"CRONE Toolbox" : une boîte à outils Matlab pour les systèmes fractionnaires

P. Melchior, F. Dancla, P. Lanusse et O. Cois

Laboratoire d'Automatique et de Productique (LAP) - UMR CNRS
Equipe CRONE - Université Bordeaux 1 - ENSEIRB
351, cours de la Libération - F33405 TALENCE Cedex - France
Tél. (+33) (0)5 56 84 66 07- Fax (+33) (0)5 56 84 66 44
E-mail : melchior@lap.u-bordeaux.fr ; crone@lap.u-bordeaux.fr

Résumé : Ce papier présente une nouvelle boîte à outils Matlab pour les enseignants-chercheurs de l'EEA, *"CRONE Toolbox : Fractional Systems Toolbox"*, son originalité, ses objectifs et son contenu. La thématique générale d'un tel logiciel concerne la dérivation non entière (ou fractionnaire), son calcul, sa synthèse, ses applications en mathématiques et dans les sciences pour l'ingénieur, notamment en Automatique, en identification et en commande. L'objectif de ce travail s'inscrit dans le souci de diffuser et de valoriser au plan international, aussi bien en enseignement, en recherche que dans l'industrie, des concepts amonts élaborés dans le laboratoire.

Mots-clés - Automatique, Enseignement-Recherche, Logiciel de CAO, Boîte à outils Matlab, Outils informatiques pour l'EEA, Technologies émergentes, Dérivation fractionnaire, Systèmes fractionnaires, Identification par modèle non entier, Commande CRONE.

1. Introduction

La boîte à outils ***"CRONE Toolbox"*** a été développée depuis le début des années 90. Elle a fait l'objet de plusieurs publications, thèses et d'un enregistrement auprès de l'APP en 1993 et 1994 [1][7][13]. Actuellement, elle comporte trois modules qui concernent les thèmes d'application de la dérivation non entière : "Fractional Calculus", "System Identification by Fractional Model" et "CRONE CSD".

Le développement de cette boîte à outils s'inscrit dans la volonté de faciliter le transfert de ces concepts, d'une part vers l'enseignement en mettant à disposition des enseignants-chercheurs un outil logiciel pour leur formation et celle des étudiants de l'EEA à Bac + 4 ou 5, d'autre part vers l'industrie. La focalisation sur ces modules répond à une volonté de se limiter dans un premier temps au cas scalaire, afin d'assurer un apprentissage progressif et ainsi incitatif de l'utilisateur. L'existence de cette boîte à outils facilitera la mise en place d'enseignements intégrés ou de bureaux d'étude sous Matlab. Le choix de Matlab est motivé par les nombreux avantages de ce logiciel : algorithmes de calculs numériques sur des matrices complexes, langage de programmation de haut niveau, création aisée d'IHM (menus, champs de saisie, etc…) et la portabilité sur d'autres systèmes qui est aussi un avantage important pour faciliter la diffusion.

De plus, la plupart des laboratoires universitaires et des services R&D industriels utilisent ce logiciel. Il devient de fait un standard mondial des logiciels de calcul pluridisciplinaire et particulièrement dans le domaine de l'Automatique.

2. "Fractional Calculus"

Ce module regroupe l'ensemble des algorithmes qui permettent l'utilisation de la dérivation d'ordre non entier.

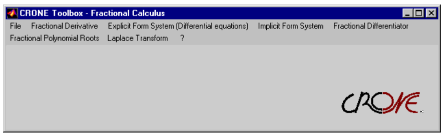

Figure 1 : Fenêtre principale.

2.1. Unité "Fractional Derivative"

Cette unité calcule la dérivée d'ordre réel ou complexe d'une fonction temporelle. La définition est donnée par Rieman-Liouville [3][9][14] à partir de la formule intégrale :

$$I^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}}\,d\tau, \text{ with } \begin{cases} t>0 \\ n\in\mathbb{C} \end{cases}. \quad (1)$$

En pratique, la définition de Grünwald [8][10] est utilisée pour calculer la dérivée d'ordre entier, réel ou complexe :

$$\underset{n\in\mathbb{C}}{D^n} f(t) = \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[(-1)^k\binom{n}{k}f(t-kh)\right]. \quad (2)$$

2.2. Unité "Explicit Form System (Differential Equations)"

Cette unité simule la réponse temporelle des systèmes linéaires monovariables ou multivariables à partir de leur équation différentielle ou de leur fonction de transfert. Les ordres de dérivation sont entiers, réels ou complexes. L'algorithme de calcul utilise la définition de Grünwald de la dérivée non entière.

Le système est décrit grâce à la commande "System definition". Les signaux d'entrée sont définis à partir d'une expression littérale ou d'un fichier de données ; une commande permet de reconditionner le signal. Les réponses temporelle et fréquentielle du système sont proposées.

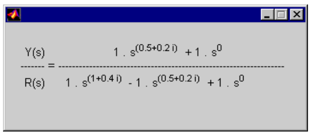

Figure 2 : Exemple de fonction de transfert.

2.3. Unité "Fractional Differentiator"

Cette unité permet de faire la synthèse d'un dérivateur non entier borné en fréquence, à partir du dérivateur non entier [10]. La transformée de Laplace de l'opérateur "dérivée non entière" est le dérivateur non entier (3), approximé par un dérivateur non entier borné en fréquence (4) :

$$D_{fractional}(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^n. \tag{3}$$

$$D_{fband}(s) = \left(\frac{1+\frac{s}{\omega_b}}{1+\frac{s}{\omega_h}}\right)^n. \tag{4}$$

La synthèse de ce dérivateur est fondée sur une distribution récursive de zéros et de pôles dont l'expression générale est :

$$D_{rational}(s) = \prod_k \left(\frac{1+\frac{s}{\omega_{hk}}}{1+\frac{s}{\omega_{bk}}}\right). \tag{5}$$

L'utilisateur peut modifier les valeurs des paramètres des différents dérivateurs, soit dans les champs de saisie correspondant, soit en déplaçant la position d'un zéros ou d'un pôle grâce à la souris. Dans les deux cas, les diagrammes de Bode et les valeurs des paramètres sont réactualisés après chaque modification.

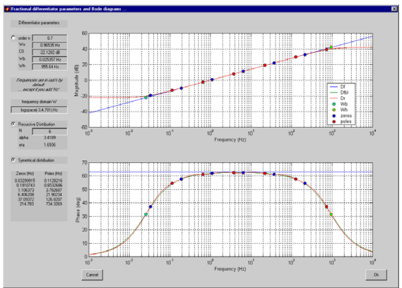

Figure 3 : IHM de synthèse d'un dérivateur non entier borné en fréquence.

3. "System Identification by Fractional Model"

Le domaine de l'identification par modèle non entier est un thème de recherche récent motivé par le recensement croissant de procédés naturels qui révèlent un caractère non entier [2][5]. Le module "System Identification by Fractional Model" résulte des travaux initiés par l'équipe CRONE depuis le début des années 90. Il est composé de deux modules : un premier module, présenté dans cet article, consacré à l'identification temporelle ; un second module, en cours de développement, consacré à l'identification fréquentielle.

3.1. Présentation des méthodes

Le module d'identification temporelle permet l'identification de systèmes réels par des modèles à dérivées non entières, appelés modèles non entiers, à partir de données temporelles recueillies lors d'une expérience.

La forme générale des modèles non entiers s'écrit :

$$\begin{aligned}\alpha_1 \mathrm{D}^{n_{\alpha_1}} y(t) + \cdots + \alpha_I \mathrm{D}^{n_{\alpha_I}} y(t) = \\ \beta_1 \mathrm{D}^{n_{\beta_1}} u(t) + \cdots + \beta_J \mathrm{D}^{n_{\beta_J}} u(t) + e(t)\end{aligned} \tag{6}$$

où *e(t)* désigne l'erreur d'équation.

Deux méthodes d'estimation sont proposées. La première est basée sur la discrétisation de l'équation (6) ([2][5]) à l'aide de l'approximation de Grünwald d'une dérivée non entière ([10]), soit :

$$\underset{n\in\mathbb{C}}{D^n} f(t) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh) \right], \tag{7}$$

h étant la période d'échantillonnage.

L'estimation paramétrique est ensuite obtenue en 3 étapes:

- la première étape consiste à linéariser le modèle discret par un changement de variables portant sur les paramètres à estimer ;
- la deuxième étape est consacrée à l'estimation des nouveaux paramètres par la méthode classique des moindres carrés linéaires ;
- la troisième étape est dédiée au calcul des paramètres du modèle continu par inversion du changement de variables.

La seconde méthode d'estimation est fondée sur la généralisation au non entier des méthodes classiques d'estimation de modèles continus à erreur d'équation [6]. La sortie du modèle est exprimée directement par une combinaison linéaire des dérivées non entières des entrées et sorties passées. Les paramètres du modèle sont ensuite estimés en utilisant une technique d'optimisation par moindres carrés linéaires.

Cette technique, très facilement programmable, conduit néanmoins à des résultats peu satisfaisants dans le cas où les données sont bruitées. Dans ce cas, le modèle non entier fait l'objet d'une intégration d'ordre n, n étant l'ordre du modèle non entier. Un changement de variable permet ensuite d'estimer les paramètres du modèle de la même manière que pour la méthode directe.

3.2. Interface Graphique

La fenêtre principale possède quatre 4 menus. Le menu "File" gère l'ensemble des variables, permet d'importer des données d'identification, sauver la session en cours. Le menu "Data" permet de reconditionner et d'afficher les données d'identification et de validation. Le menu "System Identification" propose le choix entre les différentes méthodes disponibles. Tous les résultats peuvent être affichés grâce au menu "Estimated-model views" : tracé des résidus, tracé des pôles, tracé des données de validation, etc …

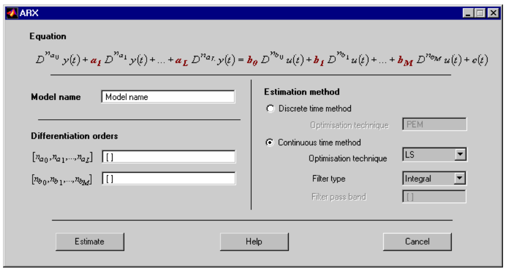

Figure 4 : Menu "System Identification".

3.3. Exemple

Cet exemple porte sur l'identification d'un système thermique réel [2][3]. Conformément à l'expression de la solution analytique, la température du système est décrite par un modèle à dérivées non entières. Un exemple d'estimation paramétrique conduit à l'équation :

$$\begin{aligned} &1.85e-2D^{1.5}y(t)-1.85e-1D^{1}y(t)+D^{0.5}y(t)= \\ &\quad -4.22e-3D^{0.5}u(t)+2.378e-2\,u(t)+e(t) \end{aligned} \quad . (8)$$

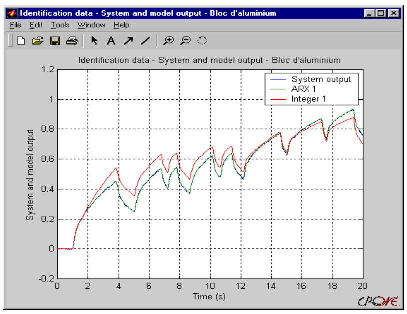

Figure 5 : Tracé de la sortie du système réel et du modèle estimé.

La figure 5 illustre les résultats d'estimation paramétrique de deux modèles différents : continu ARX entier et non entier.

4. "CRONE CSD"

Ce module permet de synthétiser méthodologiquement et simplement des lois de commande linéaires robustes. Il résulte des travaux théoriques et logiciels commencés depuis la fin des années 80 et relatifs aux commandes CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) scalaires de première, deuxième, et troisième générations.

Un des atouts de la commande Crone est sa prise en compte non pessimiste des incertitudes portant sur le procédé, qu'elles soient paramétriques ou non structurées.

Les spécifications peuvent être relatives à la rapidité, au degré de stabilité de la commande, à la précision en régime établi, ainsi qu'aux quatre fonctions de sensibilité classiques.

Suivant la nature du procédé, de ses incertitudes fréquentielles et des spécifications, il est alors possible de choisir la génération de commande CRONE à utiliser.

4.1. Commande Crone de 1ère génération

Les variations de la marge de phase de la commande consécutives aux variations paramétriques du procédé, résultent des variations de phase du procédé et du régulateur autour de la fréquence au gain unité en boucle ouverte, ω_u, elle-même susceptible de varier. La stratégie "robustifiante" de la commande CRONE de première génération consiste à réduire les variations de la marge de phase aux variations de phase du procédé en implantant un correcteur à phase constante autour de la fréquence ω_u. Ce correcteur est fondé sur une transmittance d'ordre non entier, et ensuite défini par une transmittance d'ordre entier résultant d'une distribution récursive de zéros et de pôles.

L'utilisation de la commande Crone de première génération pouvant générer des niveaux de commande trop importants, le choix de la commande Crone de deuxième génération est alors à favoriser.

4.2. Commande Crone de 2ème génération

Quand le procédé n'est soumis qu'à des variations de type gain autour ω_u, les variations de marge de phase dues à la non constance de sa phase sont maintenant compensées par la phase du régulateur. Ce régulateur à phase variable, permet de synthétiser un gabarit vertical (dans le plan de Black) auquel correspond une transmittance en boucle d'ordre non entier généralement complexifiée afin de tenir compte des spécifications de précision ou de sensibilité au bruit. Le correcteur est ensuite défini par le rapport entre la réponse fréquentielle en boucle ouverte et la réponse fréquentielle nominale du procédé. Une synthèse assistée et différents algorithmes d'identification fréquentielle sont proposés.

4.3. Commande Crone de 3ème génération

La commande Crone de troisième génération doit être utilisée quand la réponse fréquentielle du procédé possède des incertitudes de nature variée. Le gabarit vertical est alors remplacé par un gabarit généralisé (segment de droite dans le plan de Black, mais de direction quelconque), ou encore par un multi-gabarit (ensemble de gabarits généralisés) décrit par les transmittances d'intégrateurs d'ordre non entier complexe $n'=a+ib$. La transmittance en boucle ouverte incluant le multi-gabarit et permettant d'atteindre les performances généralement requises est alors de la forme :

$$\beta(s)=\prod_{k=-N^-}^{N^+}\left[\left(\frac{1+s/\omega_{k+1}}{1+s/\omega_k}\right)^{a_k}\mathcal{R}e_{/i}\left(\left(C_k\,\frac{1+\dfrac{s}{\omega_{k+1}}}{1+\dfrac{s}{\omega_k}}\right)^{ib_k}\right)^{-\mathrm{sign}(b_k)}\right].\quad(9)$$

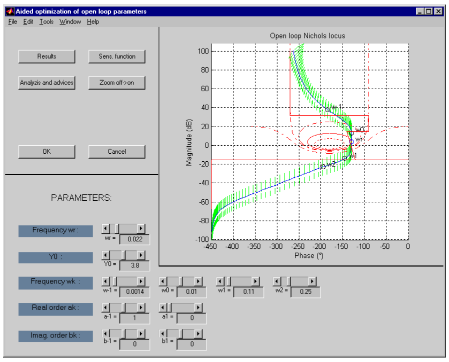

Figure 6 : Optimisation assistée des paramètres de la commande Crone de 3ème génération.

Une optimisation assistée ou automatique permet ensuite de déterminer les paramètres indépendants de la transmittance optimale en boucle ouverte. Cette optimisation repose sur la minimisation des variations du degré de stabilité lors des reparamétrisations du procédé, tout en respectant les autres spécifications prises en compte sous la forme de contraintes portant sur les fonctions de sensibilité. La figure suivante donne le résultat obtenu à l'aide de l'outil d'optimisation assisté disponible.

5. Conclusion

Les algorithmes de simulation des différents types de systèmes non entiers sont disponibles. De nouvelles fonctions permettent l'utilisation de variables struturées, décrivant plus facilement les sytèmes non entiers. Dans le module "System Identification by Fractional Model", deux méthodes sont actuellement disponibles. Une troisième méthode fondée sur la représentation modale des systèmes non entiers sera proposée. Les trois générations de commande CRONE ont été étendues aux systèmes monovariables, multivariables, non stationnaires et/ou non linéaires [4][11][12], et sont disponibles dans le module. Enfin, le logiciel comportera à terme de nouveaux modules concernant l'application de la dérivation non entière en robotique et en traitement d'image.

6. Références

[1] APP (Agence pour la Protection des Programmes) - N° 93.30.006.00 - 28/07/1993 ; N° 94.11.015.00 - 16/03/1994.

[2] J.-L. BATTAGLIA, L. LE LAY, J.-C. BATSALE, A. OUSTALOUP, O. COIS - Heat flow estimation through inverted non integer identification models - Int. J. of Thermal Science, **39**, 3, 374-389, April 2000.

[3] J.-L. BATTAGLIA, O. COIS, L. PUIGSEGUR and A. OUSTALOUP - Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model - Int. J. of Heat and Mass Transfer, **44**, 14, July 2001.

[4] J. BERNUSSOU - Commande robuste : développements et applications - HERMES, 1995.

[5] L. LELAY - Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier - Doctorat, 20 Octobre 1998.

[6] L. LJUNG - System identification: theory for the user - Prentice Hall, 1987.

[7] P. MELCHIOR, P. LANUSSE, F. DANCLA et O. COIS - Valorisation de l'approche non entière par le logiciel CRONE - CETSIS-EEA'99 - Montpellier, 1999.

[8] K.S. MILLER and B. ROSS - An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations - A Wiley-Interscience Publication, 1993.

[9] K. B. OLDHAM and J. SPANIER - The fractional calculus, Academic Press, New York-London, 1974.

[10] A. OUSTALOUP - La dérivation non entière, théorie, synthèse et application - HERMES, 1995.

[11] A. OUSTALOUP, B. MATHIEU and P. LANUSSE - The CRONE control of resonant plants : application to a flexible transmission - European Journal of Control, Vol. **1**, N°2, pp. 113-121, Ed. SPRINGER, 1995.

[12] A. OUSTALOUP et B. MATHIEU - La commande CRONE : du scalaire au multivariable - 2ème édition, HERMES, 1999.

[13] A. OUSTALOUP, P. MELCHIOR, P. LANUSSE, O. COIS and F. DANCLA - The CRONE toolbox for Matlab - 11th IEEE CACSD - Anchorage, Alaska, USA, September 25-27, 2000.

[14] S.G. SAMKO, A.A. KILBAS and O.I. MARICHEV - Fractional integrals and derivatives: theory and applications-Gordon and Breach Science Pub., 1993.