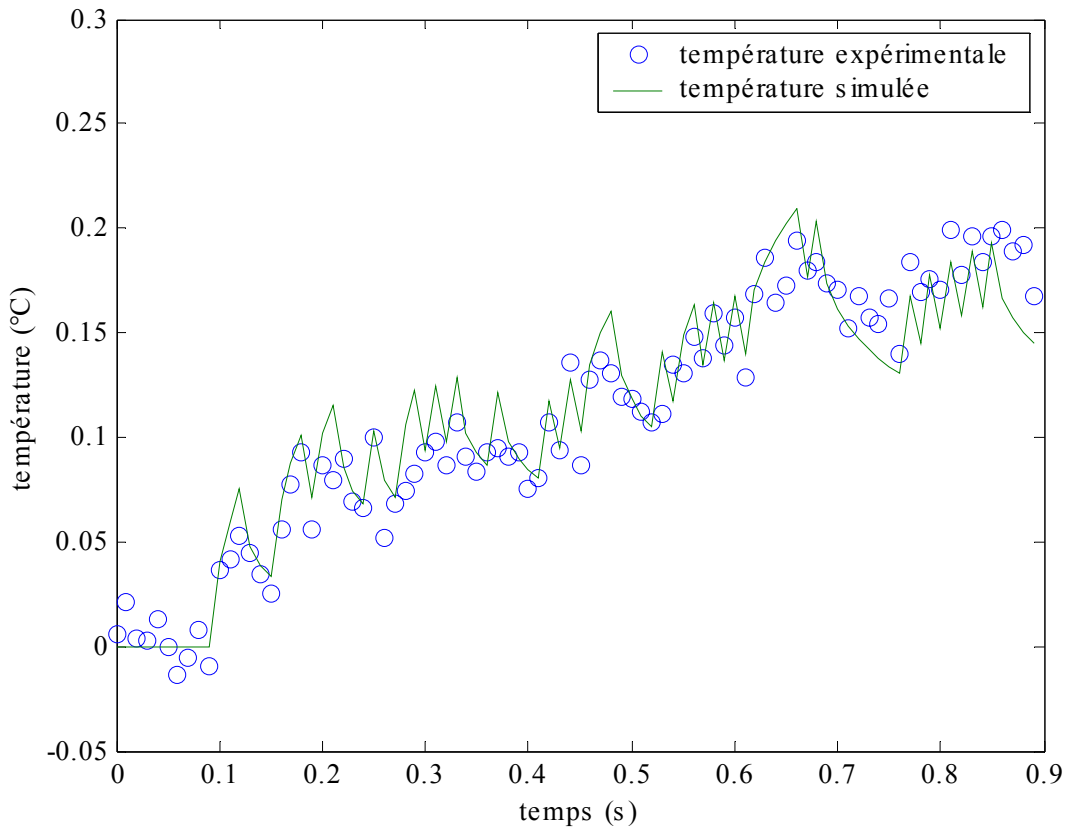
$\mathbf{0}_D$ Vecteur nul, \mathbf{I}_D Matrice identité, de dimension $D = \dim(\hat{\boldsymbol{\theta}})$

Indication sur le domaine de confiance des paramètres estimés:

$$\text{cov}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(t) \frac{\sigma_y}{2}$$

Et si maintenant on veut déterminer les propriétés thermophysiques d'une plaque plane...





Temps courts (milieu semi infini)

$$\alpha_0 \quad T_0(t) = I^{1/2} \varphi(t)$$

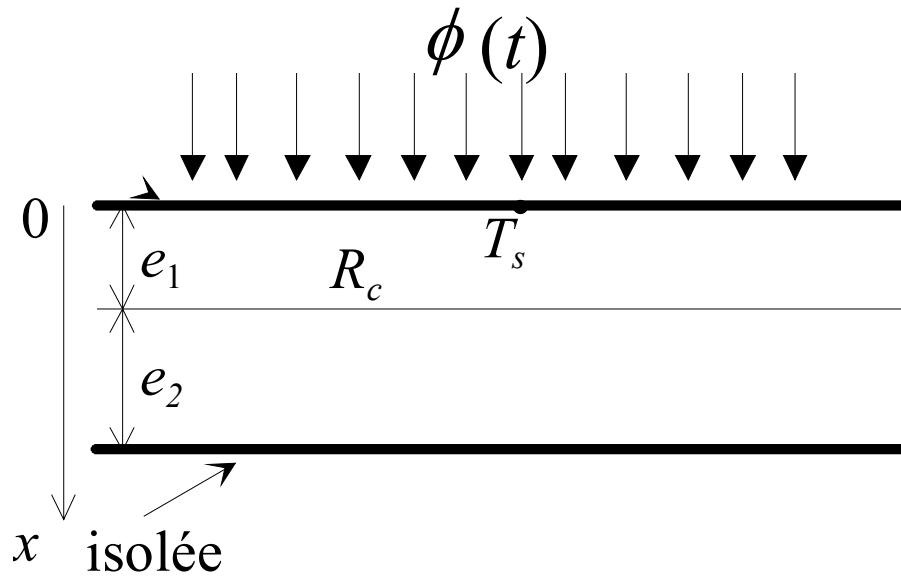
$$\alpha_0 = (3,1597 \pm 0,324) 10^3$$

$$\sqrt{\lambda \rho C_p} = 3,1623 10^3$$

Temps courts et temps longs

M	$\frac{\beta_M}{\alpha_{M-2}} \propto \frac{1}{\rho C_p e}$	$\rho C_p \text{ [JK}^{-1} \text{ kg}^{-1}\text{]}$	$\lambda \text{ [W m}^{-1} \text{ K}^{-1}\text{]}$
2	$(1.8573 \pm 0,224) 10^{-4}$	$0,1794 10^6$	55,65
3	$(3.5150 \pm 0,274) 10^{-4}$	$0,9483 10^6$	10,52

Application au CND : caractérisation d'un défaut résistif dans une plaque

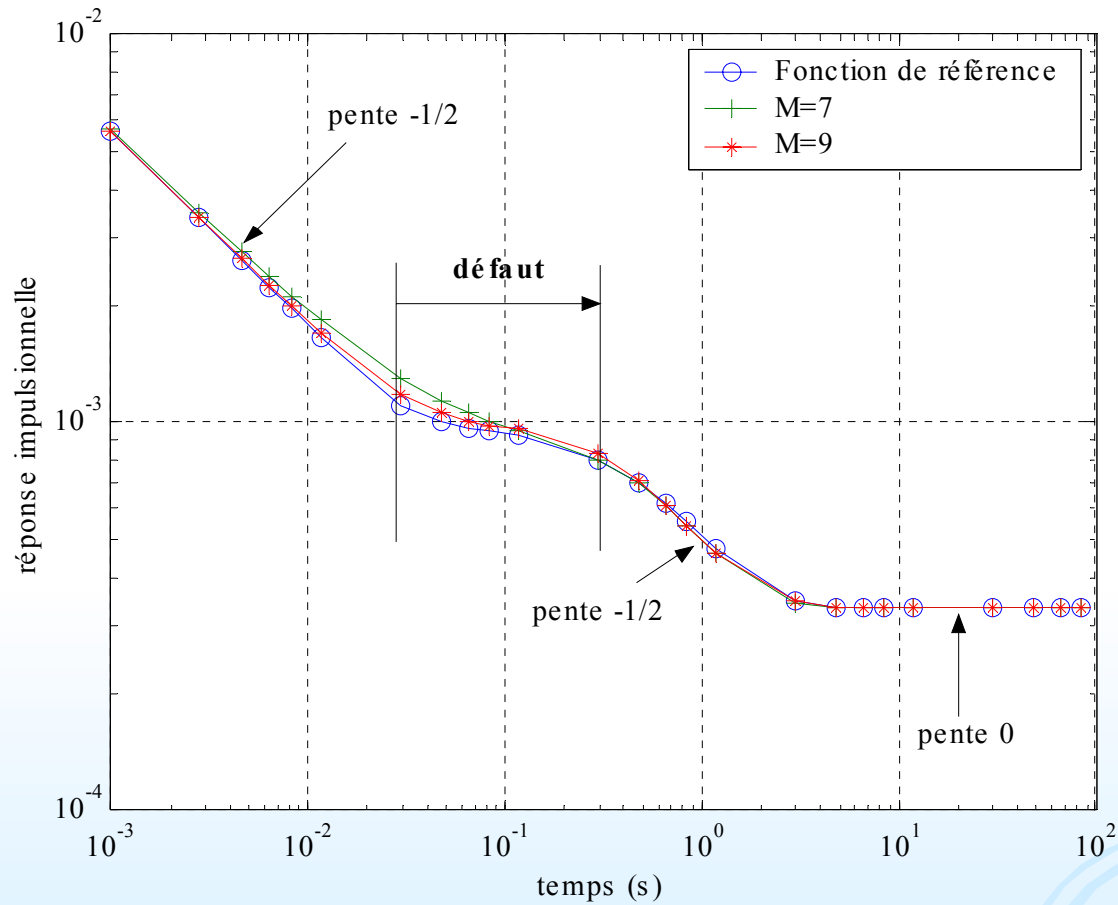


$$H_0(s) = \frac{\cosh(k e) + R_c \lambda k \cosh(k e_1) \sinh(k e_2)}{\lambda k \sinh(k e) + R_c \lambda^2 k^2 \sinh(k e_1) \sinh(k e_2)}, \quad k = \sqrt{\frac{s}{\alpha}}$$

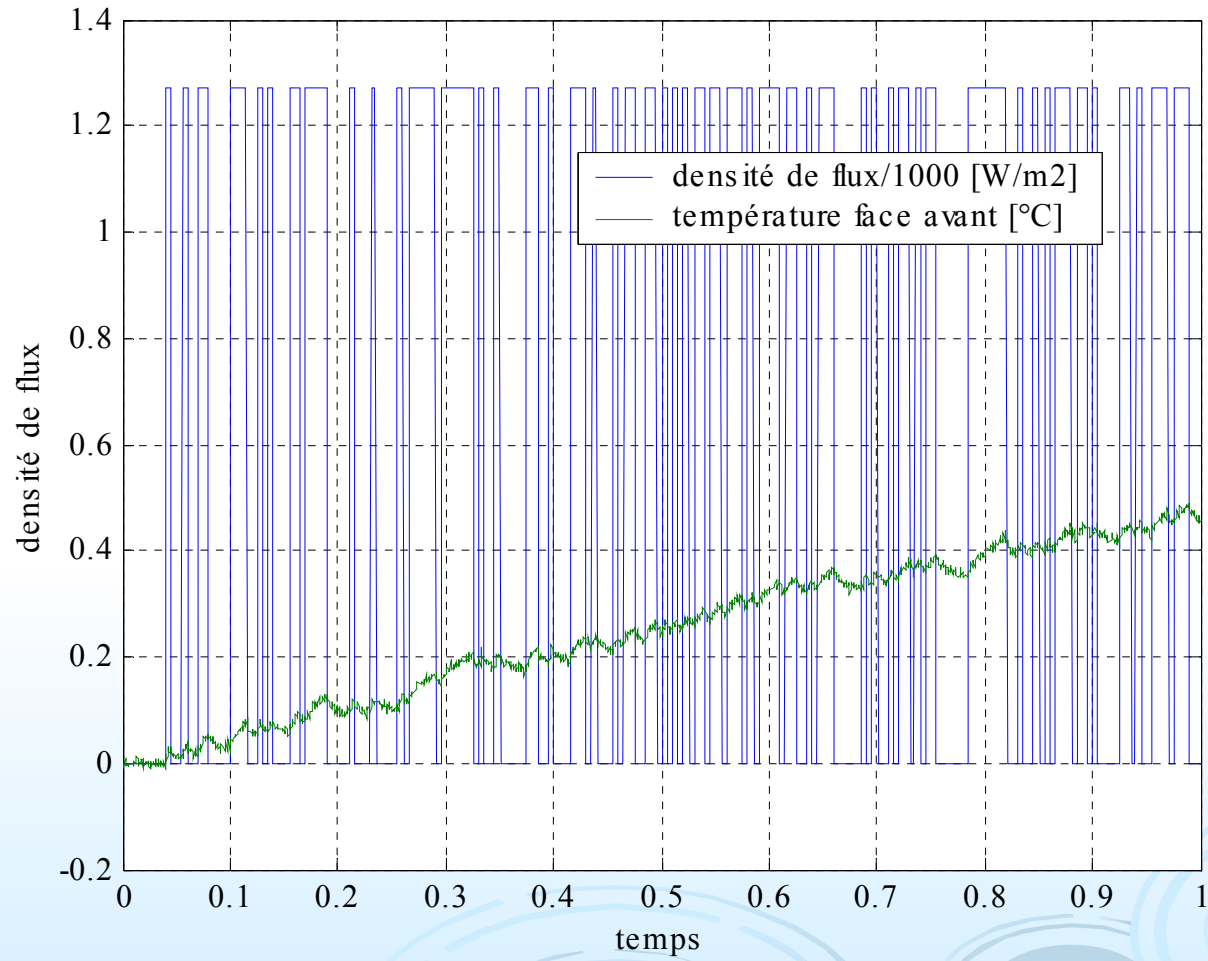
$$\sum_{i=2}^{M+1} \alpha_i \mathbf{I}^{(M+1-i)/2} T_0(t) = \sum_{i=0}^M \beta_i \mathbf{I}^{(M+1-i)/2} \phi(t)$$

Paramètre	Expression des paramètres en fonction des propriétés thermophysiques	Paramètre	Expression des paramètres en fonction des propriétés thermophysiques
β_0	1	α_2	$\lambda e/\alpha$
β_1	$e/\sqrt{\alpha}$	α_3	$\lambda e^2/\alpha^{3/2}$
β_2	$(e^2 + \lambda R_c e_2)/\alpha$	α_4	$\lambda \left(\frac{2}{3} e^3 + \lambda R_c e_1 e_2 \right) / \alpha^2$
β_3	$\left(\frac{2}{3} e^3 + \lambda R_c e_2 (e_1 + e_2) \right) / \alpha^{\frac{3}{2}}$	α_5	$\lambda^2 R_c e_1 e_2 (e_1 + e_2) / \alpha^{5/2}$
β_4	$\lambda R_c e_1 e_2 \left(e_2 + \frac{2}{3} \frac{e_2}{e_1} + e_1 \right) / \alpha^2$	α_6	$\frac{2}{3} \lambda^2 R_c e_1 e_2 \left(e_2^2 + \frac{3}{2} e_1 e_2 + e_1^2 \right) / \alpha^3$
β_5	$\frac{2}{3} \lambda R_c e_1 e_2 \left(e_2^2 + \frac{3}{2} e_1 e_2 + e_1^2 \right) / \alpha^{\frac{5}{2}}$	α_7	$\frac{2}{3} \lambda^2 R_c e_1^2 e_2^2 (e_2 + e_1) / \alpha^{\frac{7}{2}}$
β_6	$\frac{2}{3} \lambda R_c e_1^2 e_2^2 (e_2 + e_1) / \alpha^3$	α_8	$\frac{4}{9} \lambda^2 R_c e_1^3 e_2^3 / \alpha^4$
β_7	$\frac{4}{9} \lambda R_c e_1^3 e_2^3 / \alpha^{\frac{7}{2}}$		

Réponse impulsionnelle



On passe à l'expérience

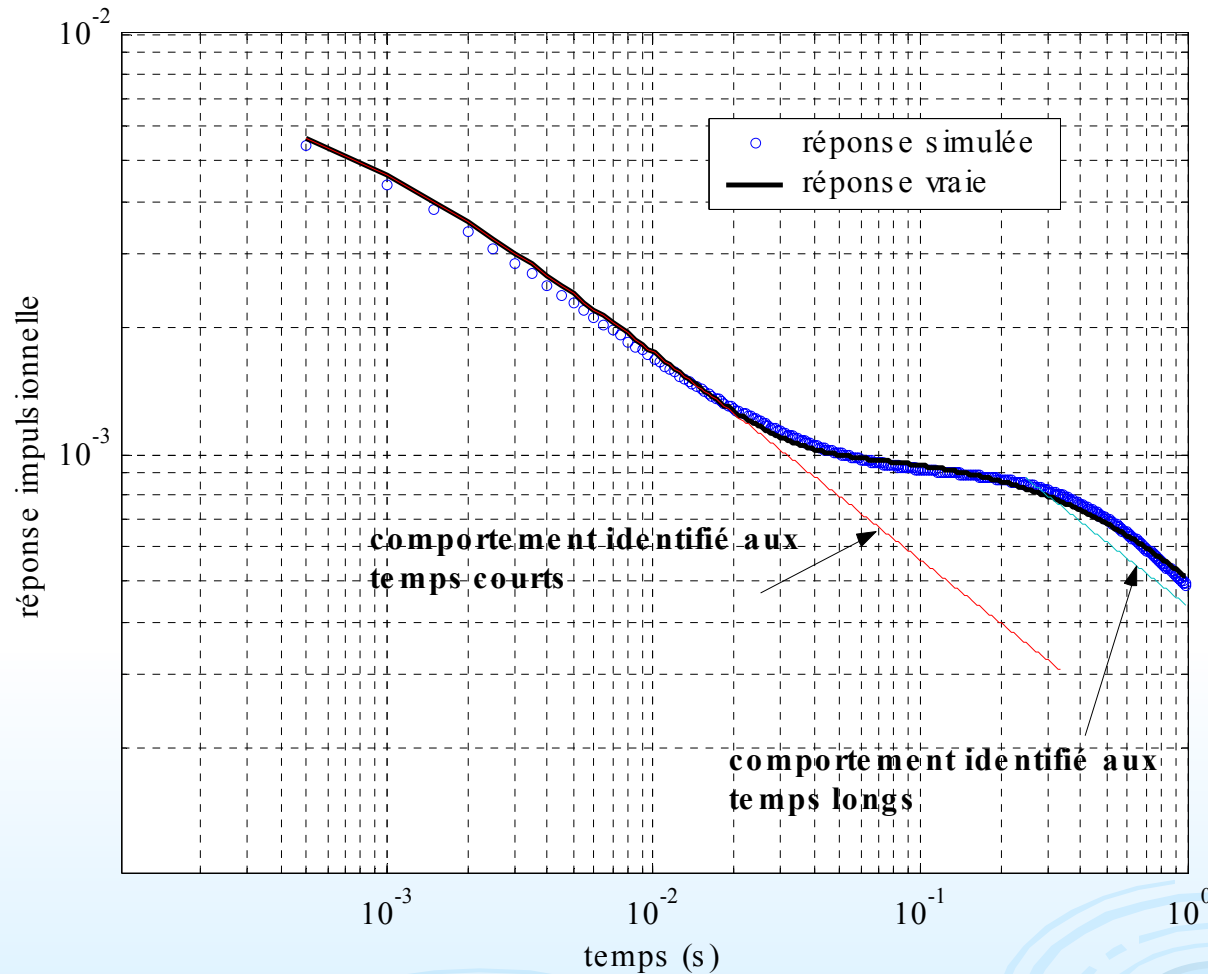


$\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-3}$ sec

(2000 échantillons)

$$\alpha_0 T_0(t) + \alpha_1 I^1 T_0(t) = \beta_0 I^{1/2} \phi(t) + \beta_1 I^1 \phi(t) + \beta_2 I^{3/2} \phi(t)$$

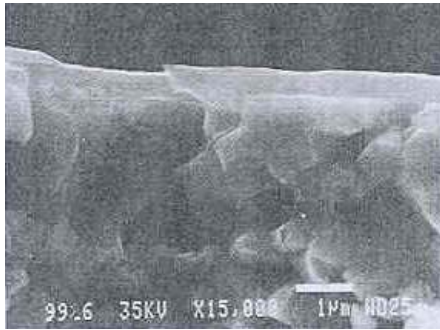
$$\beta_0 = 1, \alpha_0 = \sqrt{\lambda \rho C_p}$$



On a détecté la présence du défaut avec un modèle à 3 paramètres en moins de 1 seconde de temps de calcul !!

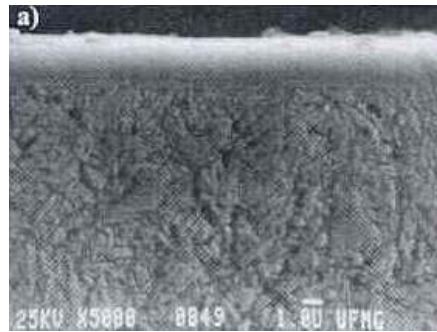
Autre application (en cours) : la caractérisation de dépôts micrométrique

■ Revêtements PVD

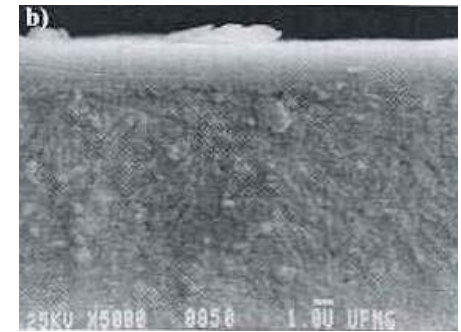


TiN 0,5~2 µm

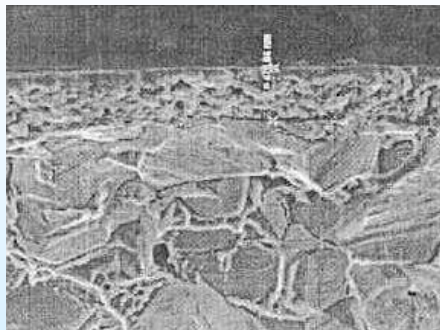
■ Revêtements CVD



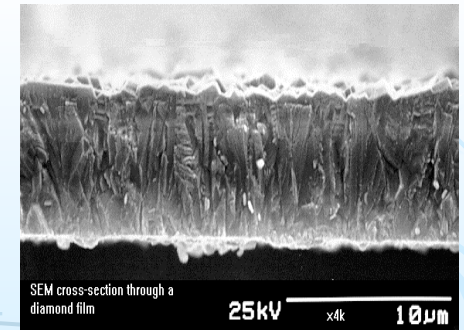
TiAlN ~2 µm



CrN ~2 µm



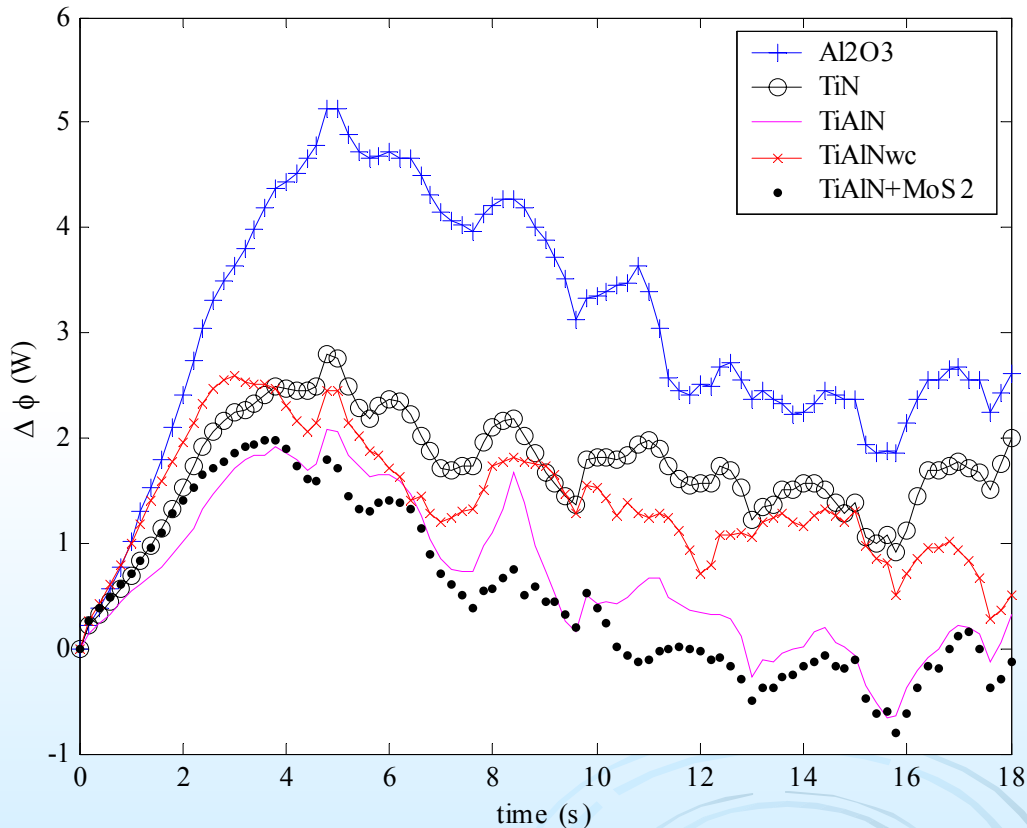
Diamant
épaisseur 5~20 µm



Mais aussi: TiCN, TiC, Al₂O₃...

Quelques résultats obtenus en coupe métallique parla méthode d'identification de systèmes non entiers

Comparaison des performances des divers revêtements

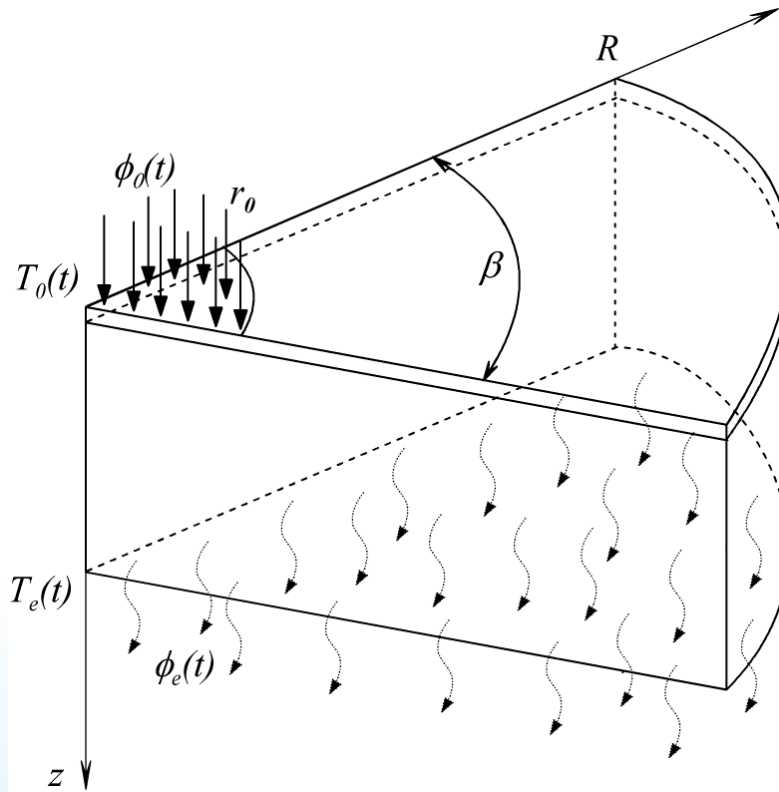


Opération de dressage de la surface d'un disque de la périphérie vers le centre.

On représente l'écart entre le flux estimé pour l'outil sans revêtement et celui pour l'outil revêtu.

$$\Delta\phi = \phi_{nonrev} - \phi_{rev}$$

Fonction de transfert de référence



Part de la géométrie 3D axisymétrique considérée

La fonction de transfert 3D en $z=0$

$$\overline{T}_0(\alpha_n, s) = \underbrace{H_{1D}(s, \alpha_n)}_{H_{3D}(\alpha_n, s)} \frac{r_0}{\alpha_n} J_1(\alpha_n r_0) \overline{\phi}_0(s)$$

Avec:

$$H_{1D}(s, \alpha_n) = \frac{G_0 + G_1}{G_2 + G_3}$$

La fonction de transfert 1D dans le domaine de Laplace (sur le temps) et de Hankel (sur r)

$$H_{1D}(s, \alpha_n) = \frac{G_0 + G_1}{G_2 + G_3}$$

avec : $G_0 = \cosh(k_s e_s) \cosh(k_d e_d) + \frac{\lambda_s k_s}{\lambda_d k_d} \sinh(k_s e_s) \sinh(k_d e_d)$

$$G_1 = h \left(\frac{1}{\lambda_s k_s} \sinh(k_s e_s) \cosh(k_d e_d) + \frac{1}{\lambda_d k_d} \sinh(k_d e_d) \cosh(k_s e_s) \right)$$

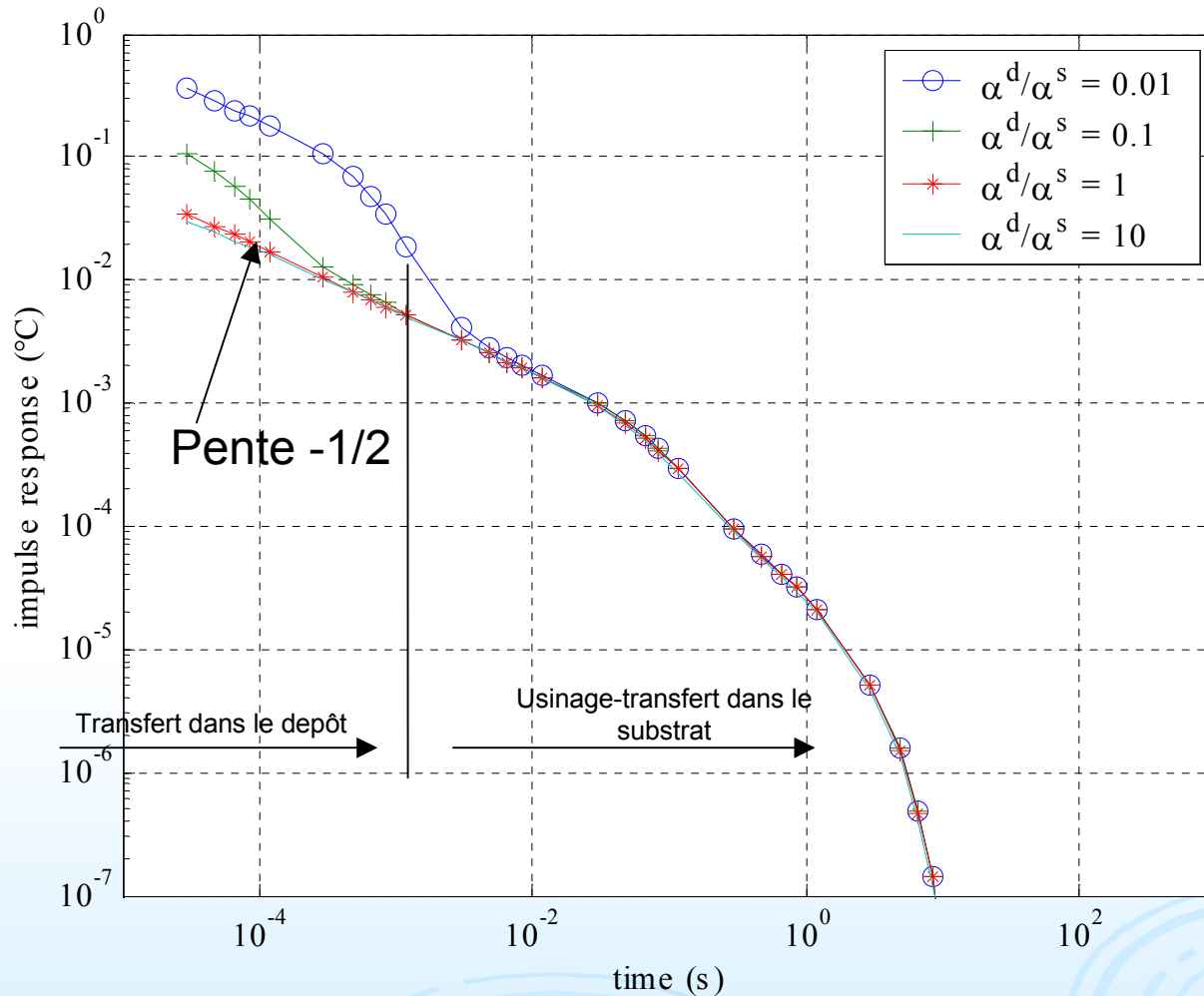
$$G_2 = \lambda_d k_d \cosh(k_s e_s) \sinh(k_d e_d) + \lambda_s k_s \sinh(k_s e_s) \cosh(k_d e_d)$$

$$G_3 = h \left(\frac{\lambda_d k_d}{\lambda_s k_s} \sinh(k_d e_d) \sinh(k_s e_s) + \cosh(k_d e_d) \cosh(k_s e_s) \right)$$

d – depot; s – substrat

où : $k = \sqrt{\frac{s}{\alpha} + \alpha_n^2}$ $\alpha_n R \approx \pi \left(n + \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{8\pi} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{4} \right)}$

Réponse impulsionnelle



(Les réponses impulsionnelles calculées pour divers rapports a_d/a_s)