

APPROXIMATION OPTIMALE D'UN TRANSFERT NON ENTIER PAR UN RESEAU DE CELLULES

MICHEL GUGLIELMI

Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes UMR 6597
BP 92101 1, rue de la Noë, 44321 Nantes Cedex 03, France

Ecole Centrale de NANTES/ Université de NANTES/Ecole des Mines de NANTES

Michel.Guglielmi@ircsyn.ec-nantes.fr

Résumé— L'article proposé ici concerne l'approximation de fonctions de transfert en $1/f$ à l'aide d'une cascade finie de cellules élémentaires passives. Sans spécification particulière, le problème de l'optimisation d'un critère d'écart ne peut pas être bien défini. On utilise alors le résultat obtenu en ne considérant que la seule approximation du gain. A partir de la représentation asymptotique du gain du réseau, il a été montré précédemment que les paramètres des cellules obéissent à une loi de récursivité dont le paramètre est fonction de l'écart de gain. On conserve, ici, le principe de la récursivité des cellules et l'on recherche la valeur optimale du facteur de récursivité en minimisant un critère global qui prend en compte simultanément les erreurs de gain et de phase. La solution obtenue est du type min-max sur ce critère global d'écart entre les transmittances.

Mots clés—non entier, modélisation, approximation, cellules, récursivité, optimisation

I. INTRODUCTION

Il est généralement obligatoire d'élaborer des modèles aptes à représenter les processus étudiés. En ce sens, les modèles linéaires ARX, ARMAX à coefficients constants ont connu un grand succès du fait de leur capacité à caractériser une assez grande variété de comportements dynamiques. Leurs propriétés ont fait l'objet de nombreuses études et leur applications sont extrêmement variées. Pourtant ces modèles sont quelques fois inadaptés car ils ne rendent compte, par exemple, que de grandeurs à corrélation exponentiellement décroissante. Or, dans des domaines aussi variés que l'hydrologie [HUR 65], l'électronique [VAN 88], la musique [VOS 75] [VOS 78], le trafic routier [ROY 97], la mécanique des fluides [SCO 95] [ABR 97], les réseaux de télécommunication [WIL 95] [RIE 97], ... il existe de nombreuses situations qui engendrent des comportements n'obéissant pas à ces modèles aussi simples. Cette liste n'est pas exhaustive, et la littérature sur le sujet est très vaste.

Il existe, entre autres, une classe de signaux exhibant un comportement « longue mémoire » dont l'étude justifie de nouveaux modèles. La recherche de modèles dynamiques aptes à engendrer ces signaux a suivi plusieurs voies. Certains de ces modèles sont à dimension finie, d'autres à dimension infinie, à coefficients constants ou non. Parmi eux, on peut noter plus particulièrement celui issu de l'équation différentielle de Langevin [KOY 93], dans lequel la sortie à

mémoire longue est obtenu par sommation d'un nombre infini de grandeurs correspondantes à des sorties de systèmes linéaires du premier ordre dont les coefficients obéissent à une loi de récursivité. Dans [CAR] et [MAG 97] il s'agit de construire un modèle différentiel correspondant au modèle de Barnes et Allan défini, au départ, par sa forme intégrale. D'autres modèles [YAS 97] [GUG 01] utilisent un système linéaire non stationnaire (coefficients en puissance de t). Enfin, les modèles dynamiques d'état utilisant l'algèbre (Max,+) sont aptes à engendrer des signaux en $1/f$ [CHA 99]. Tous ces modèles ont en commun d'être le résultat d'agrégation de cellules élémentaires du 1^{er} ordre du type ARX (Barnes Allan, Langevin) ou ARMAX (Euler-Cauchy généralisée), les paramètres des cellules de base étant constants (Langevin) ou variables (Barnes Allan, Euler-Cauchy généralisée).

Pour [KES 82] et [OUS 93], la mise en cascade d'une infinité de cellules du premier ordre à coefficients constants produit une sortie ayant cette propriété de "non entier" au sens où la transmittance est en $1/f^{\gamma}$. Généralement, la bande de fréquences pour laquelle ce comportement est désiré est limitée. Même avec cette limitation, le nombre de cellules pour obtenir ce comportement parfait est infini. En pratique, la réduction à un nombre fini de cellules ne conduit donc plus qu'à un comportement approximativement en $1/f$. Si ce procédé de synthèse est simple et utilisé dans certains contextes, il présente plusieurs inconvénients dont le principal réside dans l'absence de contrôle de la précision obtenue sur les caractéristiques spectrales (par rapport à la valeur théorique). En effet, la précision du comportement spectral de la transmittance qu'implique, en pratique, le nombre forcément fini de cellules ne peut être pré-déterminée.

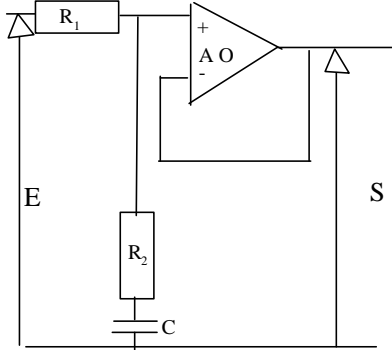
On est donc amené à poser le problème de la recherche du réseau qui garantit une précision donnée, ceci sur une bande de pulsation fixée par l'utilisateur. Même avec un réseau fini de structure fixée, la détermination des paramètres (nombre de cellules et pulsations caractéristiques de chaque cellule) qui minimise "l'écart" de gain conduit à un problème d'optimisation dont la solution est quasi impossible à obtenir. La démarche pragmatique retenue a consisté à ne considérer, initialement, que l'écart de gain, celui du réseau étant assimilé à son gain asymptotique : ce qui conduit à une solution géométrique directe simple. On montre que les cellules se déduisent alors récursivement les unes des autres.

Il en est déduit alors la précision "optimale" de gain obtenue pour un nombre donné de cellules [GUG 01] L'approximation sur la phase, non contrôlée, est alors la simple conséquence du résultat précédent. Elle peut être non satisfaisante. La contribution dans cet article concerne la prise en compte de l'approximation conjointe gain et phase. Pour cela, il est considéré un réseau récursif de cellules de paramètre de récursivité ρ . Une procédure de min-max peut être alors mise en œuvre. Sur la bande de pulsation considérée, un critère pondérant l'écart de gain et de phase est défini. Le paramètre optimal est celui qui minimise, sur l'intervalle de pulsation, le maximum du critère.

L'article est décomposé comme suit : après avoir posé le problème et défini le critère global à optimiser (section 2), il est rappelé la solution asymptotique qui prend uniquement en compte le gain du réseau. [GUG 01] (section 3). Il est montré que les cellules obéissent à un loi de récursivité dont le paramètre est fonction de la précision demandée sur le gain. Dans la section 4, en gardant cette structure récursive du réseau, le problème de l'optimisation globale, par rapport au facteur de récursivité, est résolu à partir des expressions analytiques des écarts de gain et de phase. Une solution par voie numérique est présentée. Des synthèses illustrent les différentes étapes.

II. POSITION DU PROBLEME

Considérons une cellule du premier ordre :



Sa relation entrée/sortie est :

$$S = \frac{1 + jR_2 C \omega}{1 + j(R_1 + R_2) C \omega} E$$

D'où la transmittance élémentaire $H_i(j\omega)$ de la forme :

$$H_i(j\omega) = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_{i2}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{i1}}} \quad (1)$$

Pour N cellules découplées mises en série, on a :

$$H_N(j\omega) = \prod_{i \in [1, N]} H_i(j\omega) \quad (2)$$

La fonction de transfert théorique, que l'on cherche à approcher, est :

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g},$$

on définit :

- L'écart de gain: $e_g = G_N(\omega) - g \log_{10} \omega$

où $G_N(\omega) = \log_{10}(|H_N(j\omega)|)$

- L'écart de phase: $e_{ph} = j_N(\omega) + \frac{p}{2} g$

Où $j_N(\omega)$ est la phase de $H_N(j\omega)$.

L'approximation est représentée par la fonction :

$$\boxed{J_N(\omega) = I |e_g(\omega)| + (1 - I) |e_{ph}(\omega)|} \quad (3)$$

$I \in [0, 1]$

Le problème revient donc, en pratique, à rechercher N (non fixé *a priori*) ainsi que l'ensemble couples $[\omega_{i1}, \omega_{i2}]$ tels que $\max_{\omega} J_N(\omega)$ sur l'intervalle $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ (choisi par l'utilisateur) soit minimum, ceci sous la contrainte structurelle (1).

Ainsi posé, ce problème requiert l'optimisation paramétrique par rapport à $2N+1$ variables indépendantes, nombre qui peut être très important.

III. APPROXIMATION DU GAIN

Pour certains problèmes (tel que la synthèse de signaux), la seule approximation du gain e_g (soit $I = 1$) peut être considérée. Malgré tout, la recherche de l'optimum n'est pas simplifiée pour autant. Compte-tenu des positions relatives du gain exact et asymptotique d'une cellule, on peut chercher à résoudre, alors, un problème plus simple qui garantit la précision "réelle".

Etant donné une précision ϵ donnée sur le gain, on cherche le réseau tel que :

$$|G_N(j\omega) - g \log_{10}(\omega)| < \epsilon \quad (4)$$

pour $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$

sous la contrainte structurelle (1).

Pour simplifier la recherche des paramètres du réseau, la réponse en gain de la transmittance $H_i(j\omega)$ est évaluée par son approximation asymptotique, ce qui conduit à :

$$\left| G_N^a(j\omega) - g \log_{10}(\omega) \right| < e \quad (5)$$

et pour $i \geq 2$

$$w_{i1} = 10^r w_{i-1,1} ,$$

Compte-tenu des positions relatives des gains exact et asymptotique de chaque cellule, il est clair que la solution de (5) vérifie (4).

ainsi que $w_{i2} = w_{i1} 10^{rg} \quad i \in [1, N]$

où :
$$r = 2e \frac{\sqrt{1 + g^2}}{(1 - g)g} \quad (5)$$

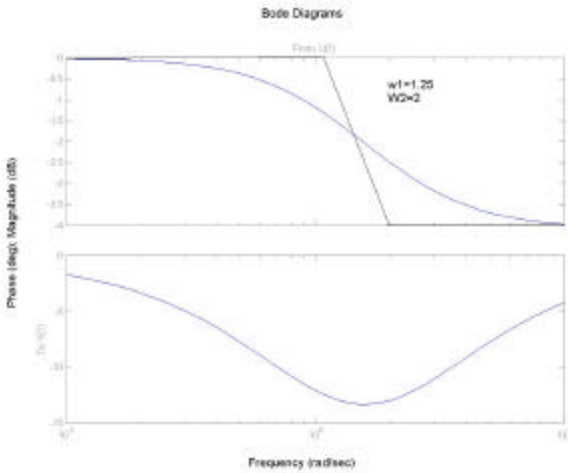


Figure 1 : Comparaison du lieu réel et asymptotique d'une cellule.

1. Résolution asymptotique :

La solution de (5) est obtenue par une simple résolution géométrique directe:

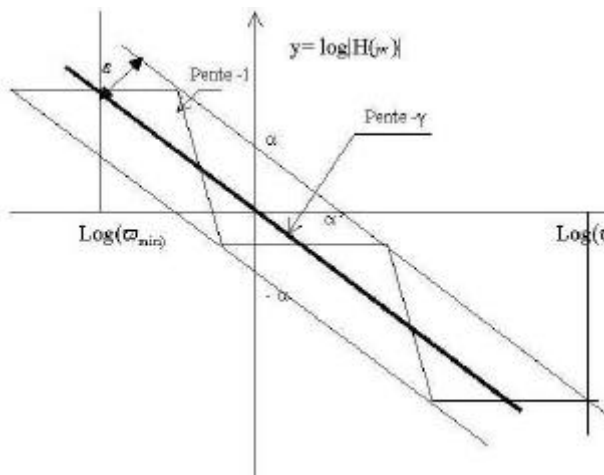


Figure 2 : Représentation géométrique

On obtient, par récurrence, les coordonnées des points d'intersection entre le lieu asymptotique (de pente -1) et les droites de pente $-g$ situées à une distance $\pm e$ de la droite de référence.

On obtient :

$$w_{11} = 10^{a'} w_{\min} = 10^e \sqrt{1 + \frac{1}{g^2}}$$

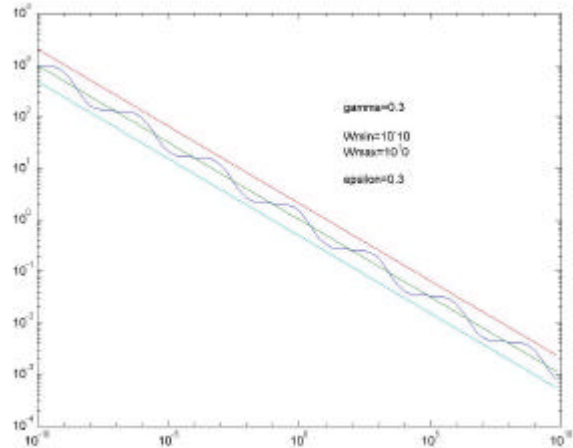


Figure 3 : Comparaison du comportement fréquentiel du réseau par rapport au comportement théorique

Exemple : Pour une valeur de $g = 0.3$, $e = 0.3$, sur une bande de pulsation de 10^{-10} à 10^{+10} , il faut 8 cellules.

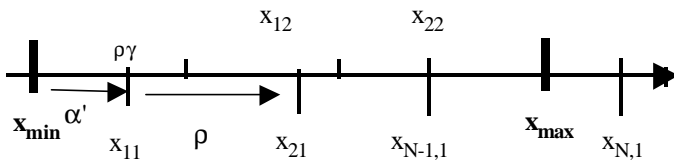
2. Propriétés :

Ces expressions mettent en évidence plusieurs points :

- Pour que la solution existe, il faut que $g < 1$
- Le nombre de cellules est proportionnel au nombre de décades fixé par l'utilisateur .
- Il dépend de la précision e demandée. Pour γ et ϵ fixés, le nombre de cellules ne dépend que de l'intervalle de pulsation.
- La répartition est linéaire dans le plan log-log. La distribution des cellules est donc récursive, le facteur de récursivité dépend d' ϵ . Le rapport des pulsations de coupure haute et basse est constant et égal pour toutes les cellules.

3. Nombre de cellules :

Le nombre N de cellules est obtenu lorsque la bande de pulsation $\{w_{\min}, w_{\max}\}$ est entièrement recouverte. Sur un axe logarithmique :



On doit avoir : $N\rho + \alpha' = x_{\max} - x_{\min}$

Qui donne :

$$N = E \left\{ \frac{1}{e} \frac{g^1 - g}{2\sqrt{1 + g^2}} (\log_{10}(w_{\max}) - \log_{10}(w_{\min})) - \frac{1 - g}{2} \right\} + 1$$

4. Nombre de cellules en fonction de γ :

Pour une précision e donnée, le nombre de cellules nécessaire N varie fortement en fonction de g (cf : figure 4 par exemple)

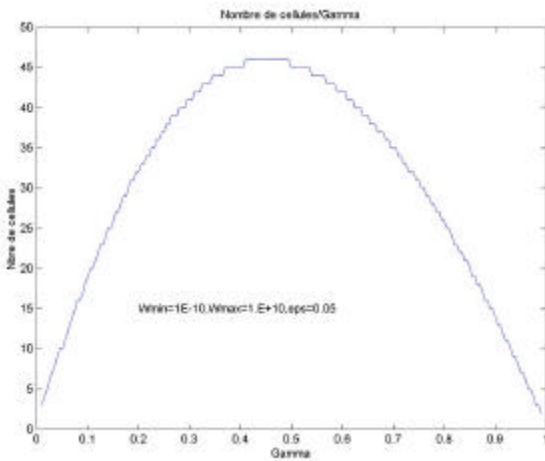


Figure 4 : Evolution du nombre de cellules N en fonction de g . ($e = 0.05$)

On peut rechercher la valeur de g qui nécessite le maximum de cellules. Le pas d'incréméntation des cellules est :

$$10^r = 10 \frac{2e \sqrt{1 + g^2}}{g(1 - g)}$$

Le nombre maximal de cellules est donc obtenu pour g^* qui minimise la fonction :

$$f(g) = \frac{\sqrt{1 + g^2}}{g(1 - g)}$$

Soit g^* est solution de :

$$g^3 + 2g - 1 = 0 \quad g^* \in [0.453, 0.454]$$

4. Evolution de N en fonction de ε :

Le nombre N est fonction " hyperbolique " de la précision e . Quand on fixe e a priori, cette méthode

permet de calculer le nombre de cellules qui garantit cette précision.

Cependant, en conservant ce nombre N , la précision est généralement meilleure. En terme d'utilisation pratique dans le domaine de l'utilisateur peut préférer choisir le nombre de cellules N pour la meilleure précision possible. On ne pose le problème en termes suivants :

Pour un nombre N de cellules fixé, la précision maximale e^* (asymptotique) obtenue est donnée par :

$$e^* = \frac{2\sqrt{1 + g^2}}{g(1 - g)(\log_{10} w_{\max} - \log_{10} w_{\min})} \left[N + \frac{1 - g}{2} \right]$$

Exemple: $g = 0.3$:

$$w_{\min} = 10^{-10}, \quad w_{\max} = 10^{10}, \quad N = 3$$

$$e^* = 0.60043$$

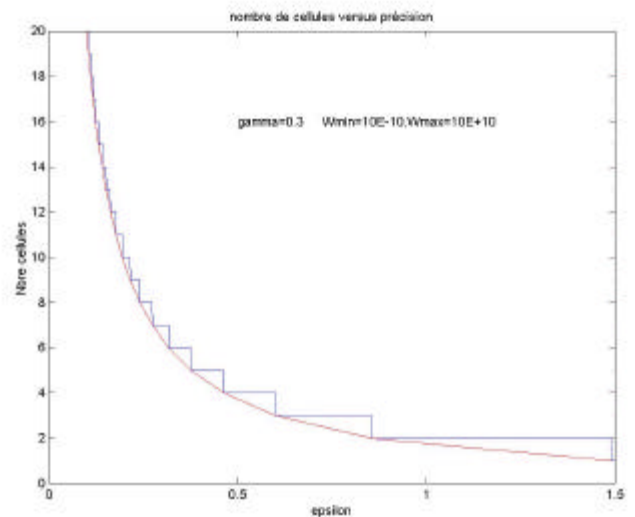


Figure 5 : Evolution de la précision maximale en fonction du nombre de cellules.

IV. OPTIMISATION GLOBALE

1. Précision réelle :

La réponse fréquentielle exacte du réseau est :

$$H_{db}(w) = 0.5 \sum_{i=1}^{i=N} \left\{ \log \left(1 + \frac{w^2}{2r(g + i - 1) + 2e^* \sqrt{1 + \frac{1}{g^2}} w_{\min}^2} \right) - \dots \right. \\ \left. \dots + \log \left(1 + \frac{w^2}{2r(i - 1) + 2e^* \sqrt{1 + \frac{1}{g^2}} w_{\min}^2} \right) \right\}$$

$$\Phi_r(\mathbf{w}) = \sum_1^N \text{Arctg} \left(\frac{\mathbf{w}}{10^{\mathbf{r}(g+i-1)+2e} * \sqrt{1 + \frac{1}{g^2}} \mathbf{w}_{\min}} \right) - \dots - \sum_1^N \text{Arctg} \left(\frac{\mathbf{w}}{10^{\mathbf{r}(i-1)+2e} * \sqrt{1 + \frac{1}{g^2}} \mathbf{w}_{\min}} \right)$$

L'erreur sur la phase est évidemment non optimisée. Une petite variation de précision ϵ permet d'obtenir une meilleure approximation de la phase.

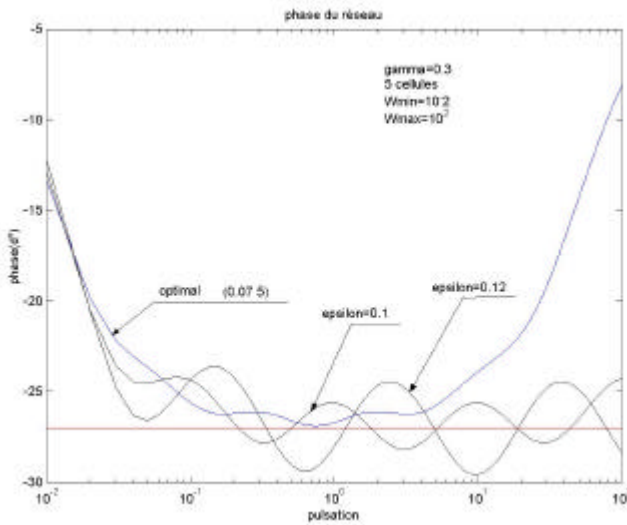


Figure 6 : Evolution de l'erreur de phase en fonction de la précision ϵ sur le gain.

2. Optimisation :

La formule (5) relie la précision de l'approximation en gain ϵ au facteur de récursivité ρ des cellules. On peut donc considérer un réseau récursif caractérisé à l'aide des deux seules grandeurs : N nombre de cellules et ρ facteur de récursivité.

Compte-tenu de tout ce qui précède, la recherche d'un réseau "optimal" de N cellules revient à chercher le paramètre ρ^* tel que :

$$\mathbf{r}^* = \arg \left(\min_{\mathbf{r}} \max_{\mathbf{w} \in [W_{\min}, W_{\max}]} \{J_N(\mathbf{w})\} \right)$$

avec

$$J_N(\mathbf{w}) = \mathbf{I} |e_g(\mathbf{w})| + (1 - \mathbf{I}) |e_{ph}(\mathbf{w})|$$

$$\mathbf{I} \in [0,1]$$

$$e_g(\mathbf{w}) = H_{db}(\mathbf{w}) - g \log_{10}(\mathbf{w})$$

$$e_{ph}(\mathbf{w}) = \Phi_r(\mathbf{w}) + \frac{\rho}{2} \mathbf{w}$$

avec $H_{db}(\mathbf{w})$ et $\Phi_r(\mathbf{w})$

données par les formules précédentes.

Toutes les expressions sont analytiques . La recherche de la solution optimale peut donc être faite via des techniques de programmation non linéaire classiques. Mais ces techniques sont généralement sensibles à la présence d'extremas locaux. Or, par construction même, la fonction $J_N(\mathbf{w})$ admet, ici, de nombreux minimas/maximas locaux par rapport à ω , comme le montre l'exemple suivant :

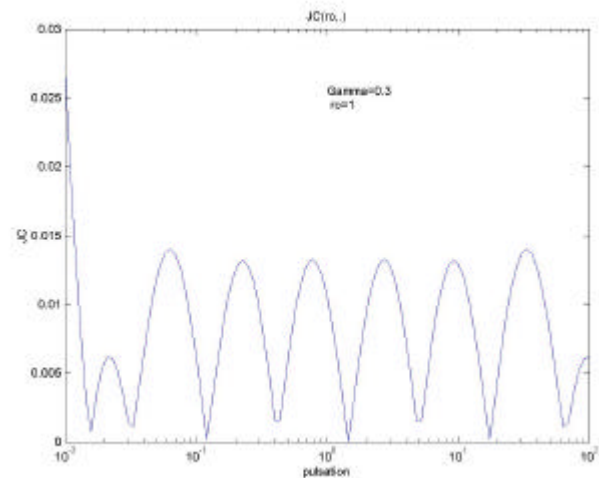


Figure 7 : Evolution du critère JC en fonction de la pulsation pour un facteur de récursivité ρ fixé ($\lambda=1$)

Dans une première approche, nous avons donc choisi de tabuler le critère JC sur une grille $\mathbf{w} \in [W_{\min}, W_{\max}]$, $\mathbf{r} \in [r_{\min}, r_{\max}]$:

$$\mathbf{w}_i = W_{\min} + (i - 1)\Delta_w$$

$$\mathbf{r}_j = r_{\min} + j\Delta_r$$

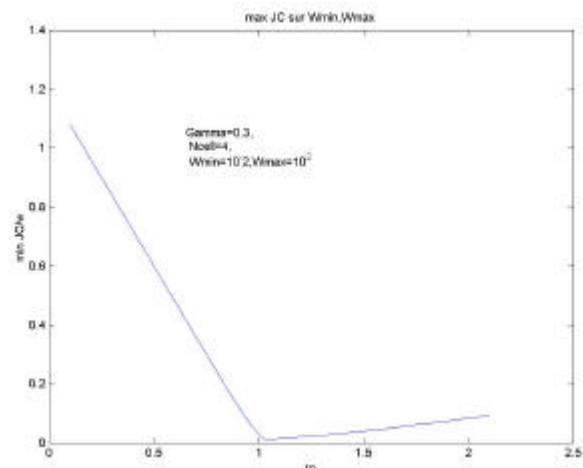


Figure 8 : Evolution du critère max JC en fonction de ρ ($\lambda=1$)

Lorsque le paramètre de pondération λ varie, la solution optimale ne change que faiblement comme l'illustre l'exemple suivant :

| λ | $\rho_{\min\max}$ | $ e_g _{\min\max}$ | $ e_{ph} _{\min\max}(\text{rd})$ |
|-----------|-------------------|--------------------|----------------------------------|
| 0. | 2.855 | 0.169 | 0.399 |
| 0.5 | 2.804 | 0.167 | 0.4 |
| 0.8 | 2.82 | 0.1654 | 0.4225 |
| 1. | 2.75 | 0.1618 | 0.443 |

Tableau 1 : Evolution de l'optimum en fonction

$$\gamma=0.3, W_{\min}=10^{-10}, W_{\max}=10^{10}, N=7$$

Commentaires :

- A titre de comparaison, la recherche basée sur uniquement l'approximation du gain à partir du lieu asymptotique du réseau de cellules donne : $\rho=2.395$, $|e_g|_{\max}=0.25$, $|e_{ph}|_{\max}=0.45$.
- L'erreur de phase se trouve essentiellement à la pulsation minimale ω_{\min} très peu sensible au facteur de récursivité.
- Les fonctions sont toutes analytiques. La mise en œuvre d'un algorithme d'optimisation du type programmation non linéaire classique est possible en prenant comme point de départ celui obtenu avec la seule approximation du gain avec lieu asymptotique. Ce point, relativement proche de la solution optimale devrait éviter les convergences sur un minima relatif. L'utilisation d'algorithme génétique est envisagée.

V. CONCLUSION

Le travail présenté porte sur une technique d'approximation d'une fonction de transfert du type 1/f par une transmittance rationnelle composée d'un réseau de N cellules de structure identique. Ce qui conduit à une paramétrisation du réseau par un seul paramètre : son facteur de récursivité. Cette simplicité dans la caractérisation permet d'obtenir un réseau optimal par une simple procédure d'optimisation. La difficulté de la recherche de l'optimum, lié à la multitude d'extremas locaux, est résolue grâce à une bonne initialisation obtenue par la solution du problème d'approximation gain simplifié par la représentation asymptotique du gain de la transmittance rationnelle.

La recherche de l'optimum ne prend pas en compte le fait que le critère est analytique. L'utilisation d'autres techniques d'optimisation (programmation non linéaire, algorithme génétique) est envisagée.

Ces résultats sont en cours d'application dans deux domaines. Le premier concerne la synthèse temporelle de signaux dont la densité spectrale $Q(f)$ est en $1/f^\beta$. Le second concerne l'identification des systèmes décrits par des transferts non entiers pour lesquels la qualité de l'estimation des paramètres est liée au degré d'approximation des puissances non entières du transfert.

V. REMERCIEMENTS

Ce travail est soutenu par le Ministère de la Recherche.

VI. REFERENCES

- [HUR 65] HURST H.E., BLACK R.P., SINAICA Y.M., « Long term storage in reservoirs. An experimental study », *Constable*, London, 1965.
- [VAN 88] VAN DER ZIEL, « Unified presentation of 1/f noise in electronic devices : fundamental 1/f noise sources », *Proceedings of IEEE*, Vol 76, n°3, 1988, pp 233-258.
- [VOS 75] VOSS R.F., CLARKE J., « 1/f noise in speech and music », *Nature*, Vol 258, 1975, pp 317-318.
- [VOS 78] VOSS R.F., CLARKE J., « 1/f noise in music : Music from 1/f noise », *Journal Acous. Soc. Am.*, Vol 63, 1978, pp 258-263.
- [ROY 97] ROYET I., Estimation du paramètre fractal des signaux de densité de circulation relevés sur le périphérique parisien, Diplôme d'Etudes Approfondies de l'Ecole Centrale de Nantes, 1997.
- [SCO 95] SCOTTI A., MENEVEAU S.G., « Fractal dimension of velocity signals in high-Reynolds-numbers hydrodynamic turbulence », *Physical Review E*, Vol 51, n°6, 1995, pp 5594-5608.
- [ABR 97] ABRYP P., Transformée en ondelettes. Analyses multirésolution et signaux de pression en turbulence, Editions Hermès, Paris.
- [WIL 95] WILINGER W., TAQUU M.S., LELAND W.E., WILSON V., « Self-similarity in high-speed packed traffic : analysis and modelling of Ethernet traffic measurements », *Statistical Science*, Vol 10, 1995, pp 676-85.
- [RIE 97] RIEDI R.H., LEVY-VEHEL J., Multifractal Properties of {TCP} Traffic : a numerical study, rapport interne INRIA, n° 3129, 1997.
- [KOY 93] KOYAMA J., HARA H., « Fractional Brownian Motions Described by Scaled Langevin Equation », *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol 3, n°4, 1993, pp 467-480.
- [CAR] CARMONA P., COUTIN L., MONTSENY G., « A diffusive markovian representation of fractional brownian motion with Hurst parameter less than 1/2 noise », à paraître.
- [YAS 97] YAZICI B., KASHYAP R.L., « A class of second-order stationary self-similar processes for 1/f phenomena », *IEEE Transactions on signal Processing*, Vol 45, n° 2, 1997, pp 396-410.
- [GUG 01] GUGLIELMI M., NORET E., « Une classe de systèmes auto-similaires et à mémoire longue », *TSI*, Volume 20, n°9/2001, pp 1153-1172
- [GUG 01] GUGLIELMI M. « Synthèse de signaux en 1/f avec contrôle de la précision spectrale », *18ème GRETSI*, Vol 1, 2001, pp 17-21.
- [MAG 97] MAGRE O., GUGLIELMI M., « Modelling and Analysis of fractional Brownian motions », *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol 8, n°3, 1993, pp 377-388.
- [CHA 99] CHAPEAU-BLONDEAU F., GAZENGEL E., « Dynamique (max,+) pour la génération en ligne de bruit en 1/f. », *17ème GRETSI*, Vol 1, 1999, pp 7-11.
- [KES 82] KESHNER M.S., « 1/f noise », *Proceedings of IEEE*, Vol 70, n°3, 1982, pp 212-218.
- [OUS 93] OUSTALOUP A., *La dérivation non entière*, Editions Hermès, 1995.