

Les systèmes à dérivées non entières : théorie et applications : 6 Novembre 2006

*Contribution à l'étude de signaux auto-similaires et à mémoire longue
au moyen de systèmes linéaires non-stationnaires*

M. GUGLIELMI , E. NORET

IRCCyN UMR 6597



PLAN

1- Rappels

2- Quelques modèles

3- Modèle linéaire non stationnaire

Autosimilarité

Mémoire longue

Rappels

Un P.S. STATIONNAIRE $X(t)$ est à mémoire longue si : $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T |\rho(\tau)| d\tau = \infty$ quand $T \rightarrow \infty$

où $\rho(\tau)$ est la fonction d'auto-corrélation de $X(t)$ indépendante de t .

Extension :

Un P.S. **NON- STATIONNAIRE** $X(t)$ est à mémoire longue si : $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T |\rho(t, t+\tau)| d\tau = \infty$ quand $T \rightarrow \infty$

où $\rho(t, t+\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de $X(t)$ dépendante de t .

Par exemple un processus tel que : $\rho(t, t+\tau) \propto g(t) \tau^{-\alpha}$ pour $\alpha \in]0, 1 [$,

Rappels :

Un P.S. $X(t)$ est auto similaire au SENS STRICT si :

$$\forall a > 0, X_t \equiv a^{-H} X(at) \text{ de paramètre d'autosimilarité } H$$

Un P.S. $X(t)$ est auto-similaire au SENS LARGE si :

$\forall a > 0$, et $\forall t_1, t_2$ le processus $a^{-H} \{X(at_1), X(at_2)\}$ a les deux mêmes premiers moments que $\{X(t_1), X(t_2)\}$

Les modèles standard de la longue dépendance

Mouvement brownien fractionnaire, : Le mouvement brownien fractionnaire $B_H(t)$ est un processus stochastique paramétré par un scalaire $H \in]0, 1[$ défini par :

$$B_H(t) = 1/\Gamma(H+1/2) \left[\int_{-\infty}^0 |t-\tau|^{H-1/2} | \tau |^{H-1/2} d B(\tau) + \int_0^t |t-\tau|^{H-1/2} d B(\tau) \right]$$

Pour le MBF $\rho(t, t+\tau) \propto H t^{(1-H)} \tau^{-(1-H)}$ pour $H \in]0.5, 1[$

Cf : MANDELBROT VAN HESS 1968

Non stationnaire, auto similaire.

Cas particulier

$H = 1/2$ redonne le mouvement brownien ordinaire..

bruit gaussien fractionnaire :, les incréments de $BH(t)$ définis comme

$G(t) = B_H(t+\Delta) - B_H(t)$ est un P.S. Stationnaire, auto similaire et à mémoire longue pour $H > 0.5$

Les modèles standard de la longue dépendance

Intégration non entière :

on définit ainsi le processus stochastique de Barnes-Allan $H \in]0; 1[$: (Barnes et Allan 1966)

$$\mathbf{A}_H(t) = 1/\Gamma(H+1/2) \int_0^t |t-\tau|^{H-1/2} d\mathbf{B}(\tau)$$

Lien avec l'intégration non entière : $I_\nu = 1/\Gamma(\nu) \int_0^\tau (t-\tau)^\nu d\mathbf{B}(\tau)$

Non stationnaire, auto similaire.

Cas particulier

Ses incréments sont aussi non stationnaires.

Bonne approximation du FBM..

Intégrateur discret non entier : (Guglielmi et al. 2004 IC2)

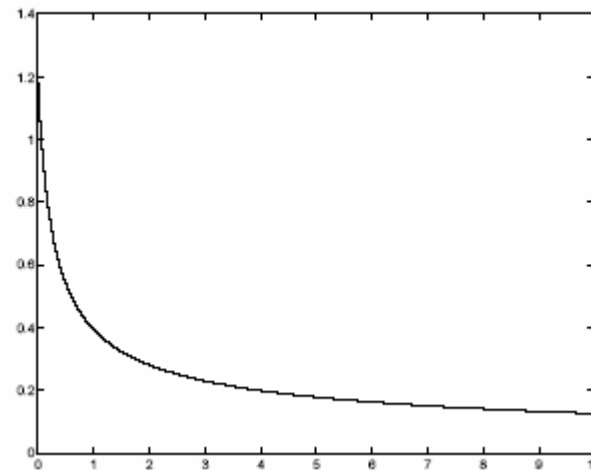
$$\mathbf{H}(z) = 1/(1 - z^{-1})^d \quad d \in \mathcal{R} \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}(z) = 1 + \sum \Gamma(l+d) / \Gamma(d) \Gamma(l+1) z^{-l}$$

à rapprocher de la formule de dérivation non entière.

Réponse impulsionnelle $h(k) = \Gamma(k+d) / \Gamma(d) \Gamma(k+1)$ $\mathbf{H}(z)$ stable si $d < 1$

Les modèles standard de la longue dépendance

$Y(z) = H(z) \varepsilon(z) \rightarrow$ P.S. de fonction d'autocorrélation :



Modèle FARIMA :

$$\mathbf{H(z) = (1-z^{-1})^d A(z)/B(z)}$$

Les modèles de la longue dépendance

Dynamique (max, +) pour la longue dépendance : (Chapeau Blondeau 1999)

Le modèle d'état de base :

$$\begin{aligned} X(k) &= X(k+1) + \varepsilon(k) ; \\ Y(k) &= \max[Y(k-1); X(k)] ; \end{aligned}$$

$$y(k) = Y(k) - Y(k-1) ;$$

Non stationnaire, auto similaire.

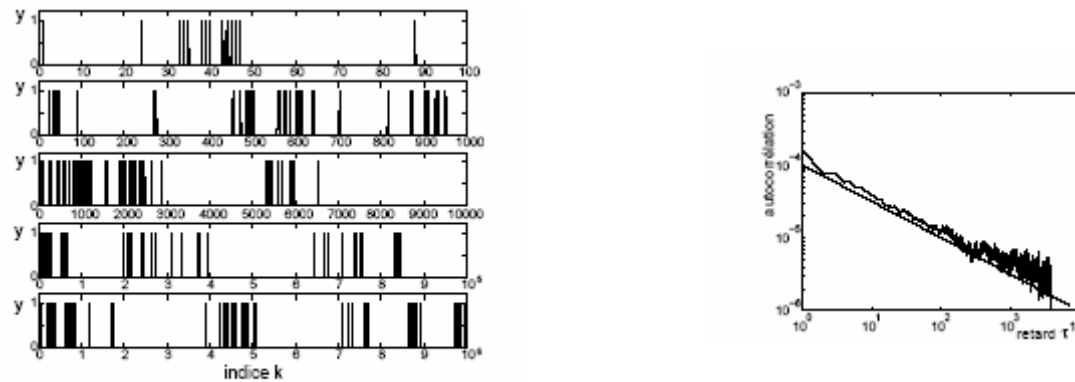


Figure 1.1. Une réalisation du signal $y(k)$ des Eqs. (1.9)–(1.11) quand $\varepsilon(k) = \pm 1$, représentée sur des intervalles de longueurs croissantes montrant l'auto-similarité.

Modèle linéaire non stationnaire

Définitions : Soit le système linéaire :

$$dX(t) = F(t) X(t) dt + G(t) dB(t) \text{ pour } t > t_0$$

$$y(t) = C X(t)$$

Dim $X(t) = n$

Où $F(t) = \text{diag}(\gamma_{1i}/t)$ et $G(t) = [\dots \gamma_{3i} t^{\gamma_{2i}} \dots]$ et $C = [1 \dots]$

Avec $X(t_0)$ est un vecteur aléatoire indépendant de $B(t)$. Ses caractéristiques sont :

$$E \{X(t_0)\} = m_X(t_0)$$

$$E \{X(t_0)X(t_0)^T\} = V_{ij}$$

Condition d'existence :

$$\int_{t_1}^{t_2} \zeta^{2(\gamma_{2i} - \gamma_{1i})} d\zeta$$

Pour $n=1$; $d x(t) = \gamma_{11}/t x(t) dt + \gamma_{31} t^{\gamma_{21}} dB(t)$

Modèle linéaire non stationnaire

Autocorrélation : (NORET 1999)

De l'état : $E\{X(t')X(t)^T\} = \Phi(t',t)E\{X(t')X(t)^T\}$ et de la sortie $E\{y(t')y(t)^T\} = C E\{X(t')X(t)^T\} C^T$

Variance : $[E\{X(t)X(t)^T\}]_{ij} = (t/t_0)^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} V_{ij} + \sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} \int_{t_0}^t \zeta^{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1i} + \gamma_{1j}} d\zeta$

Soit $\mathfrak{S}_0 = \{(i_0, j_0)\} \in [1,n] * [1,n]$ tel que : $\gamma_{2i_0} + \gamma_{2j_0} - \gamma_{1i_0} - \gamma_{1j_0} = -1$

3.2.2. Moments d'ordre 2

L'expression générale du moment d'ordre 2 de l'état $X(t)$ est donnée par :

$$\left[E \left\{ X(t) X(t)^T \right\} \right]_{ij} = \left(\frac{t}{t_1} \right)^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} V_{ij} + \sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} \int_{t_1}^t \tau^{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1i} - \gamma_{1j}} d\tau$$

Soit $\mathfrak{S}_0 = \{(i_0, j_0) \in [1, n] \times [1, n] \text{ tel que } \gamma_{2i_0} + \gamma_{2j_0} - \gamma_{1i_0} - \gamma_{1j_0} = -1\}$

Un simple calcul conduit à :

$$\forall (i, j) \in \mathfrak{S}_0 \left[E \left\{ X(t) X(t)^T \right\} \right]_{ij} = \left(\frac{t}{t_1} \right)^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} V_{ij} + \sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} \ln \left(\frac{t}{t_1} \right)$$

$$\forall (i, j) \notin \mathfrak{S}_0 \left[E \left\{ X(t) X(t)^T \right\} \right]_{ij} = \frac{\sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t^{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} + 1}}{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1i} - \gamma_{1j} + 1} + t^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} \xi_{ij}(t_1)$$

$$\text{avec } \xi_{ij}(t_1) = \left[\frac{V_{ij}}{t_1^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}}} - \frac{\sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t_1^{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1i} - \gamma_{1j} + 1}}{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1i} - \gamma_{1j} + 1} \right]$$

Modèle linéaire non stationnaire

Pour la sortie, on a :

$$E\{y(t)^2\} = CE\{X(t)X(t)^T\}C^T = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{S}_0} \frac{\sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t^{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} + 1}}{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1i} - \gamma_{1j} + 1} + t^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} \xi_{ij}(t_1) + \dots + \sum_{(i,j) \in \mathfrak{S}_0} \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} V_{ij} + \sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} \ln\left(\frac{t}{t_1}\right)$$

3.2.3. Autocorrélation

L'autocorrélation de l'état est :

$$E\{X(t')X(t)^T\} = \Phi(t', t)E\{X(t)X(t)^T\}$$

Soit :

Modèle linéaire non stationnaire

Autocorrélation de l'état :

$$\forall (i, j) \in \mathfrak{I}_0 \left[E \left\{ X(t) X(t)^T \right\} \right]_{ij} = \frac{t^{\gamma_{1j}} t^{\gamma_{1i}}}{t_1^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}}} V_{ij} + \sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t^{\gamma_{1j}} t^{\gamma_{1i}} \ln \left(\frac{t}{t_1} \right)$$

$$\forall (i, j) \notin \mathfrak{I}_0 \left[E \left\{ X(t) X(t')^T \right\} \right]_{ij} = \frac{\sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t'^{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} + 1}}{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1i} - \gamma_{1j} + 1} + \xi_{ij}(t_1) t^{\gamma_{1j}} t'^{\gamma_{1i}}$$

L'autocorrélation de la sortie $y(t)$ est alors :

$$E \{ y(t) y(t') \} = \sum_{\mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{I}_0} \left[E \left\{ X(t) X(t)^T \right\} \right]_{ij} =$$

$$\sum_{i, j \in \mathfrak{I}_0} \left(\left(\frac{t}{t_1} \right)^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} V_{ij} + \sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} \ln \left(\frac{t}{t_1} \right) \right) + \dots$$

$$+ \sum_{i, j \notin \mathfrak{I}_0} \left(\frac{\sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t'^{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} + 1}}{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1i} - \gamma_{1j} + 1} + t^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} \xi_{ij}(t_1) \right)$$

Modèle linéaire non stationnaire

Autosimilarité :

Les conditions d'autosimilarité sur les deux premiers moments de $y(t)$ conduisent à [NOR 99] :

Pour que $y(t)$ soit autosimilaire, il faut et il suffit que :

i) $\mathfrak{S}_0 = O \Leftrightarrow \forall i, j \in [1, n] \times [1, n] \quad \gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1i} - \gamma_{1j} \neq -1$

ii) $m_X(t_1) = 0$

iii) $\forall i \in [1, n] \quad \gamma_{2i} = \gamma_2 \text{ et } \gamma_{1i} - \gamma_2 - \frac{1}{2} < 0$

iiii) $\forall i, j \in [1, n] \times [1, n] \quad \xi_{ij}(t_1) = 0 \Leftrightarrow V_{ij} = \frac{\sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t_1^{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} + 1}}{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1i} - \gamma_{1j} + 1}$

Sous toutes ces conditions $y(t)$ est autosimilaire de paramètre $H = \gamma_2 + \frac{1}{2}$.

Modèle linéaire non stationnaire

Mémoire longue :

i) Si $y(t)$ est auto-similaire :

$$E\{y(t)y(t+\tau)\} = \sum_{j=1}^n \left((t+\tau)^{\gamma_{1j}} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} t^{2\gamma_2 - \gamma_{1j} + 1}}{2\gamma_2 - \gamma_{1i} - \gamma_{1j} + 1} \right)$$

$$E\{y(t+\tau)^2\} = \sum_{i,j} \frac{\sigma^2 \gamma_{3i} \gamma_{3j} (t+\tau)^{2\gamma_2 + 1}}{2\gamma_2 - \gamma_{1i} - \gamma_{1j} + 1}$$

Donc :

$$E\{y(t)y(t+\tau)\} \propto h_1(t) \tau^{\alpha_1} \text{ avec } \alpha_1 = \max_{j \in [1,n]} \{\gamma_{1j}\}$$

$$E\{y(t+\tau)^2\} \propto h_2(t) \tau^{2\gamma_2 + 1}$$

Ce qui conduit à :

$$\rho_{yy}(t, t+\tau) \propto g(t) \tau^{-\alpha}$$

$$\text{avec } \alpha = \gamma_2 + \frac{1}{2} - \max_{j \in [1,n]} \{\gamma_{1j}\}$$

La sortie $y(t)$ est à mémoire longue si :

$$0 \leq \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \max_{j \in [1,n]} \{\gamma_{1j}\} \geq \gamma_2 - \frac{1}{2}$$

Modèle linéaire non stationnaire

Mémoire longue :

ii) Si $y(t)$ n'est pas autosimilaire :

$$\begin{aligned}
 E\{y(t)\}E\{y(t + \tau)\} &= \sum_{j=1}^n t^{\gamma_{1i}} \frac{[m_X(t_1)]_j}{t_1^{\gamma_{1j}}} \sum_{j=1}^n (t + \tau)^{\gamma_{1i}} \frac{[m_X(t_1)]_j}{t_1^{\gamma_{1j}}} \\
 E\{y(t + \tau)\}^2 &= \sum_{i=1}^n (t + \tau)^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}} \frac{[m_X(t_1)]_i [m_X(t_1)]_j}{t_1^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}}} \\
 E\{y(t)y(t + \tau)\} &= \sum_{i, j \in \mathfrak{I}_0} \frac{\gamma_{3i}\gamma_{3j}\sigma^2 t^{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1j} + 1} (t + \tau)^{\gamma_{1j}}}{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} - \gamma_{1i} - \gamma_{1j} + 1} + \dots \\
 &+ \sum_{i, j \in \mathfrak{I}_0} \xi_{ij}(t_1) t^{\gamma_{1i}} (t + \tau)^{\gamma_{1j}} + \dots \\
 &+ \sum_{i, j \in \mathfrak{I}_0} (t + \tau)^{\gamma_{1j}} \left(\frac{V_{ij} t^{\gamma_{1j}}}{t_1^{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}}} + \gamma_{3i}\gamma_{3j}\sigma^2 t^{\gamma_{1i}} \ln\left(\frac{t}{t_1}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Modèle linéaire non stationnaire

Mémoire longue :

et on montre que [NOR 99] :

$$\rho_{yy}(t, t+\tau) \propto g(t)\tau^{\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2}} \text{ si } \alpha_2 > \alpha_3$$
$$\rho_{yy}(t, t+\tau) \propto g(t)\frac{1}{\sqrt{\ln \tau}} \text{ si } \alpha_2 \leq \alpha_3$$

Donc :

y(t) est à mémoire longue :

i) si $\max_{i,j \in \mathbb{N}_0} \{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} + 1, \gamma_{1i} + \gamma_{1j}\} > \max_{i,j \in \mathbb{N}_0} \{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}\}$ et si $0 \leq \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2} \leq 1$

ou

ii) si $\max_{i,j \in \mathbb{N}_0} \{\gamma_{2i} + \gamma_{2j} + 1, \gamma_{1i} + \gamma_{1j}\} \leq \max_{i,j \in \mathbb{N}_0} \{\gamma_{1i} + \gamma_{1j}\}$ $y(t)$

Modèle linéaire non stationnaire

Remarque :

3.3. Limite quand $t_1 \rightarrow 0$

Si t_1 tend vers zéro, le processus stochastique $y(t)$ peut être défini si :

i) l'intégrale stochastique est définie au sens de L^2 . Pour cela, il faut et il suffit alors que :

$$\forall i \in [1, n] \quad \gamma_{2i} - \gamma_{1i} + \frac{1}{2} > 0$$

ii) Le terme correspondant à la réponse à la condition initiale existe, ce qui conduit aux conditions nécessaires et suffisantes :

$$\forall i \in [1, n] \quad \gamma_{1i} < 0 \quad \text{ou} \quad x_i(0) = N(0,0)$$

Sous ces conditions, il est aisé de montrer que le processus :

$$y_{t_1}(t) \xrightarrow{t_1 \rightarrow 0} y_0(t)$$