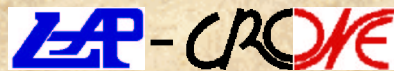


## A. Oustaloup

Equipe CRONE - LAP - Université Bordeaux I  
351, Cours de la Libération  
33400 Talence - France  
oustaloup@lap.u-bordeaux.fr - Tel : 33 5 56 84 24 12



**Automatique - Robotique  
Systèmes d'Ordre Non Entier**

*Un point sur les ondulations de gain et de phase dans la synthèse de la dérivation non entière par une distribution récursive de zéros et de pôles*

# Synthèse de l'opérateur de dérivation non entière

Transmittance de synthèse :

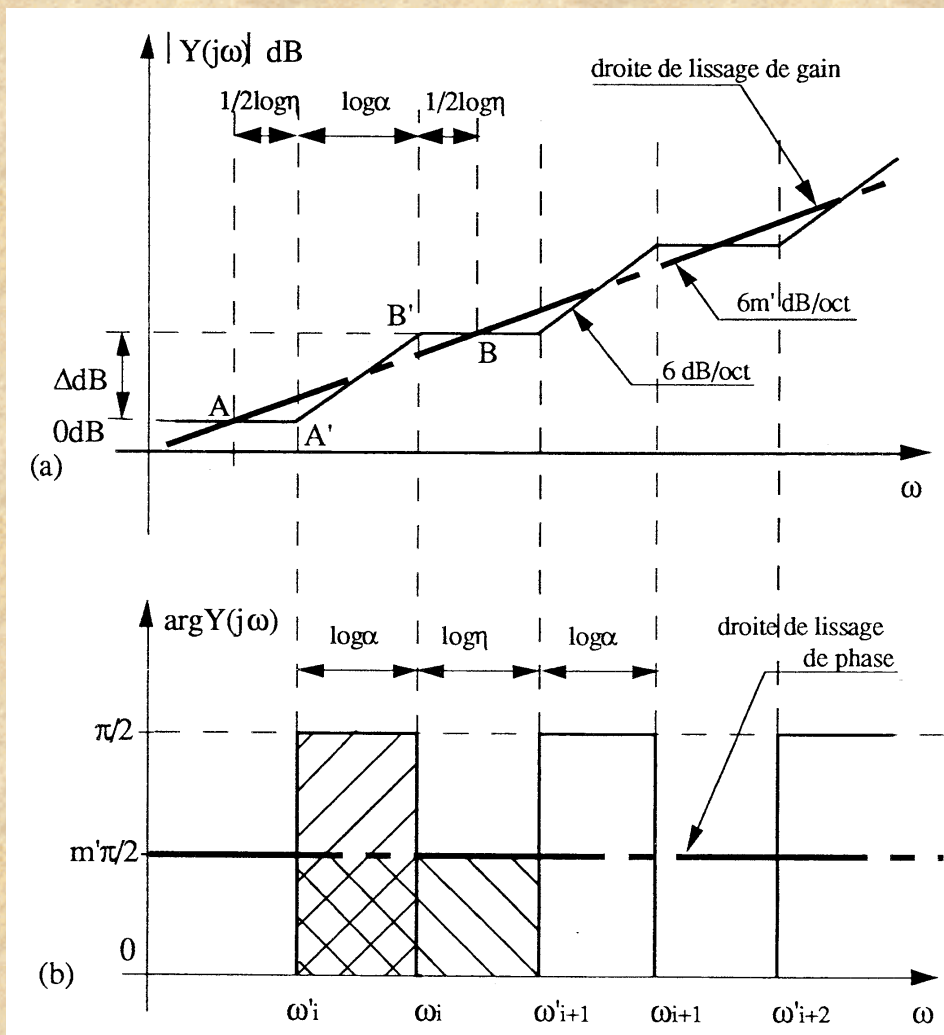
$$\left(\frac{p}{\omega_o}\right)^{m'} \approx C_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + \frac{p}{\omega_i}}{1 + \frac{p}{\omega_i}}$$

$$\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \frac{\omega'_{i+1}}{\omega'_i} = \alpha\eta$$

$$\frac{\omega_i}{\omega'_i} = \alpha$$

$$\frac{\omega'_{i+1}}{\omega_i} = \eta$$

$$m' = \frac{\log \alpha}{\log \alpha + \log \eta}$$

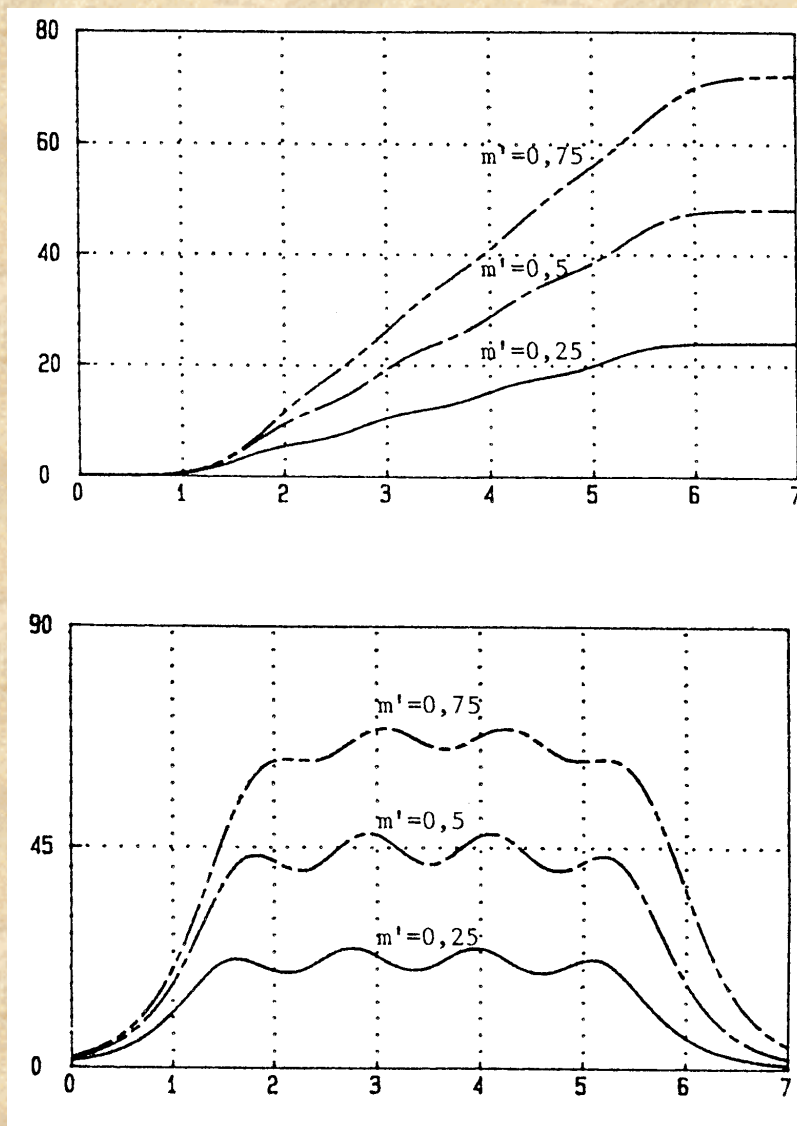


Diagrammes asymptotiques de la transmittance de synthèse

## Ondulations de gain et de phase

Nombre fini de zéros et de pôles dans la plage fréquentielle correspondant au comportement asymptotique d'ordre  $m'$  :

⇒ ondulations du gain et la phase autour des droites de lisage de gain et de phase.



$z_1 = 4 \text{ Hz}$   
 $z_2 = 64 \text{ Hz}$   
 $z_3 = 1024 \text{ Hz}$   
 $z_4 = 16384 \text{ Hz}$

$m' = 0,25$

$p_1 = 8 \text{ Hz}$   
 $p_2 = 128 \text{ Hz}$   
 $p_3 = 2048 \text{ Hz}$   
 $p_4 = 32768 \text{ Hz}$

$m' = 0,5$

$p_1 = 16 \text{ Hz}$   
 $p_2 = 256 \text{ Hz}$   
 $p_3 = 4096 \text{ Hz}$   
 $p_4 = 65536 \text{ Hz}$

$m' = 0,75$

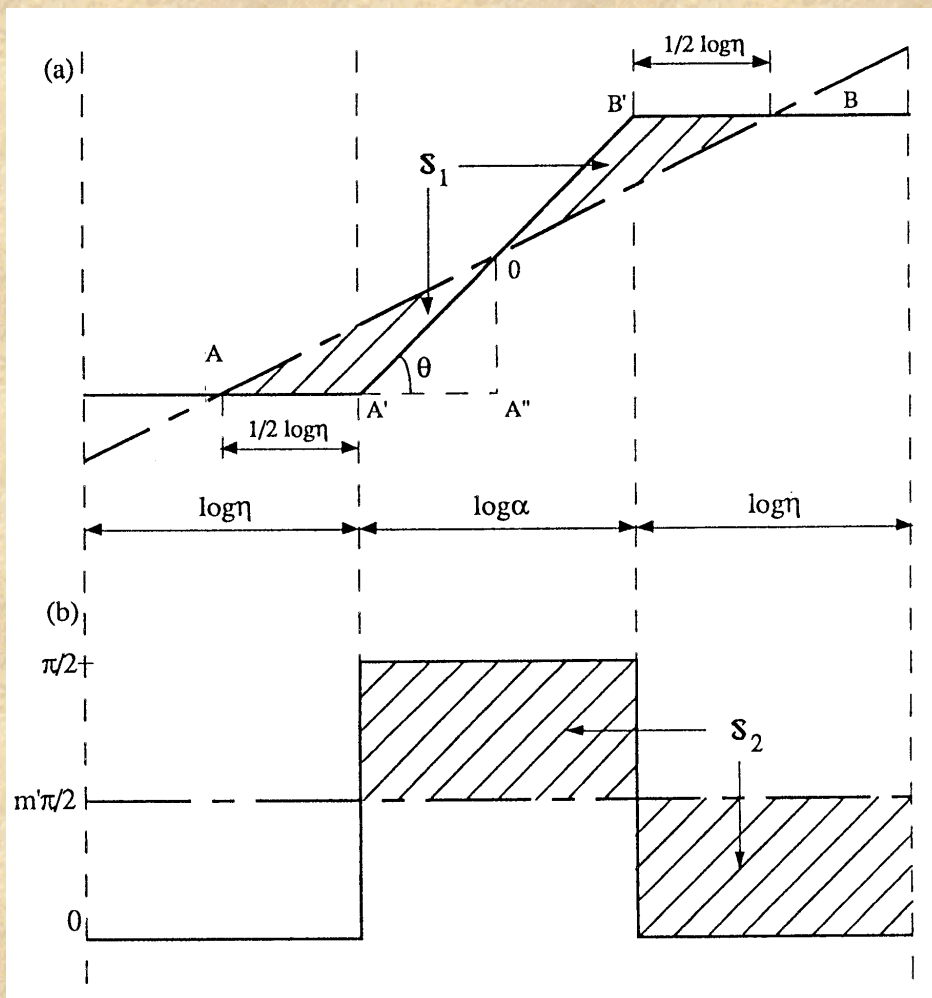
$p_1 = 32 \text{ Hz}$   
 $p_2 = 512 \text{ Hz}$   
 $p_3 = 8192 \text{ Hz}$   
 $p_4 = 131072 \text{ Hz}$

*Diagrammes de Bode pour un produit  $\alpha\eta$  donné et différentes valeurs de  $m'$*

## Objectifs

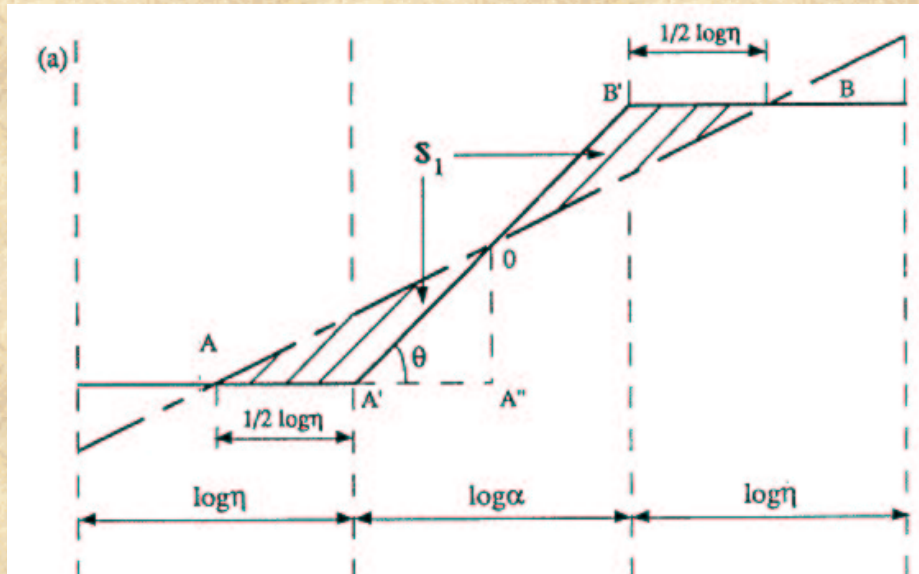
Mettre en évidence que les ondulations de gain et de phase passent par un maximum pour  $m'=0.5$  lorsque le produit  $\alpha\eta$  est maintenu constant.

**Idée** : admettre que l'amplitude des ondulations est d'autant plus grande que les surfaces entre les diagrammes asymptotiques de Bode et les droites de lissage sont importantes.



*Diagrammes de asymptotiques de Bode et droites de lissage*

## Caractérisation des ondulations de gain



L'observation de la figure permet d'écrire :

$$S_1 = (AA')(A'O)\sin\theta = (AA')\left(\frac{AA''}{\cos\theta}\right)\sin\theta$$

ou encore

$$S_1 = \frac{3}{2}(\log\eta)(\log\alpha)$$

sachant que

$$AA' = \frac{1}{2}\log\eta$$

$$A'A'' = \frac{1}{2}\log\alpha$$

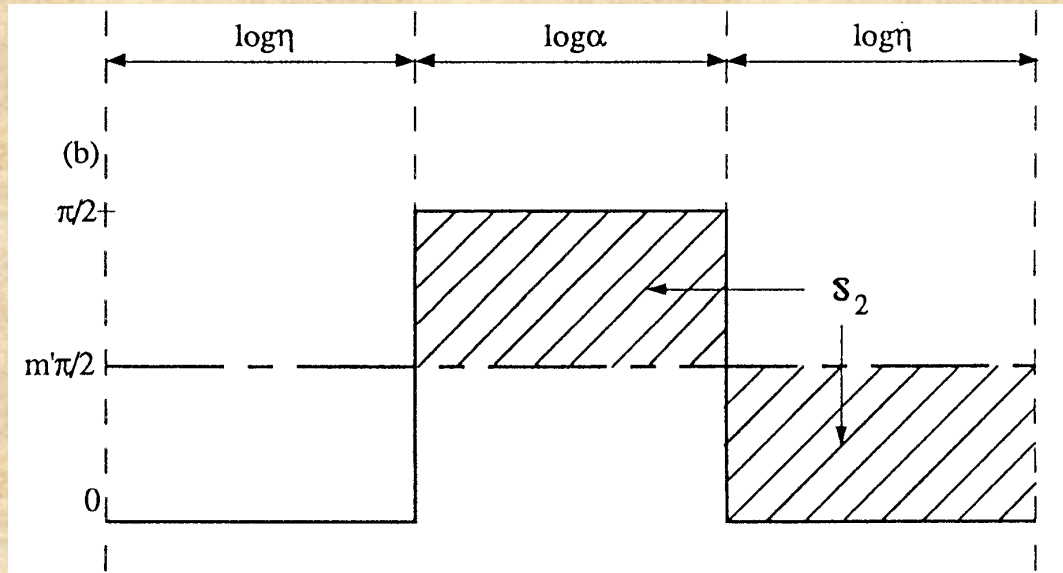
$$\text{tg}\theta = 6\text{dB/oct}$$

En posant  $\alpha\eta = C = \text{cte} \Rightarrow \log\eta = \log C - \log\alpha$

et étant donné que  $m' = \log\alpha / \log(\alpha\eta)$  on obtient alors

$$S_1 = \frac{3}{2}(\log C)^2(1-m')m' = S_1'(m')\frac{3}{2}(\log C)^2$$

## Caractérisation des ondulations de phase



L'observation de la figure permet d'écrire :

$$S_2 = \left( \frac{\pi}{2} - m' \frac{\pi}{2} \right) \log \alpha + m' \frac{\pi}{2} \log \eta$$

ou encore

$$S_2 = \frac{\pi}{2} [(1 - 2m') \log \alpha + m' \log C] = \frac{\pi}{2} \log C \left[ (1 - 2m') \frac{\log \alpha}{\log C} + m' \right]$$

sachant que  $\log \eta = \log C - \log \alpha$  avec  $\alpha \eta = C = cte$

Etant donné que  $m' = \log \alpha / \log(\alpha \eta) = \log \alpha / \log C$  on obtient alors

$$S_2 = \pi \log C (1 - m') m' = S_2'(m') \pi \log C$$

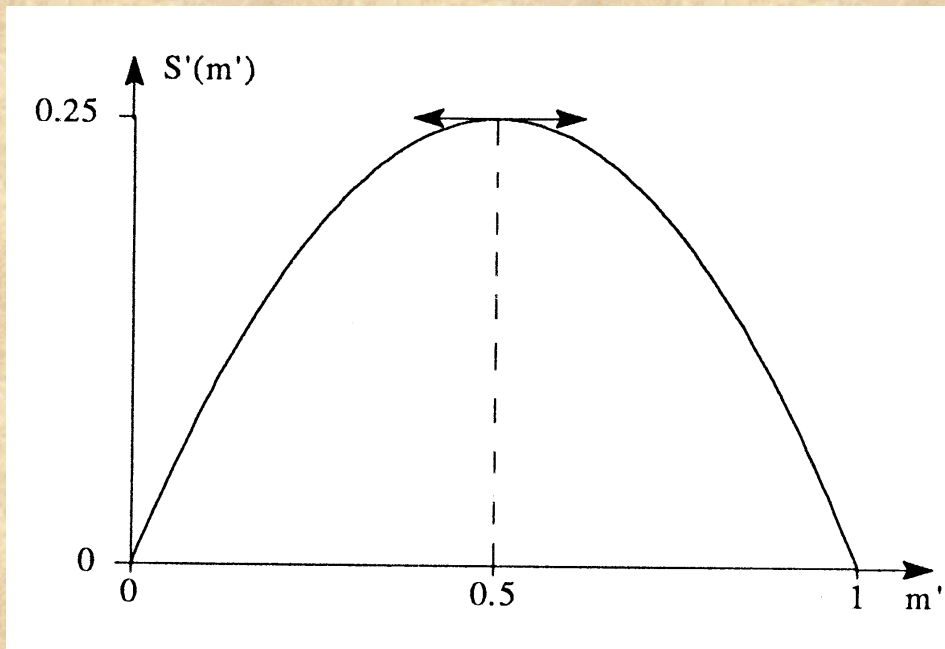
## Ondulations de gain et de phase

L'identité des relations  $S'_1(m')$  et  $S'_2(m')$  est liée à l'existence d'une surface réduite commune susceptible de caractériser à la fois les ondulations de gain et de phase :

$$S'(m') = S'_1(m') = S'_2(m') = (1 - m')m'$$

La surface s'annule pour  $m'=0$  et  $m'=1$

La surface passe par un maximum lorsque  $\frac{dS'(m')}{dm'} = 1 - 2m' = 0$   
c'est à dire pour  $m'=0,5$ .



*Surface réduite de caractérisation des ondulations de gain et de phase*