Synthèse de signaux en 1/f avec contrôle de la précision spectrale

M. GUGLIELMI

IRCCyN UMR 6597

- **Position du problème**
- **Caractéristiques d ’une cellule élémentaire**
- **Résolution du problème asymptotique**
- **Propriétés**
- **Optimisation**
- **Synthèse**
- **Application**

- **Position du problème**
- *Caractéristiques d ’une cellule élémentaire*
- *Résolution du problème asymptotique*
- *Propriétés*
- *Optimisation*
- *Synthèse*
- *Application*

Synthèse de signaux en 1/f avec contrôle de la précision spectrale :

1- Position du problème

Problème général de la synthèse correspondant à une caractérisation fréquentielle $1/f^{\gamma}$.

Technique retenue : **Réseau de cellules passives**

Résultat : Même pour une bande limitée de fréquences il faut une infinité des cellules;

En pratique, réseau limitée --> **approximation**

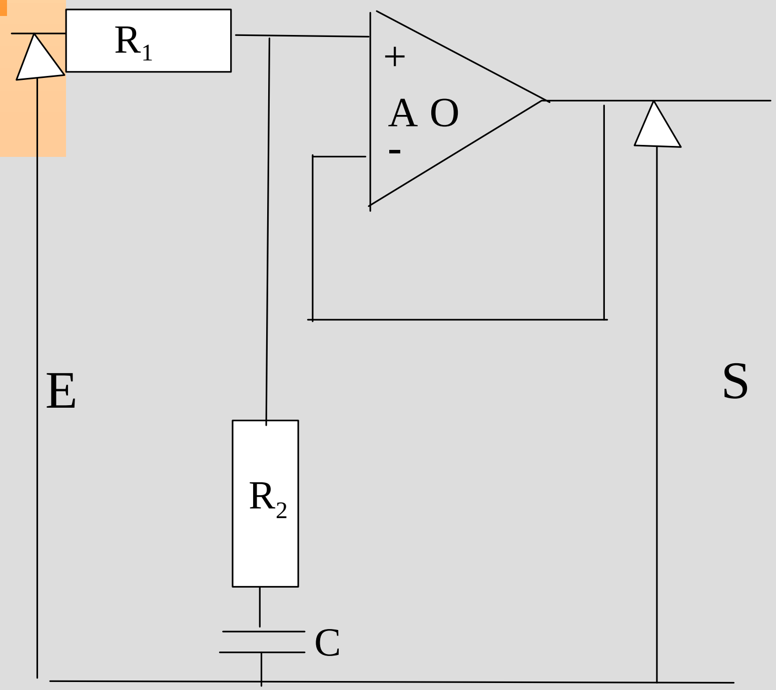
Peut-on contrôler la précision fréquentielle ?

- *Position du problème*
- **Caractéristiques d 'une cellule élémentaire**
- *Résolution du problème asymptotique*
- *Propriétés*
- *Optimisation*
- *Synthèse*
- *Application*

Synthèse de signaux en 1/f avec contrôle de la précision spectrale :

2- Caractéristiques d ’une cellule élémentaire

- **Fonction de transfert :**

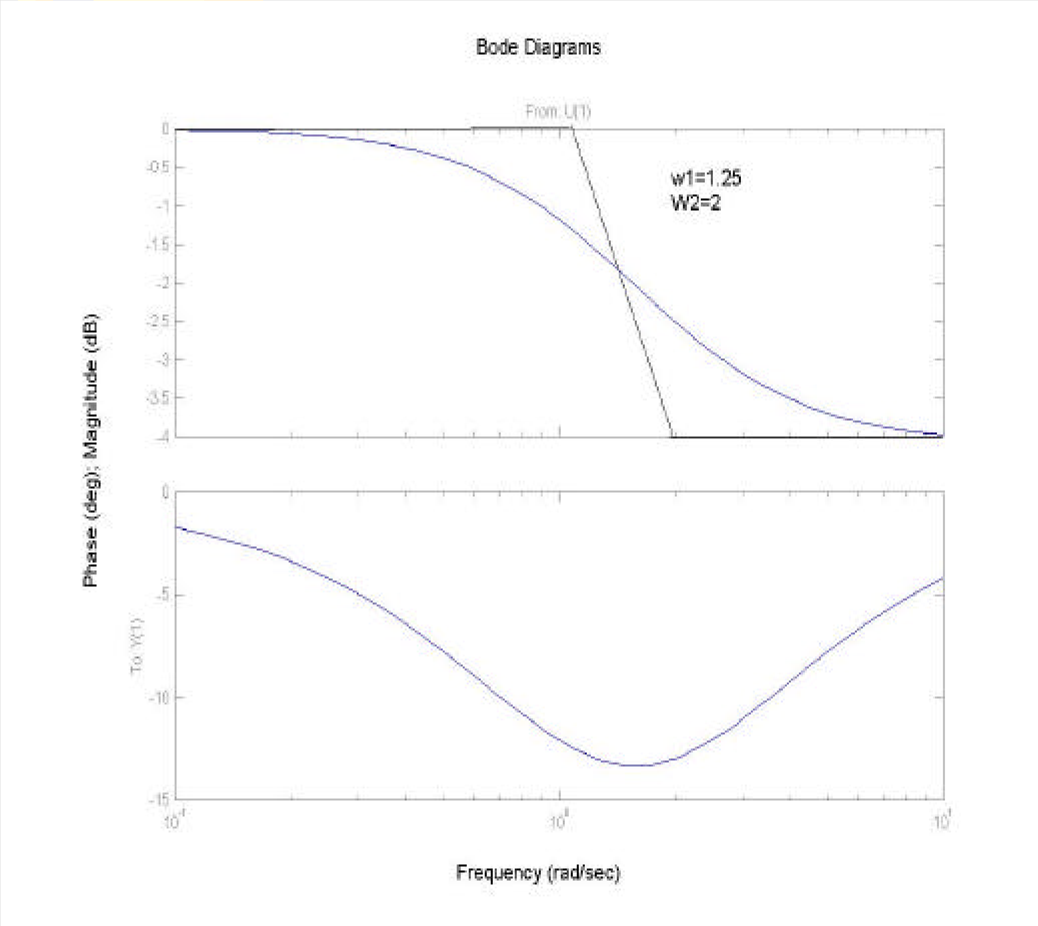


$$\frac{S}{E} = H(jw) = \frac{1 + j\dfrac{w}{w_2}}{1 + j\dfrac{w}{w_1}} \quad w_2 > w_1$$

$$w_2 = \frac{1}{R_2 C} \text{ et } w_1 = \frac{1}{(R_1 + R_2)C},$$

Synthèse de signaux en 1/f avec contrôle de la précision spectrale :

2- Caractéristiques d 'une cellule élémentaire



- **Réponse fréquentielle :**

Du point $\begin{cases}\log_{10}(w_1) \\ 0\end{cases}$

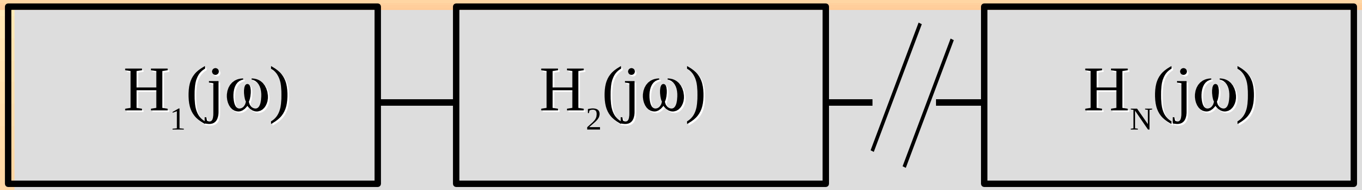
au point $\begin{cases}\log_{10}(w_2) \\ 0\end{cases}$

la pente est :

$$p = \frac{\log_{10}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)}{\log_{10}(w_2) - \log_{10}(w_1)} = -1$$

- *Caractéristiques d 'une cellule élémentaire*
- *Position du problème*
- **Résolution du problème asymptotique**
- *Propriétés*
- *Optimisation*
- *Synthèse*
- *Application*

3- Résolution du problème asymptotique :



$$H(jv) = \prod_{i=1}^{i=N} H_i(jv) = \prod_{i=1}^{i=N} \frac{1 + j\,\dfrac{w}{w_{i2}}}{1 + j\,\dfrac{w}{w_{i1}}}$$

On cherche donc (en coordonnées logarithmiques):

$$\boxed{\begin{array}{l} \left| H_{db}(jw) - g\ \log_{10} w \right| \le e \\ w \in \left[w_{\min}, w_{\max} \right] \end{array}}$$

3- Résolution du problème asymptotique :

On cherche N et $\{w_{i1}, w_{i2}\} \quad i \in [1, N]$.

La résolution de ce problème est complexe : il dépend de 2N+1 paramètres indépendants.

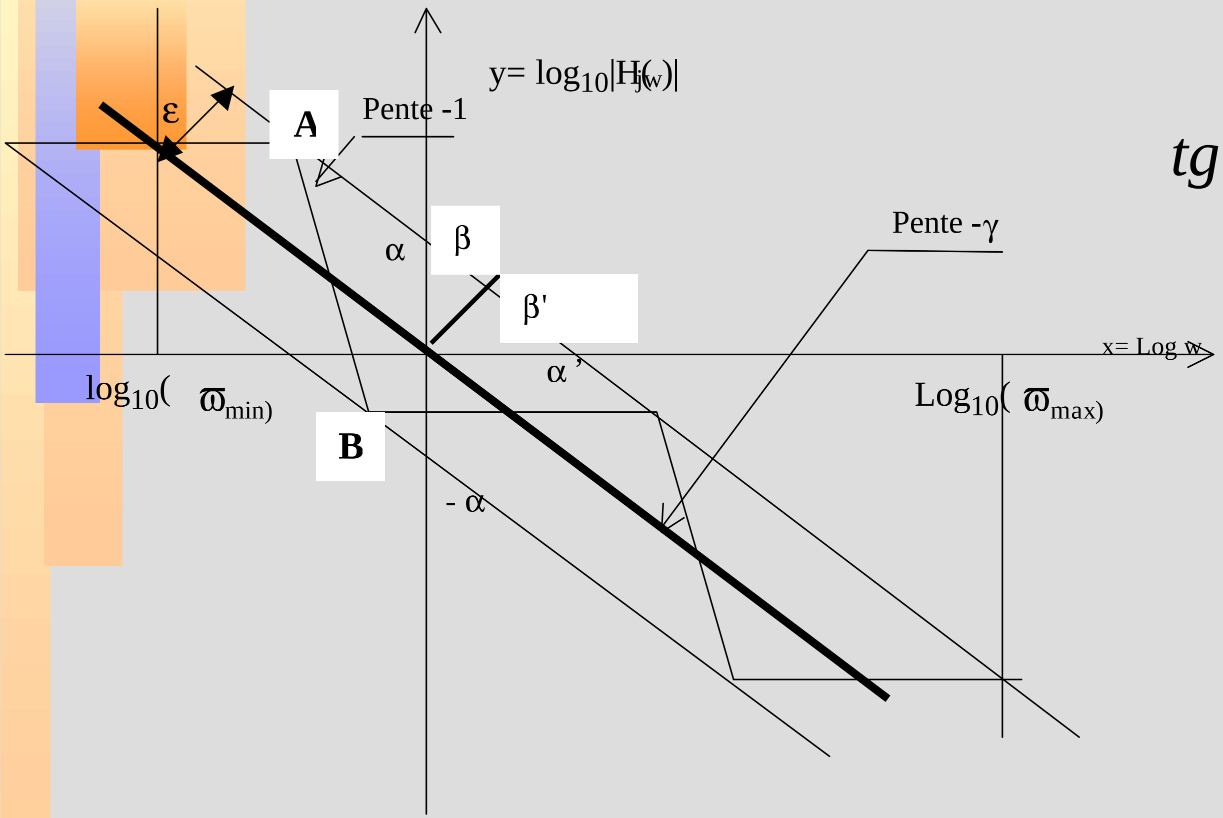
<u>Solution :</u>

$H_i^a(jw)$ est l'approximation asymptotique de $H_i(jw)$, on cherche N, $\{w_{i1}, w_{i2}\} \quad i \in [1, N]$ tel que :

$$\left| H_{db}^a(jw) - g \log_{10} w \right| \le e$$
$$w \in [w_{\min}, w_{\max}]$$

Synthèse de signaux en 1/f avec contrôle de la précision spectrale :

3- Résolution du problème asymptotique :



- **Résolution géométrique :**

$$tgq = g = \frac{e}{b'} = \frac{b}{e}$$

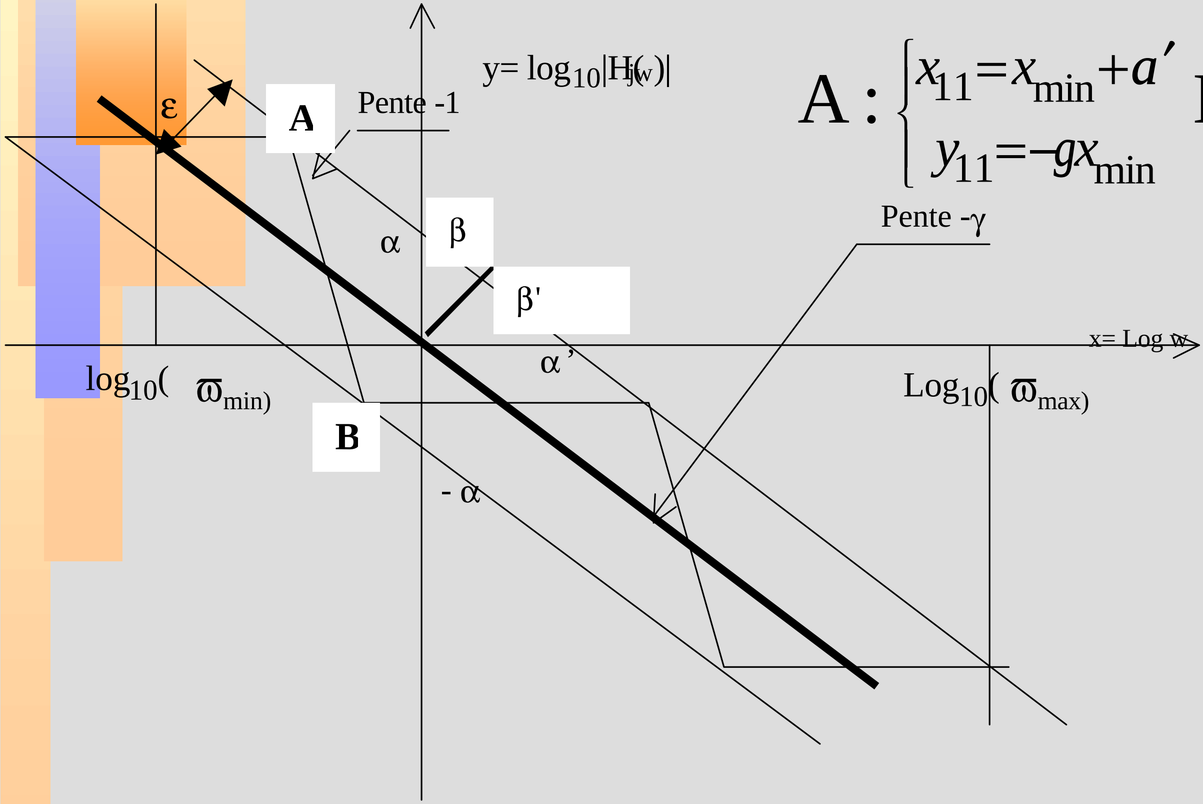
$$a' = e\sqrt{1+\frac{1}{g^2}}$$

$$a = e\sqrt{1+g^2}$$

Synthèse de signaux en 1/f avec contrôle de la précision spectrale :

3- Résolution du problème asymptotique :

- **Résolution géométrique :**



$$A : \begin{cases} x_{11} = x_{\min} + a' \\ y_{11} = -g x_{\min} \end{cases} \quad B : \begin{cases} x_{12} = x_{11} + \dfrac{2a}{g(1-g)} \\ y_{12} = y_{11} - \dfrac{2a}{(1-g)} \end{cases}$$

$$i : \begin{cases} x_{i1} \\ x_{i2} = x_{i1} + \dfrac{2a}{g(1-g)} \end{cases}$$

$$i+1 : \begin{cases} x_{i+1,1} = x_{i2} + 2a' \\ = x_{i1} + \dfrac{2a}{g(1-g)} \\ x_{i+1,2} = x_{i+1,1} + \dfrac{2a}{1-g} \\ = x_{i,2} + \dfrac{2a}{1-g} \end{cases}$$

Pour qu'une solution existe, il faut que les droites se coupent, d'où : $g < 1$.

3- Résolution du problème asymptotique :

- **Solution**

$$w_{i1} = 10^r w_{i-1,1} \quad i \geq 2 \quad avec \; r = 2e \frac{\sqrt{1+g^2}}{(1-g)g}$$

$$w_{i2} = 10^r w_{i-1,2} \quad i \geq 2$$

Et : $$\frac{w_{i2}}{w_{i1}} = \frac{w_{i-1,2}}{w_{i-1,1}} = \frac{w_{12}}{w_{11}} = 10^{rg} = 10^{2e\frac{\sqrt{1+g^2}}{(1-g)}}$$

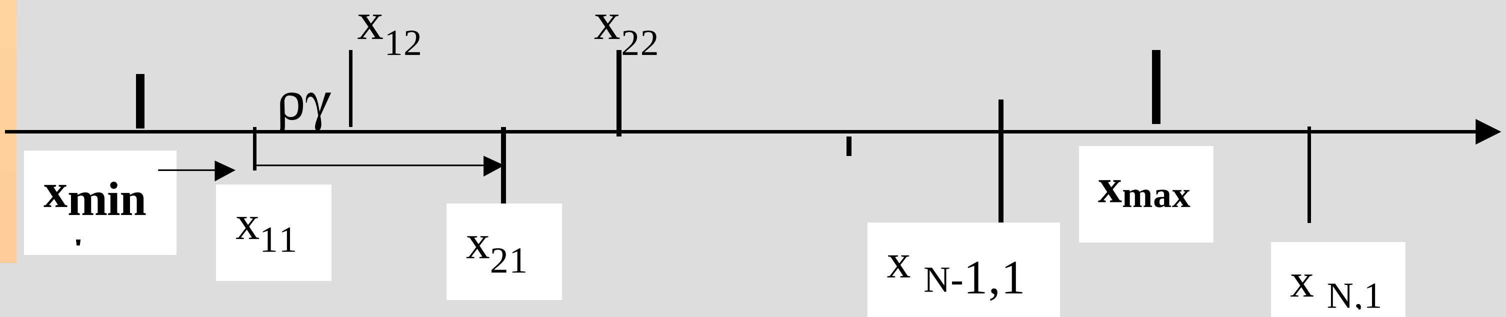
La structure de réseau est récursive,
Le rapport des pulsations transitionnelles est constant. La valeur des pulsations ne dépend que de la précision e **désirée (et de g).**

3- Résolution du problème asymptotique :

- **Nombre de cellules :**

N est obtenu lorsque la bande de pulsation $\{w_{min}, w_{max}\}$ est entièrement recouverte.

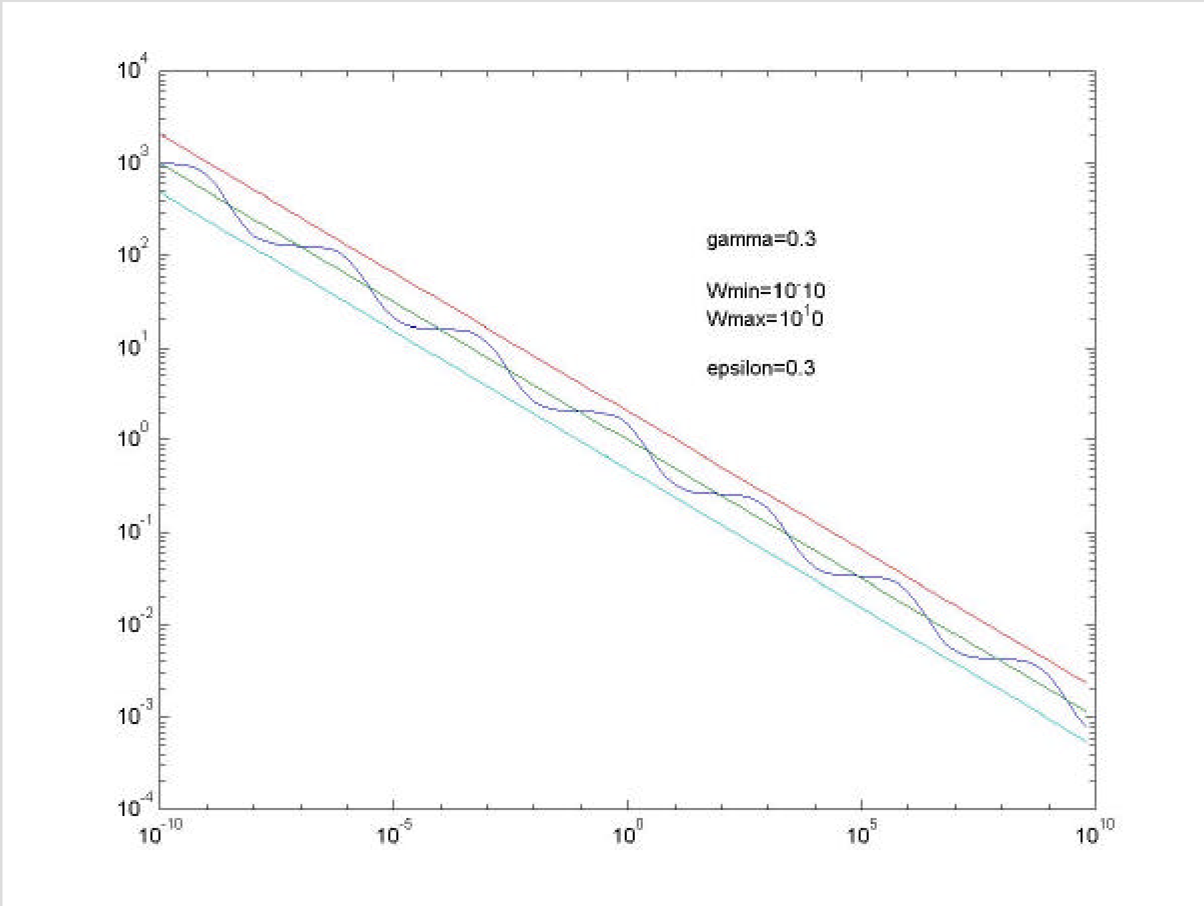
Sur un axe logarithmique :



$$\boxed{N = E\left\{\frac{1}{e}\,\frac{g\,(1-g)}{2\sqrt{1+g^{2}}}\,(x_{max} - x_{min}) - \frac{1-g}{2}\right\} + 1}$$

3- Résolution du problème asymptotique :

- **Exemple :**   **Réseau à 8 cellules**



- *Caractéristiques d 'une cellule élémentaire*
- *Position du problème*
- *Résolution du problème asymptotique*
- **Propriétés**
- *Optimisation*
- *Synthèse*
- *Application*

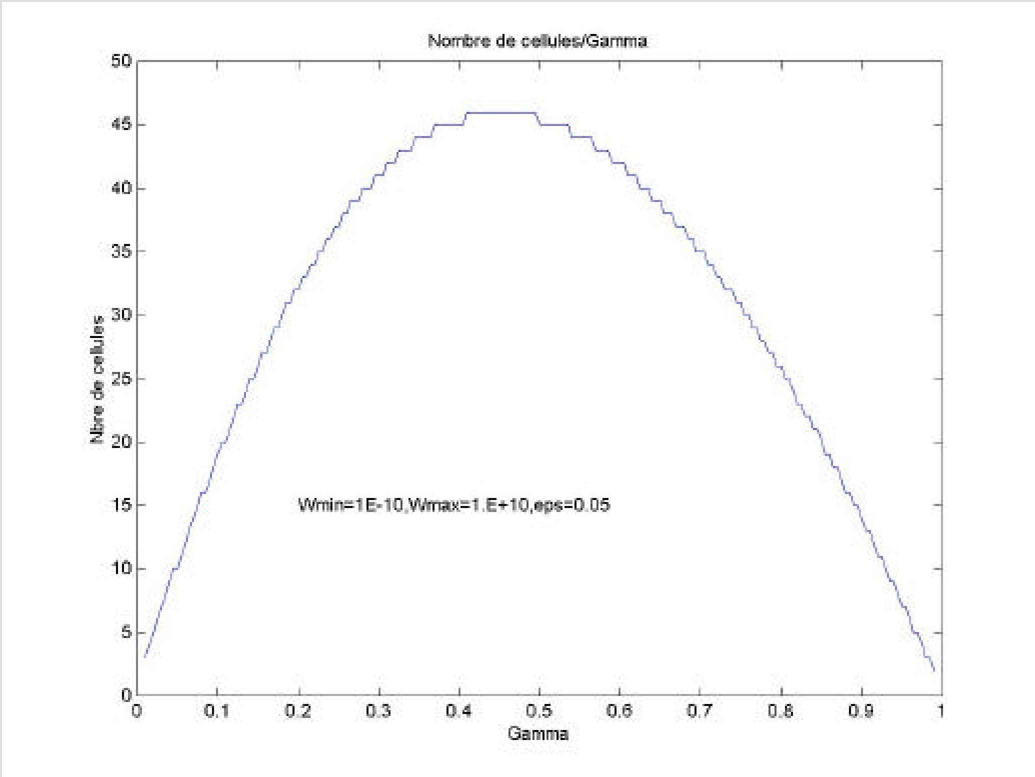
4- Propriétés :

- **La répartition est linéaire dans le plan log-log**
- **Le nombre de cellules est proportionnel au nombre de décades**

Synthèse de signaux en 1/f avec contrôle de la précision spectrale :

4- Propriétés :

Evolution du nombre de cellules en fonction de γ :



4- Propriétés :

Valeur de g qui nécessite le maximum de cellules :

- "pas" d'incrémentation des cellules

$$10^{r} = 10^{2e\frac{\sqrt{1+g^{2}}}{g(1-g)}}$$

- Le nombre maximal de cellules est g^{*} :

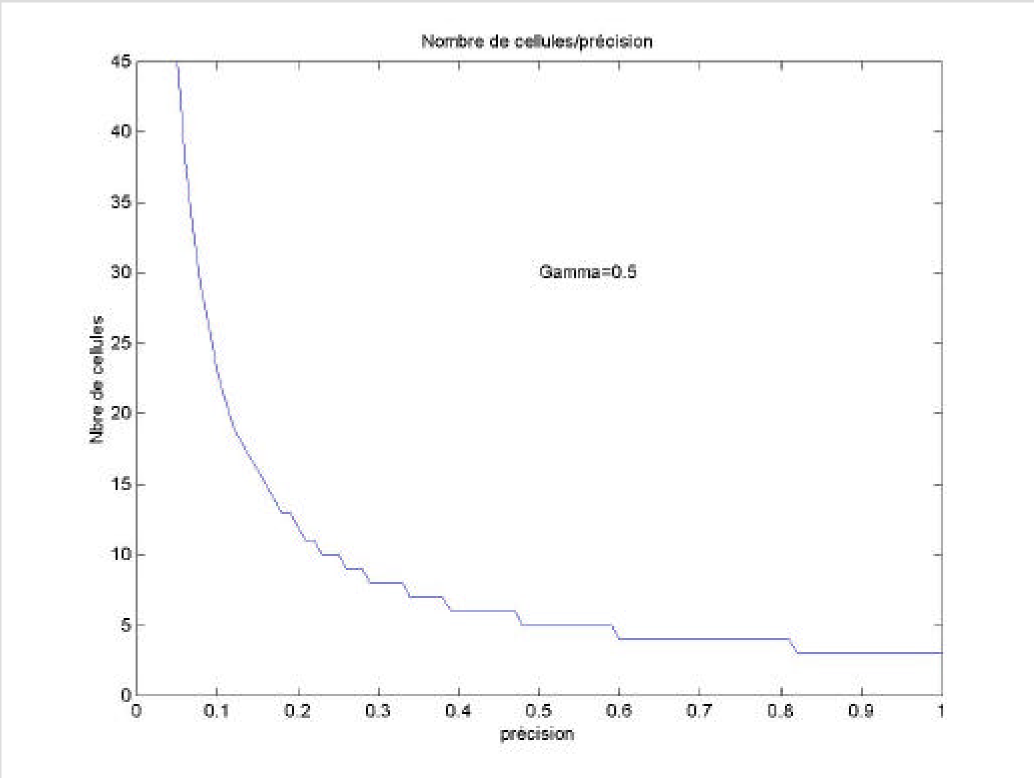
$$g^{*} = \operatorname{argmin}\left(\frac{\sqrt{1+g^{2}}}{g(1-g)}\right)$$

$$g^{*} \,/\, g^{3} + 2g - 1 = 0 \quad g^{*} \in [0.453, 0.454]$$

Synthèse de signaux en 1/f avec contrôle de la précision spectrale :

4- Propriétés :

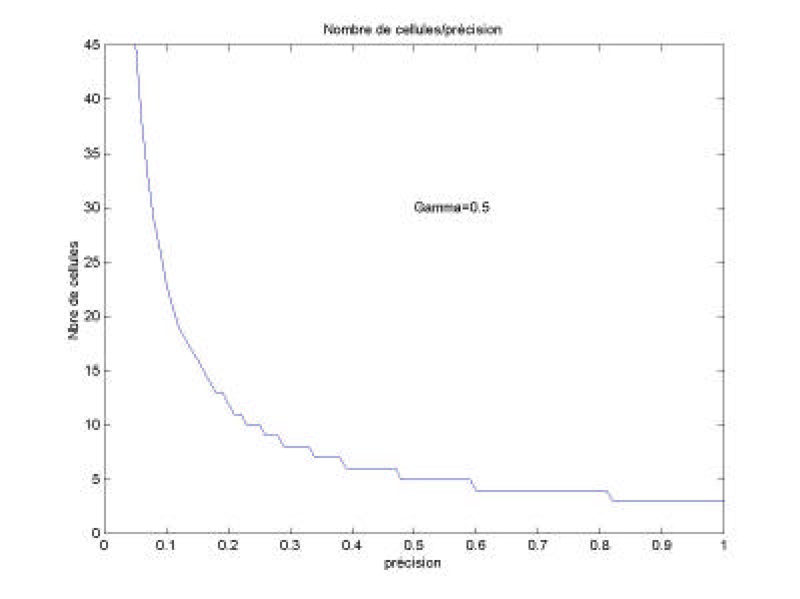
Evolution de N en fonction de la précision ε :



- *Caractéristiques d ’une cellule élémentaire*
- *Position du problème*
- *Résolution du problème asymptotique*
- *Propriétés*
- **Optimisation**
- *Synthèse*
- *Application*

Synthèse de signaux en 1/f avec contrôle de la précision spectrale :

5- Optimisation :



- En pratique on choisit N et on en déduit la précision ε* optimale:

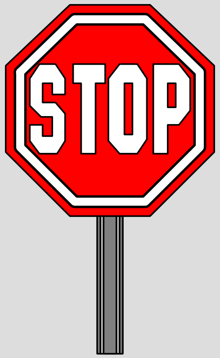
$$e^* = \frac{2\sqrt{1+g^2}}{g(1-g)(\log_{10} w_{\max} - \log_{10} w_{\min})}\left[N + \frac{1-g}{2}\right]$$

- *Caractéristiques d 'une cellule élémentaire*
- *Position du problème*
- *Résolution du problème asymptotique*
- *Propriétés*
- *Optimisation*
- **Synthèse**
- *Application*

6- Synthèse :

Synthèse temporelle :

$$b_k \longrightarrow \boxed{\overline{H_N(z)}} \longrightarrow y_k$$



$$H_N(s) \xrightarrow{T_e} \overline{H_N(z)}$$

Problème numérique

- *Caractéristiques d ’une cellule élémentaire*
- *Position du problème*
- *Résolution du problème asymptotique*
- *Propriétés*
- *Optimisation*
- *Synthèse*
- **Application**

7 - Application :

Synthèse de signal de DSP $1/f^{2g}$

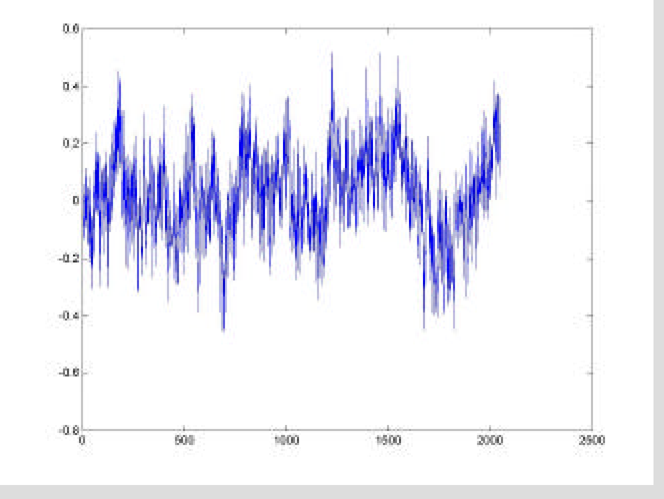
$$Q_{yy}(v) = \left|H(jv)\right|^2 Q_{uu}(jv)$$
$$= 1/f^{2g}$$

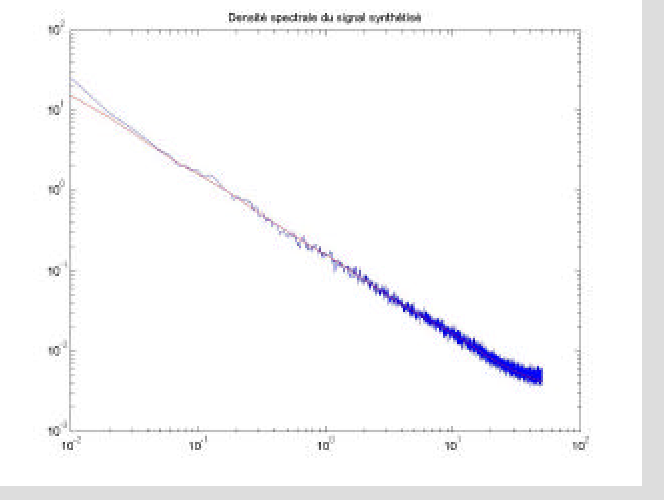
$$\left| H_N(jv) - \frac{1}{(jv)^g} \right| < e$$
$$v \in [v_{\min}, v_{\max}]$$

Synthèse de signaux en 1/f avec contrôle de la précision spectrale :

7 - Application :

$g = 0.5$ $\quad e = 0.1$ sur une bande de pulsation de 10^{-2} à 10^{+2}, **il faut 5 cellules**.





Validation