



UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 - ENSEIRB

UMR 5131 CNRS

**AUTOMATIQUE, PRODUCTIQUE, SIGNAL & IMAGE**



# Simulation de Systèmes Non Entier

Mohamed AOUN, Rachid MALTI, François LEVRON et Alain OUSTALOUP



LAP - UMR 5131 CNRS  
Université Bordeaux 1 - ENSEIRB  
351, cours de la Libération - 33405 TALENCE Cedex - FRANCE  
Tél. : +33 (0)5 56 84 66 07 - Fax : +33 (0)5 56 84 66 44  
E-mail : [aoun@lap.u-bordeaux.fr](mailto:aoun@lap.u-bordeaux.fr) - URL : <http://www.lap.u-bordeaux.fr>



# Définition de la dérivation non entière

ordre 1

$$D^1 f(kh) = \frac{f(kh) - f((k-1)h)}{h}$$

$$\mathcal{L}(D^1 f(t)) = (s)^1 \mathcal{L}(f(t))$$

ordre 2

$$D^2 f(kh) = \frac{f(kh) - 2f((k-1)h) + f((k-2)h)}{h}$$

$$\mathcal{L}(D^2 f(t)) = (s)^2 \mathcal{L}(f(t))$$

ordre  $n$

$$D^n_{n \in \mathbb{C}} f(Kh) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^K \left[ (-1)^k \binom{n}{k} f(Kh - kh) \right]$$

$$\mathcal{L}(D^n f(t)) = (s)^n \mathcal{L}(f(t))$$

# Problématique

Simuler des systèmes non entiers



temps

?



Comment évaluer la sortie?

# Solutions

① Méthode analytique

② Méthodes basées sur des modèles discrets

③ Méthodes basées sur des modèles continus

# ① Méthode analytique

Fonction de transfert

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_1 s^{n_{\beta_1}} + \dots + \beta_q s^{n_{\beta_q}}}{\alpha_1 s^{n_{\alpha_1}} + \dots + \alpha_r s^{n_{\alpha_r}}}$$



Forme modale

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{l=1}^L \frac{A_l}{s^n - \lambda_l}$$

$$y(t) = \sum_{l=1}^L \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A_l}{s^n - \lambda_l} \right\} \otimes u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^n - \lambda_l} \right) = \sum_{k=1}^{\text{polesnumber}} \frac{s_k}{n\lambda_l} e^{ts_k} + \frac{\sin(n\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-tx}}{x^{2n} - 2\lambda_l x^n \cos(n\pi) + \lambda_l^2} dx$$



- temps de calcul important
- implantation difficile

## ② Méthodes basées sur des modèles discrets

Fonction de transfert continu

$$H(s) = \frac{\beta_1 s^{n_{\beta_1}} + \dots + \beta_q s^{n_{\beta_q}}}{\alpha_1 s^{n_{\alpha_1}} + \dots + \alpha_r s^{n_{\alpha_r}}}$$

Fonction de transfert discrète

$$\Rightarrow H(z^{-1}) = \frac{\beta_1 (w(z^{-1}))^{n_{\beta_1}} + \dots + \beta_q (w(z^{-1}))^{n_{\beta_q}}}{\alpha_1 (w(z^{-1}))^{n_{\alpha_1}} + \dots + \alpha_r (w(z^{-1}))^{n_{\alpha_r}}}$$

•Euler

•Tustin

•Simpson

•Al-alaoui

$$(w(z^{-1}))^n = \left( \frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7} \right)^n$$

$$= \left( \frac{8}{7T} \right)^n \left( 1 - \frac{8}{7} n z^{-1} + \left( -\frac{24}{49} n + \frac{32}{49} n^2 \right) z^{-2} + \dots \right)$$



- dimension du modèle discret élevée
- temps de calcul élevé

### ③ Méthodes basées sur des modèles continus

systeme non entier

$$\frac{\beta_1 s^{n_{\beta_1}} + \dots + \beta_q s^{n_{\beta_q}}}{\alpha_1 s^{n_{\alpha_1}} + \dots + \alpha_r s^{n_{\alpha_r}}}$$



modele continu entier

$$\frac{? + ?s + ?s^2 \dots + ?s^?}{? + ?s + ?s^2 \dots + ?s^?} ; y(t)?$$

- ✘ Méthodes basées sur l'identification fréquentielle
- ✘ Méthode basée sur la représentation diffusive
- ✘ Méthodes basées sur l'approximation de  $s^n$  par un modèle entier

## × Méthodes basées sur l'approximation de $s^n$ par un modèle entier

système non entier

$$\frac{\beta_1 s^{n_{\beta_1}} + \dots + \beta_q s^{n_{\beta_q}}}{\alpha_1 s^{n_{\alpha_1}} + \dots + \alpha_r s^{n_{\alpha_r}}}$$



modèle continu entier

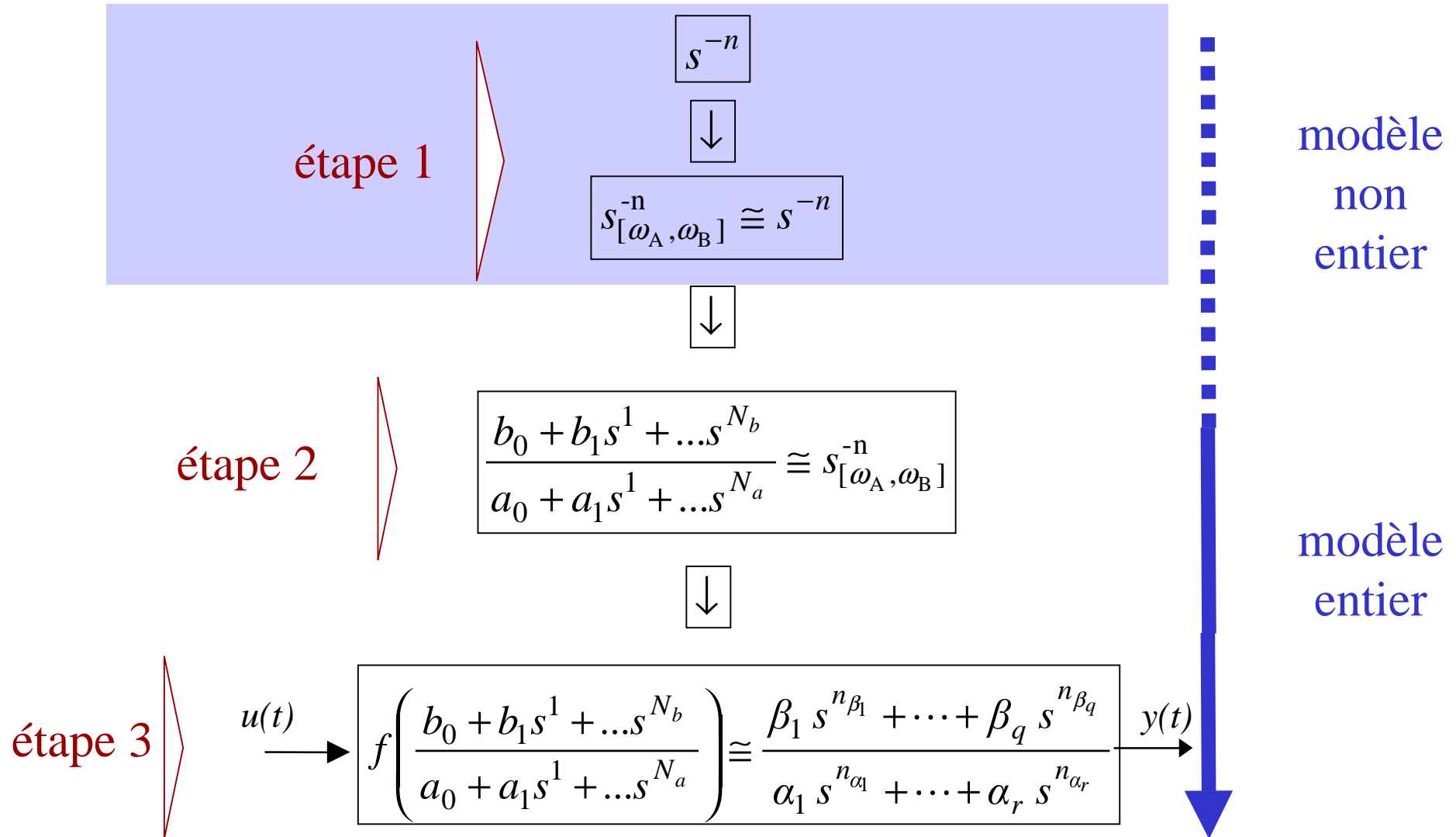
$$\frac{? + ?s + ?s^2 \dots + ?s^?}{? + ?s + ?s^2 \dots + ?s^?} ; y(t)?$$

**Etape 1:** Approximation de l'opérateur non entier  $s^n$  sur une bande de fréquence  $[\omega_A, \omega_B]$  avec un modèle non entier  $s^n_{[\omega_A, \omega_B]}$

**Etape 2:** Approximation du modèle non entier obtenu par un modèle entier

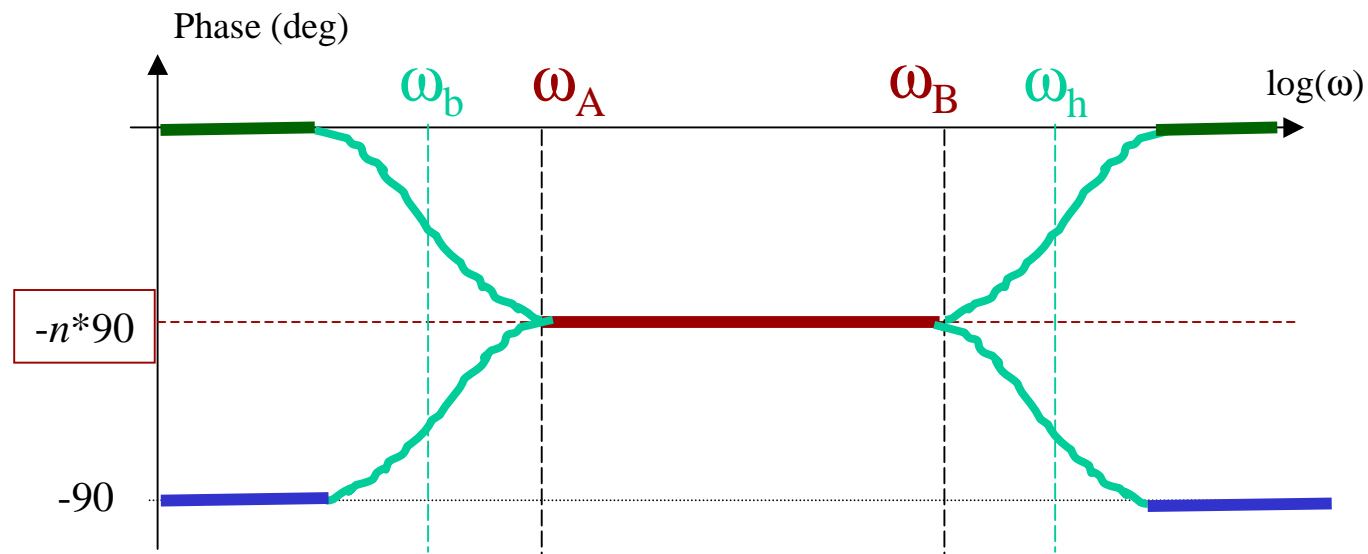
**Etape 3:** Calcul du modèle entier global et/ou la sortie du modèle

# × Méthodes basées sur l'approximation de $s^{-n}$ par un modèle entier



# Etape 1: synthèse de $s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$

$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$  intégrateur d'ordre  $n$  sur  $[\omega_A, \omega_B]$



$$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = C \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^n$$

$$\omega_b = \sigma^{-1} \omega_A$$

$$\omega_h = \sigma \omega_B$$

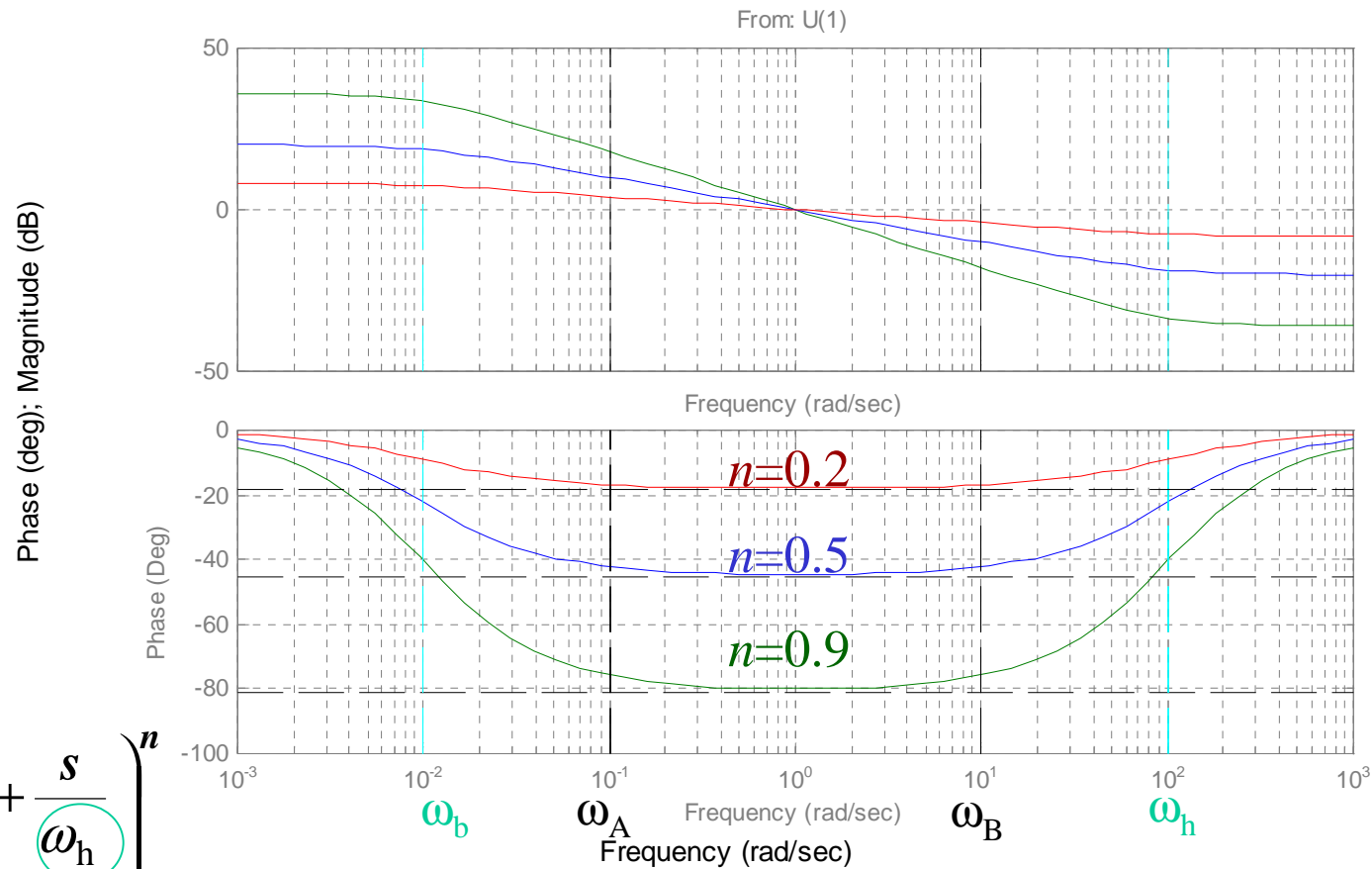
$\sigma ?$

$$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = \frac{C}{s} \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^{n-1}$$

# Etape 1: synthèse de $s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$

## Choix des fréquences transitionnelles

$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$  intégrateur d'ordre  $n$  sur  $[\omega_A, \omega_B]$



$$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = C \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^n$$

$$\omega_b = \sigma^{-1} \omega_A \quad \omega_h = \sigma \omega_B \quad \sigma = 10$$

$\sigma = f(n) ?$

# Etape 1: synthèse de $s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$

## Calcul de $C(s)$

$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$  intégrateur d'ordre  $n$  sur  $[\omega_A, \omega_B]$

$$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = \underbrace{C(s)}_{\substack{\uparrow \\ \text{fonction de transfert entière}}} \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^n$$

$C(s)$  minimise l'erreur entre  $\left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^n$  et  $\left( \frac{1}{s} \right)^n$  sur  $[\omega_A, \omega_B]$

# Etape 1: synthèse de $s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$

## Calcul de $C(s)$

$$\left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^n = \left( \frac{\omega_A}{s} \right)^n \underbrace{\left( 1 + \frac{s^2 - \omega_A \omega_B}{\omega_A \omega_B + s \omega_B} \right)}_{u(s)}, \quad |u(s)| < 1, \quad \forall \omega_A < \omega < \omega_B$$

développement en série de Taylor  $\left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^n = \left( \frac{\omega_A}{s} \right)^n \left( 1 + nu(s) + \frac{n*(n-1)}{2} u^2(s) + \dots \right)$

$$\left( \frac{1}{s} \right)^n = \frac{(\omega_A)^{-n}}{\left( 1 + nu(s) + \frac{n*(n-1)}{2} u^2(s) + \dots \right)} \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^n, \quad \forall \omega_A < \omega < \omega_B$$

$$\rightarrow s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} \cong \underbrace{\frac{\omega_A \omega_B + s \omega_B}{(\omega_A)^n (ns^2 + s \omega_B + (1-n)\omega_A \omega_B)}}_{C(s)} \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^n$$

# Etape 1: synthèse de $s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$

$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$  intégrateur d'ordre  $n$  sur  $[\omega_A, \omega_B]$

$$\gg s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = K \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^n \quad \omega_b = \sigma^{-1} \omega_A \quad \omega_h = \sigma \omega_B$$

$$\gg s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = \frac{\omega_B (\omega_A + s)}{(\omega_A)^n (ns^2 + \omega_B s + (1-n)\omega_A \omega_B)} \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^n$$

~~$\omega_b, \omega_h$~~

## Etape 1: synthèse de $S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$

Exemple: voir figure matlab *integrateur\_modif.fig*

# Etape 1: synthèse de $S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$

$S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$  intégrateur d'ordre  $n$  sur  $[\omega_A, \omega_B]$

$$\gg S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = \frac{k}{s} \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^{n-1} \quad \omega_b = \sigma^{-1} \omega_A \quad \omega_h = \sigma \omega_B$$

$$\gg S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} \cong \frac{\omega_A^{1-n}}{s} \left( \frac{(1-n)s^2 + \omega_B s + n\omega_A \omega_B}{\omega_A \omega_B + s\omega_B} \right) \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^{n-1}$$

~~$\omega_b, \omega_h$~~

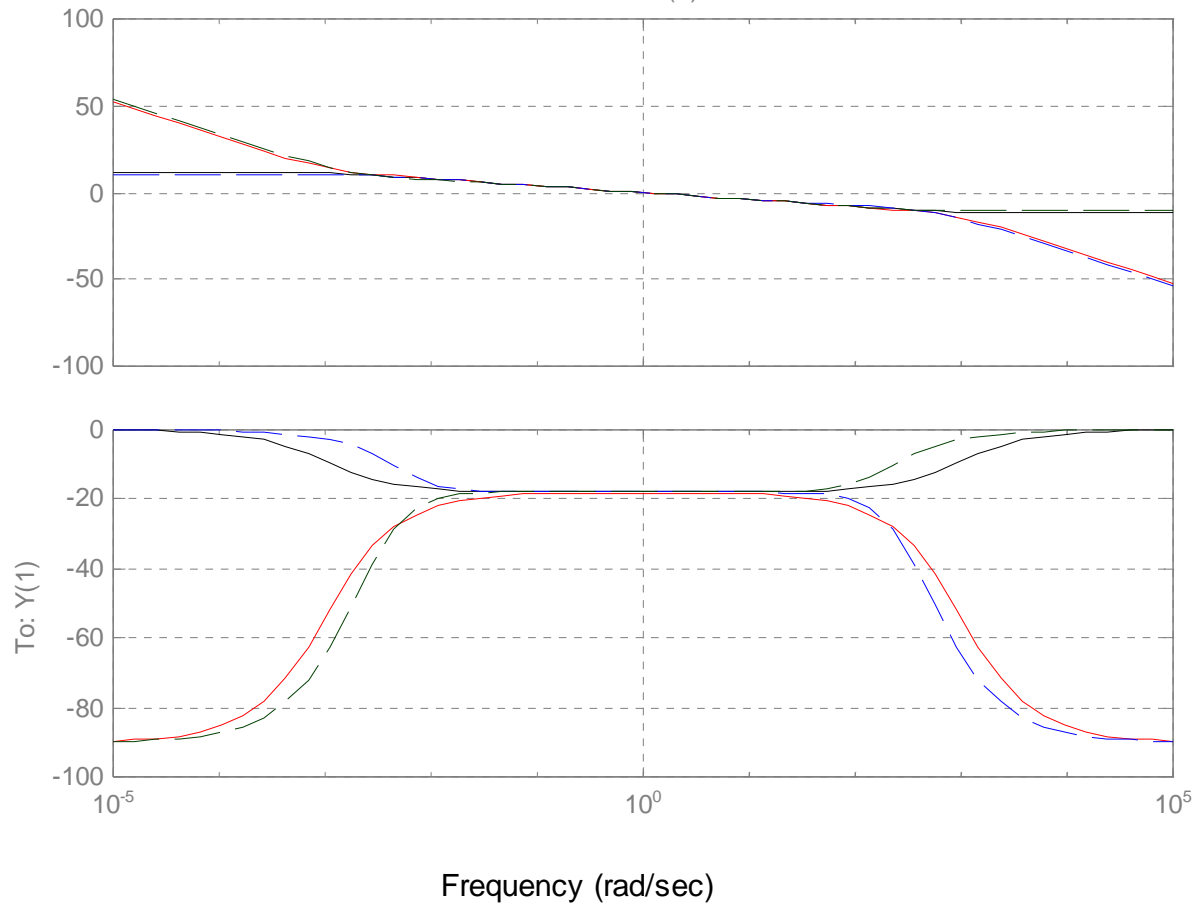
# Etape 1: synthèse de $S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$

## Comportements asymptotiques

Bode Diagrams

From: U(1)

Phase (deg); Magnitude (dB)



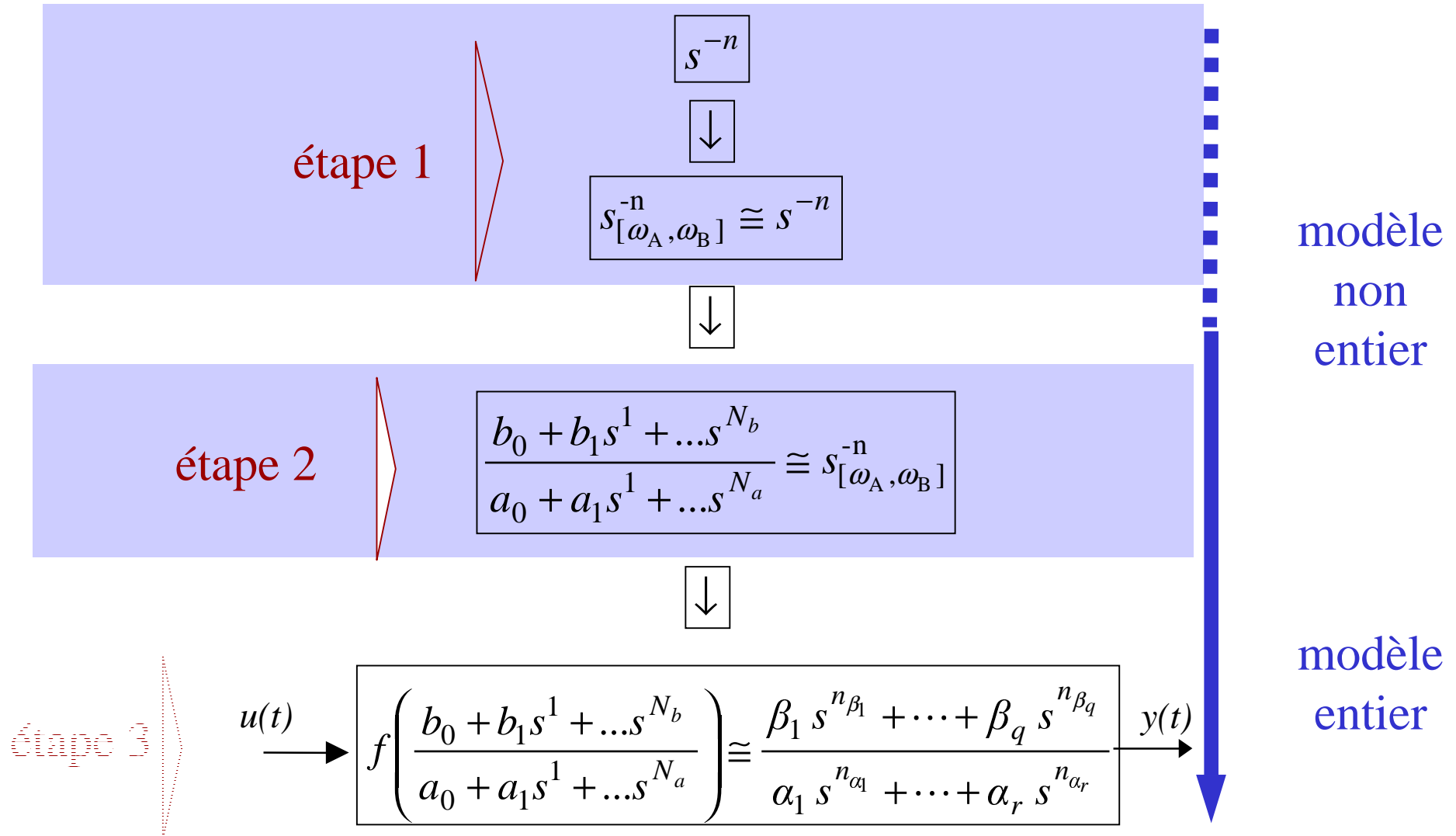
$$S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = K \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^n$$

$$S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = \frac{\omega_B (\omega_A + s)}{(\omega_A)^n (ns^2 + \omega_B s + (1-n)\omega_A \omega_B)} \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^n$$

$$S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = \frac{k}{s} \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^{n-1}$$

$$S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} \cong \frac{\omega_A^{1-n}}{s} \left( \frac{(1-n)s^2 + \omega_B s + n\omega_A \omega_B}{\omega_A \omega_B + s\omega_B} \right) \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^{n-1}$$

# × Méthodes basées sur l'approximation de $s^{-n}$ par un modèle entier



## Etape 2: approximation de $s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$

### Synthèse de la partie irrationnelle

#### •Expansion en série

$$\left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^n = (1 + u(s))^n$$

$$u(s) = \frac{-s/\omega_A + s/\omega_B}{1 + s/\omega_A}$$

Série de Taylor

$$(1 + u(s))^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} (u(s))^i$$

Fractions continus

$$(1 + u(s))^n = 1 + \frac{u(s)}{a_1 + \frac{u(s)}{a_2 + \frac{u(s)}{a_3 + \dots}}}$$

#### •Distribution récursives de pôles et de zéros

$$\left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^n \cong \left( \frac{1}{\omega_A} \right)^n \prod_{k=-N}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}} \right)$$

# Etape 2: approximation de $S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$

## répartition récursive de zéros et de pôles

Approximation par *répartition récursive de zéros et de pôles*.

$$D(s) = \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^n$$

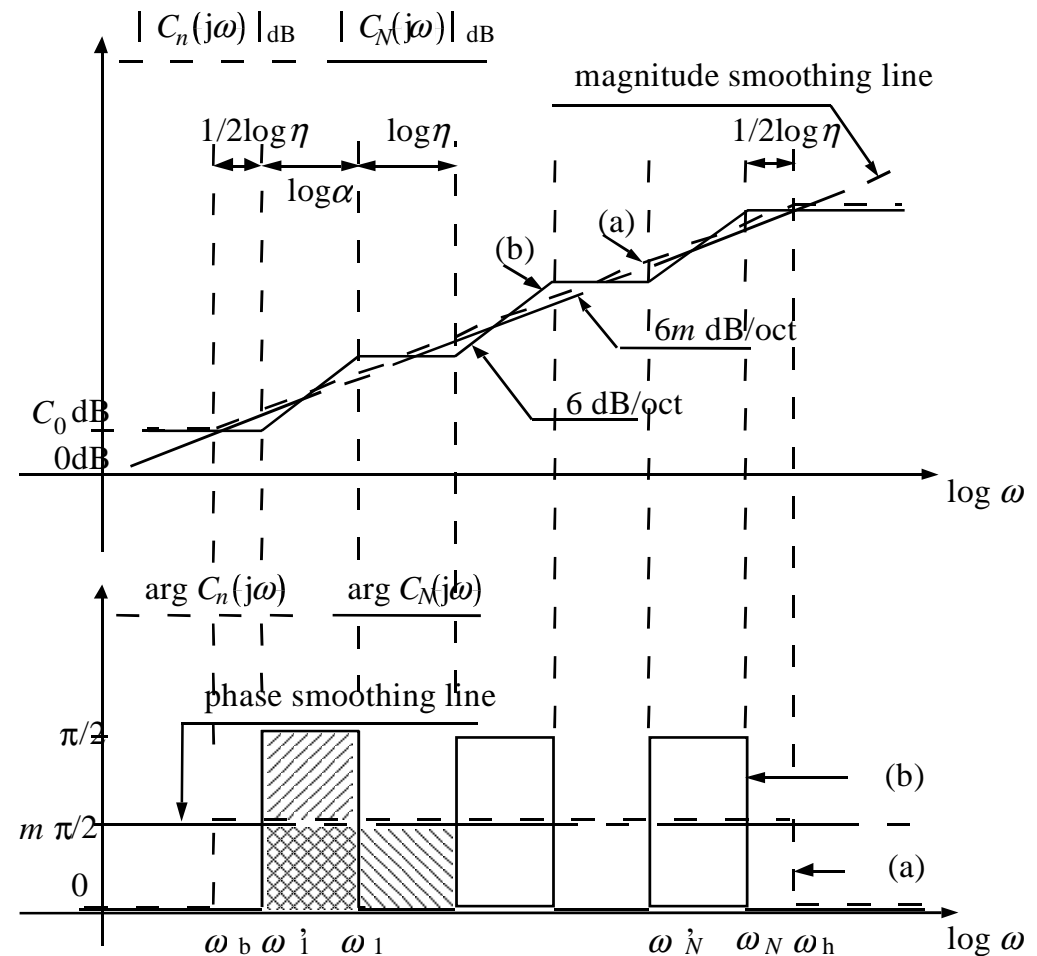
$$D_{entier} = \prod_{k=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega'_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}} \right)$$

$$n = \frac{\log \alpha}{\log \alpha \eta}$$

$$\alpha = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{n/N} \quad \& \quad \eta = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{(1-n)/N}$$

$$\frac{\omega_k}{\omega'_k} = \alpha$$

$$\frac{\omega'_{k+1}}{\omega_k} = \eta$$



# ✘ Méthodes basées sur l'approximation de $s^{-n}$ par un modèle entier

étape 1

$$s^{-n}$$



$$S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} \cong s^{-n}$$



étape 2

$$\frac{b_0 + b_1 s^1 + \dots s^{N_b}}{a_0 + a_1 s^1 + \dots s^{N_a}} \cong S_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n}$$



étape 3

$u(t)$

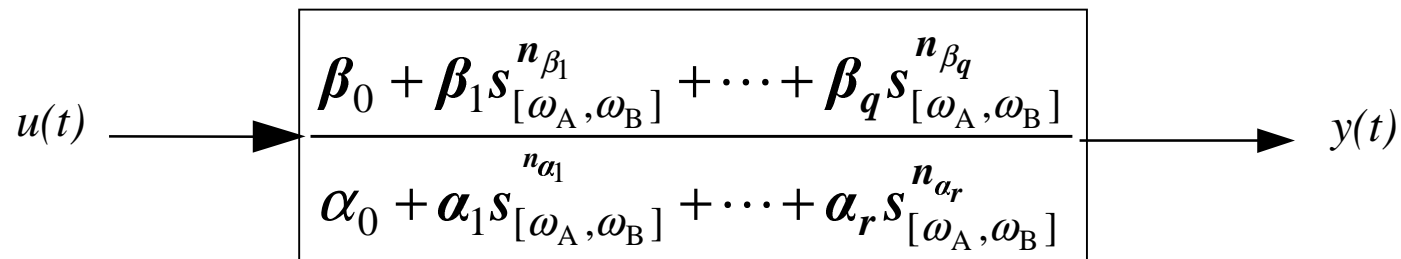
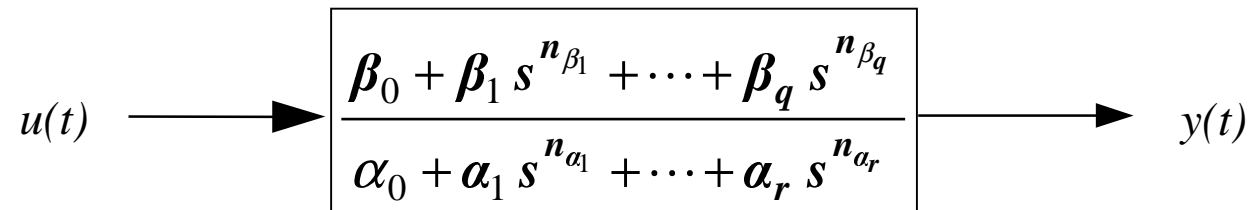
$$f\left(\frac{b_0 + b_1 s^1 + \dots s^{N_b}}{a_0 + a_1 s^1 + \dots s^{N_a}}\right) \cong \frac{\beta_1 s^{n_{\beta_1}} + \dots + \beta_q s^{n_{\beta_q}}}{\alpha_1 s^{n_{\alpha_1}} + \dots + \alpha_r s^{n_{\alpha_r}}} \rightarrow y(t)$$

modèle  
non  
entier

modèle  
entier

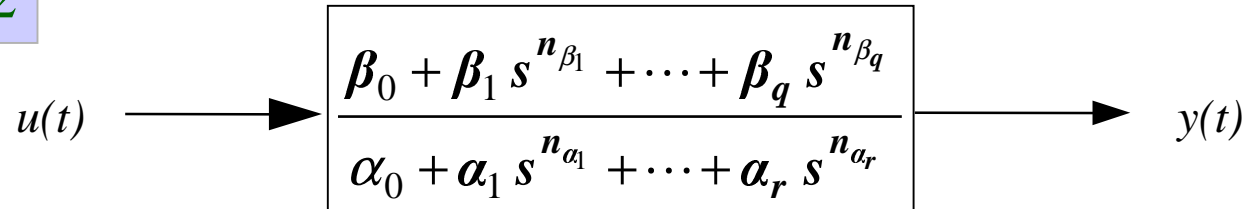
## × Etape 3 : simulation du modèle global

### Méthode 1



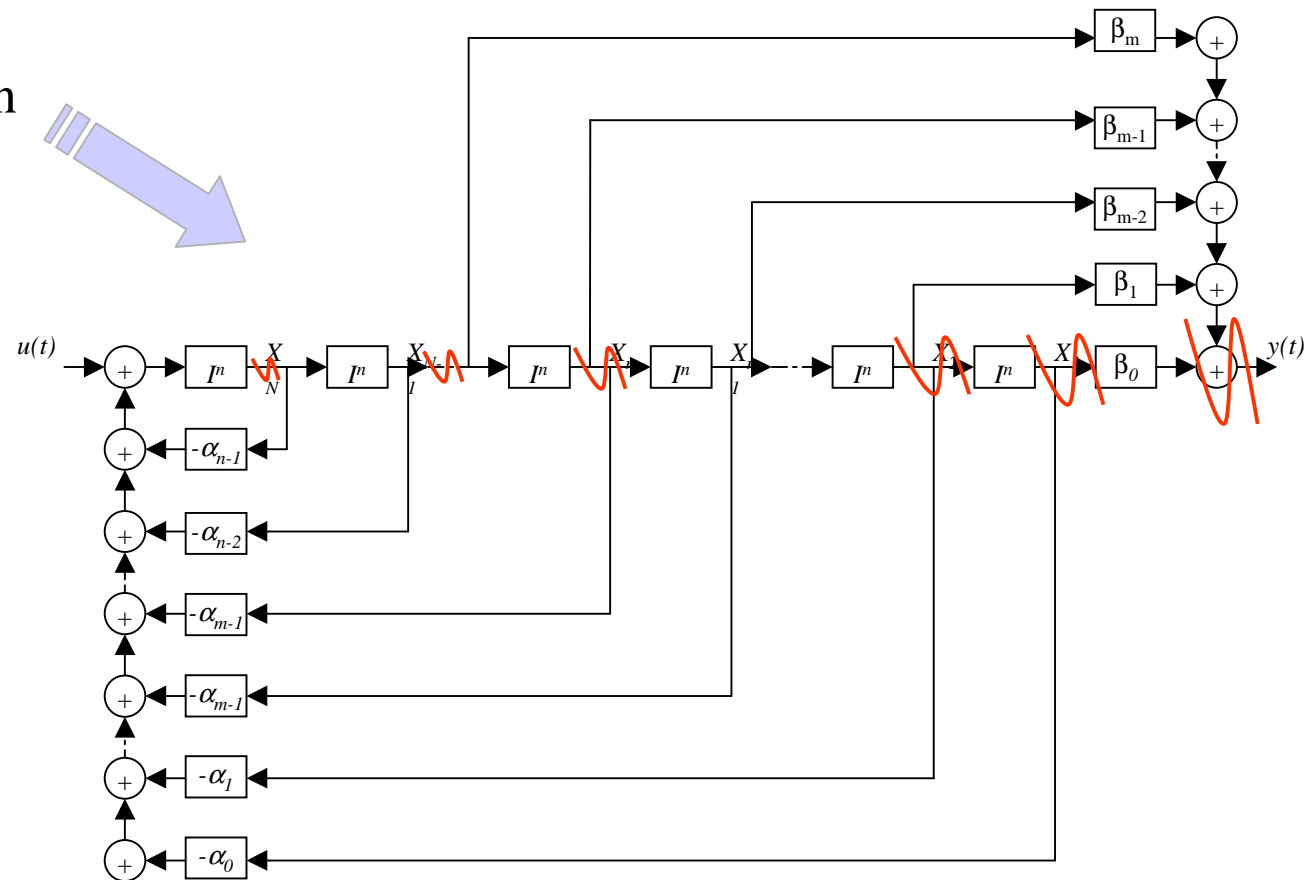
# × Etape 3 : simulation du modèle global

## Méthode 2



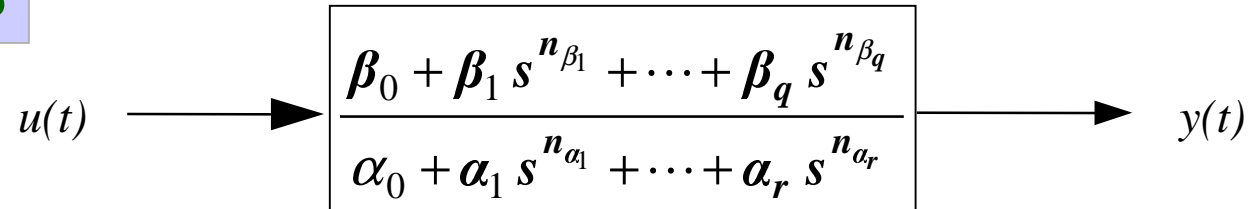
forme compagne  
de la représentation  
d'état

$$\mathbf{I}^n = s^{-n}_{[\omega_A, \omega_B]}$$



# × Etape 3 : simulation du modèle global

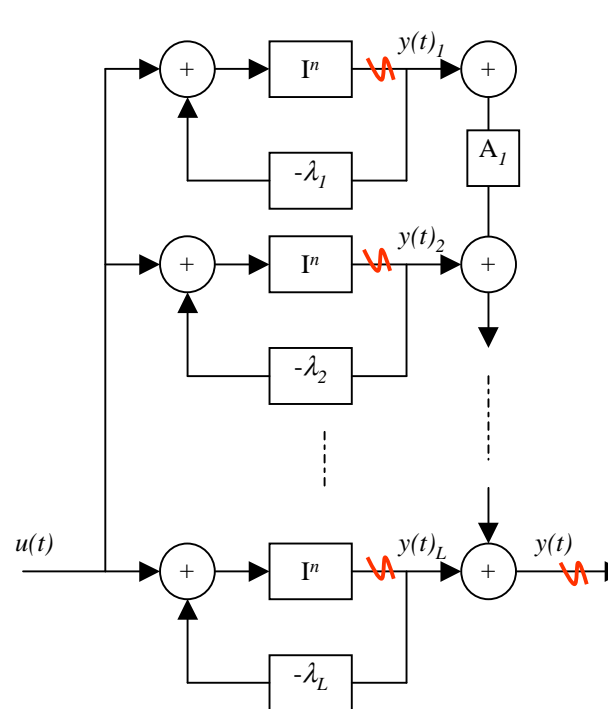
## Méthode 3



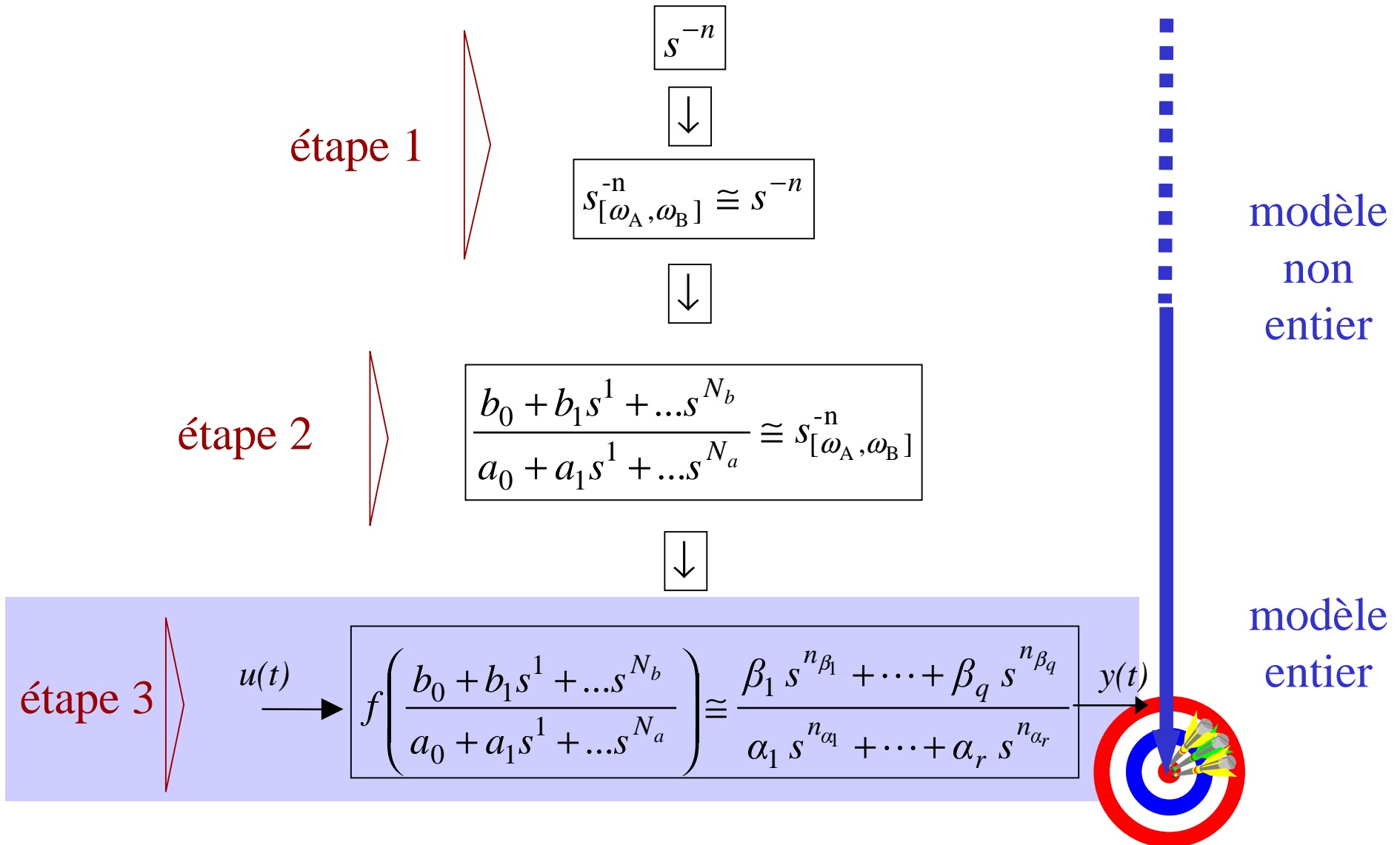
forme diagonale de la représentation d'état

$$\sum_{l=1}^L \frac{A_l}{s^n - \lambda_l}$$

$$I^n = s^{-n}_{[\omega_A, \omega_B]}$$



# × Méthodes basées sur l'approximation de $s^{-n}$ par un modèle entier



# Conclusions et perspectives

Deux améliorations sont proposés pour la simulation de systèmes non entier

## ① Nouvelles expressions pour le borné en fréquences

$$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} \cong \frac{\omega_A^{1-n}}{s} \left( \frac{(1-n)s^2 + \omega_B s + n\omega_A \omega_B}{\omega_A \omega_B + s\omega_B} \right)^{n-1} \quad s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-n} = \frac{\omega_B (\omega_A + s)}{(\omega_A)^n (ns^2 + \omega_B s + (1-n)\omega_A \omega_B)} \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_B}}{1 + \frac{s}{\omega_A}} \right)^n$$

## ② Forme modale pour la simulation du système final

