

# Modélisation et identification d'interfaces de diffusion linéaires et non linéaires par intégrateurs fractionnaires

J.C. TRIGEASSOU, A. BENCHELLAL,  
F. BENOIT-MARAND, T. POINOT, L. SIGNAC

LAI ESIP Poitiers

# Introduction

- La modélisation fractionnaire trouve ses fondements dans la modélisation des phénomènes de diffusion
- Quelques justifications théoriques (J.L. Battaglia en thermique, J. Faucher en électrotechnique), mais beaucoup de travaux basés sur l'intuition, sans véritable approche méthodologique

# Démarche proposée :

- Étude d'un problème académique justifiant la modélisation fractionnaire et ses spécificités
- Définition d'une modélisation fractionnaire réellement adaptée au problème considéré
- Envisager les cas linéaires et non linéaires

# Position du problème de diffusion de la chaleur

équation de la chaleur:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\Phi(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$$

où  $\alpha$  peut varier avec  $T$

# Conditions aux limites :

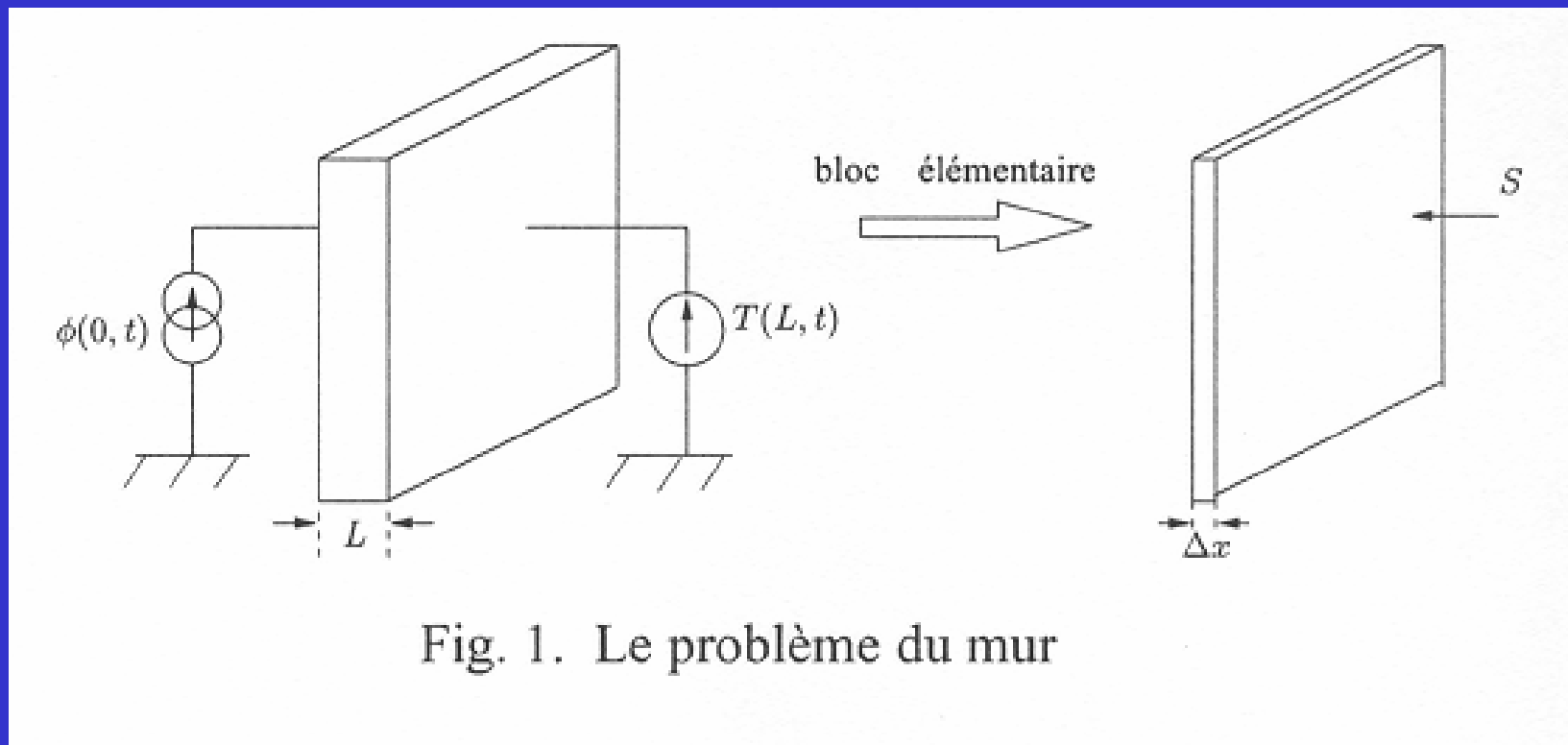


Fig. 1. Le problème du mur

# Interface de diffusion

- **Interface :**  
relation entre  $\Phi(t)$  et  $T(t)$  en  $x = 0$
- **Objectifs :**
  - représenter  $T(s)/\Phi(s)$  par un modèle d'ordre non entier dans le cas linéaire ( $\alpha = \text{cte}$ )
  - définir un modèle non entier non linéaire dans le cas où  $\alpha$  varie avec  $T$

# Méthode d'étude

- Analyser la relation entre  $\Phi(t)$  et  $T(t)$  grâce à un simulateur numérique pour trois géométries de référence (plan, cylindre, sphère), à  $\alpha = \text{cte}$  et à  $\alpha$  variable avec  $T$ .
- Dans le cas linéaire  $H(s) = T(s)/\Phi(s)$  : analyser  $H(s)$  en temporel et en fréquentiel

# Méthode d'étude (suite)

- Dans le cas non linéaire : simuler le comportement temporel pour  $\alpha$  variant avec T et pour des excitations de grande amplitude
- Bilan : constitution d'une base de données temporelles et fréquentielles, indépendamment d'une quelconque caractérisation fractionnaire

# Intégrateur fractionnaire

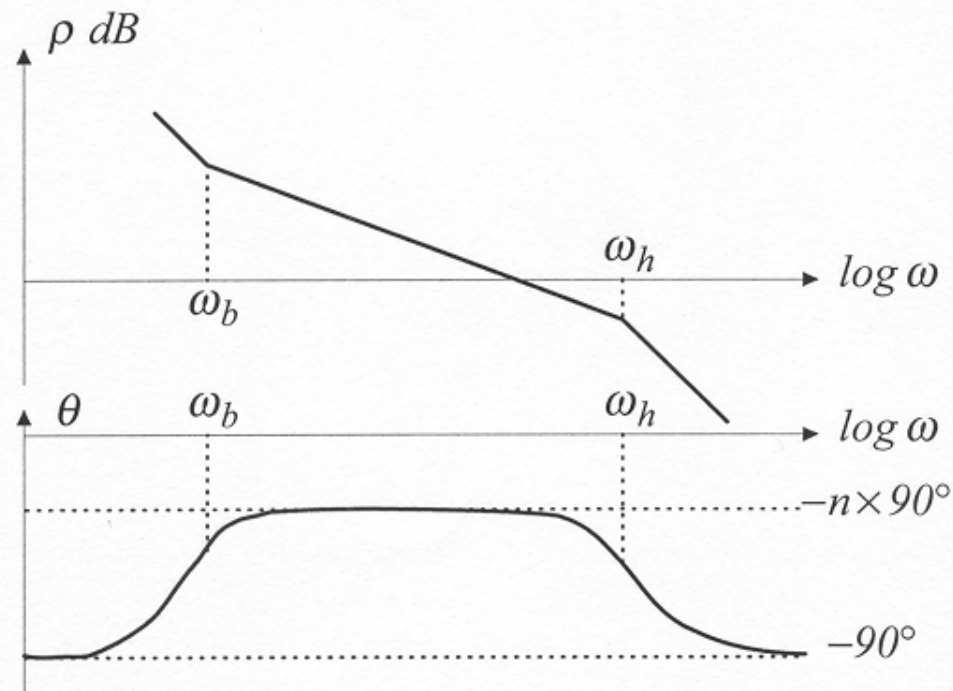
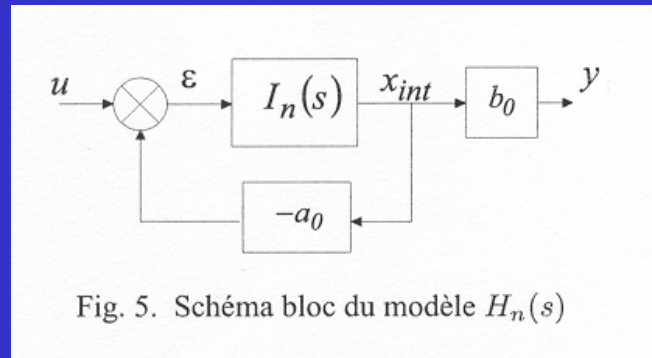


Figure 5. Bode diagram of the fractional integrator  $I_n^*(s)$

# Modélisation/identification : cas linéaire

- Simulation de transferts fractionnaires à l'aide de l'intégrateur fractionnaire :



- Améliorer l'approximation temporelle et fractionnaire via l'identification par erreur de sortie en augmentant le nombre d'intégrateurs

# Identification par erreur de sortie

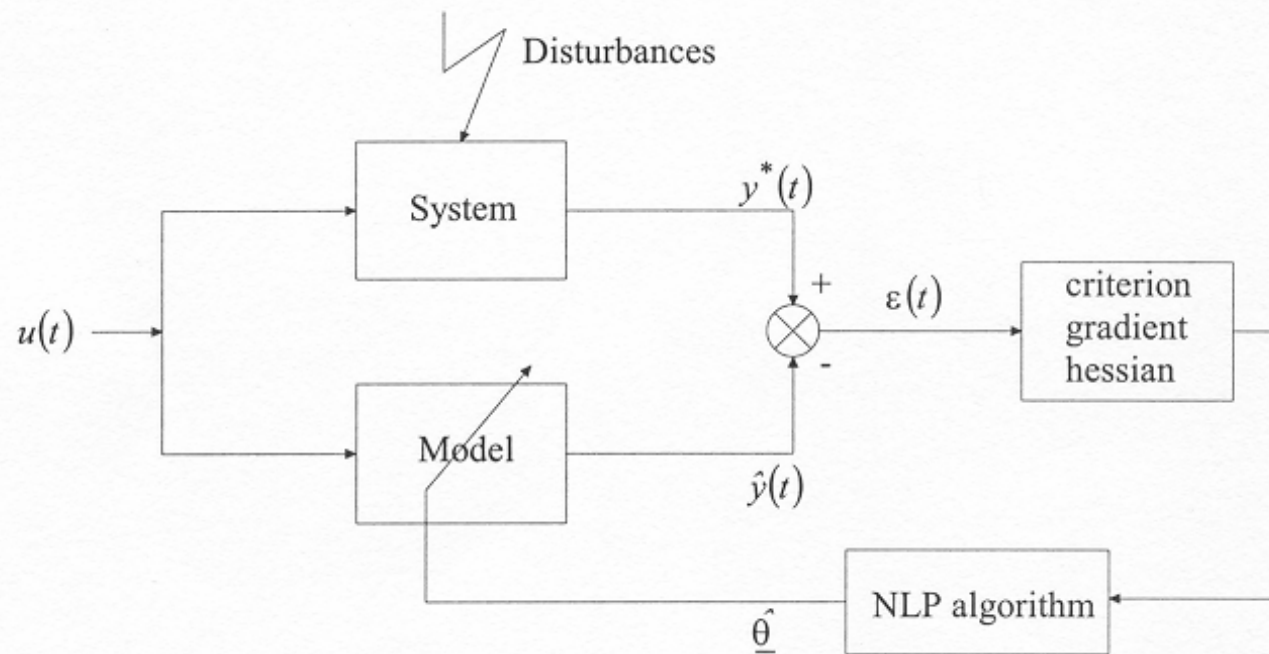


Figure 2. Output-error identification technique

# Modélisation/identification : cas non linéaire

Choix d'une technique de modélisation non linéaire :

- **Modèle non linéaire du type boîte grise** : excellente solution, mais quel modèle choisir ?
- **Modélisation par séries de Volterra** : solution classique, mais lourde en nombre de paramètres; de plus, pas de retour à la physique
- **Modélisation par multi-modèles** : agrégation de modèles locaux linéaires, solution à investiguer

# Modélisation/identification : cas non linéaire

## Modélisation par réseaux de neurones :

- intérêt : aucun a priori sur la non linéarité
- défaut : gestion d'un nombre élevé de paramètres; pas de retour à la physique pour les Réseaux de Neurones Discrets
- solution pas Réseaux de Neurones Continus: mêmes propriétés que les RND, mais retour possible à la physique; attention cependant à la complexité paramétrique en non entier !

# Simulation des interfaces de diffusion : cas du mur en linéaire

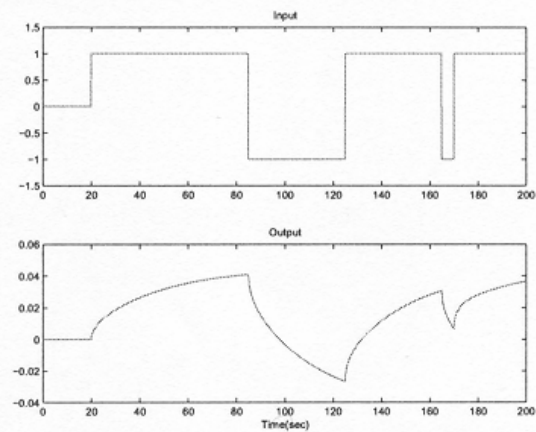


Fig. 2. Entrée-sortie du modèle numérique du mur

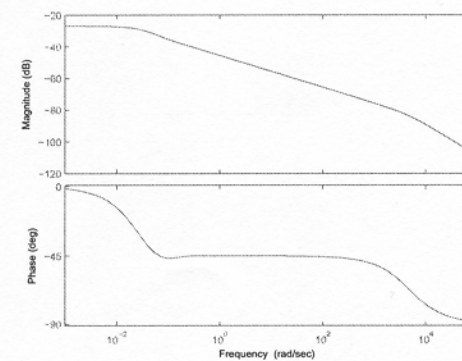
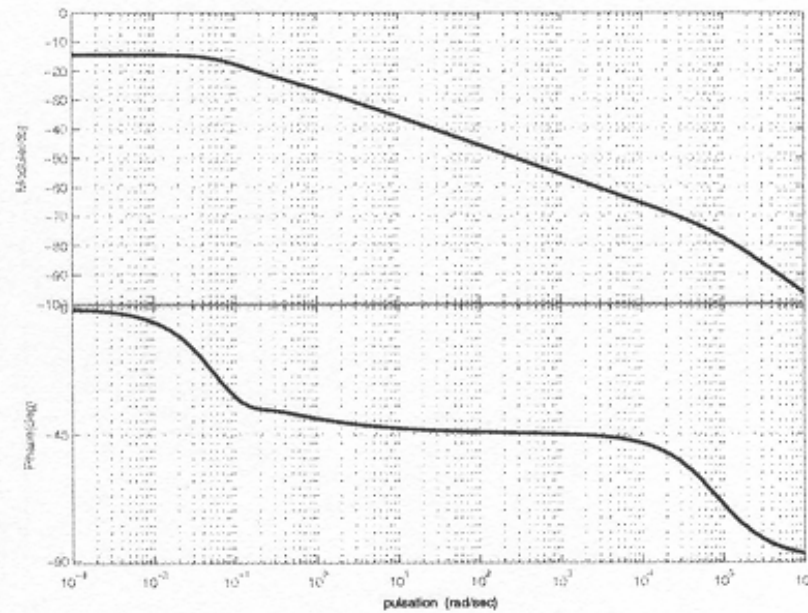


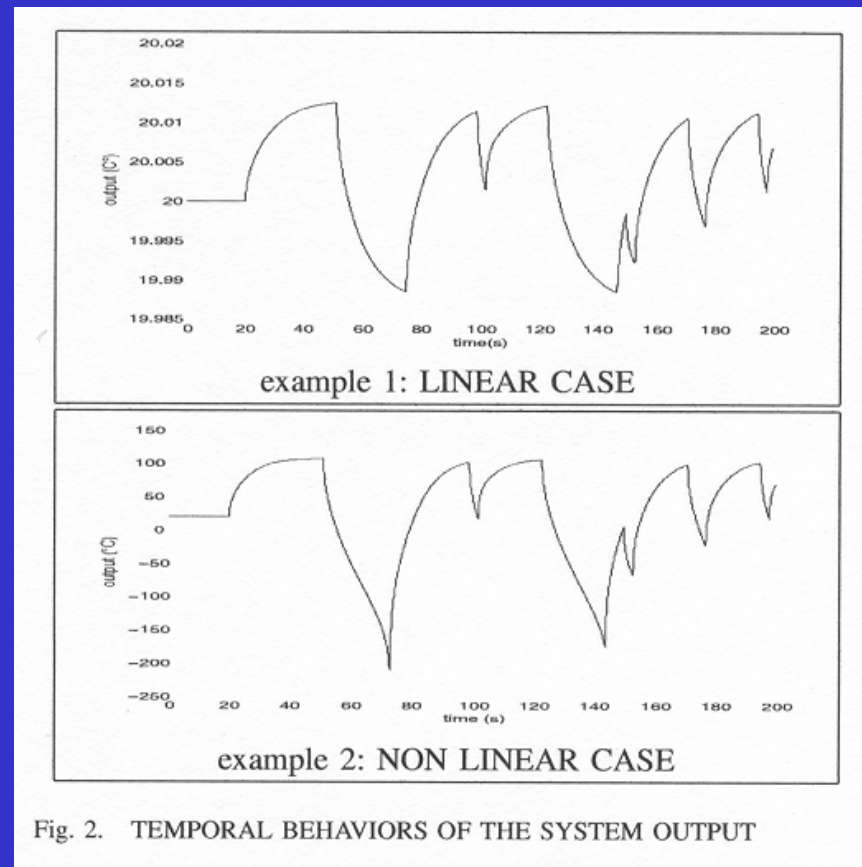
Fig. 3. Réponse fréquentielle du modèle numérique du mur

# Simulation des interfaces de diffusion : cas du cylindre



*Figure 9:* Diagrammes de Bode du modèle avec  $I = 1000$

# Simulation des interfaces de diffusion : cas du mur en non linéaire



# Simulation des interfaces de diffusion : bilan

**Courbes temporelles** : la nécessaire référence pour l'identification temporelle, mais attention, une excellente correspondance données/modèle peut cacher des imperfections de modélisation

**Courbes fréquentielles** :

- le module : non significatif, difficile à interpréter
- la phase : excellent indicateur : permet de confirmer ou d'invalider une identification temporelle

# Courbes fréquentielles : la phase

- La phase est un excellent indicateur des contraintes de modélisation : quelle que soit la géométrie :

$$\varphi(\omega) \rightarrow -45^\circ$$

*lorsque  $\omega \rightarrow \infty$*

## Conclusions :

- l'ordre  $n = 0.5$  est une contrainte pour les modèles linéaires et non linéaires (à petits signaux)

# La phase (suite)

- à fréquence moyenne, le modèle doit être capable de s'adapter à la phase, qui dépend de la géométrie considérée.
- cette dépendance à la géométrie a été montrée en thermique, mais aussi pour les courants induits dans la masse (J. Faucher).

# Modélisation dans le cas linéaire

- Modèle à un intégrateur :

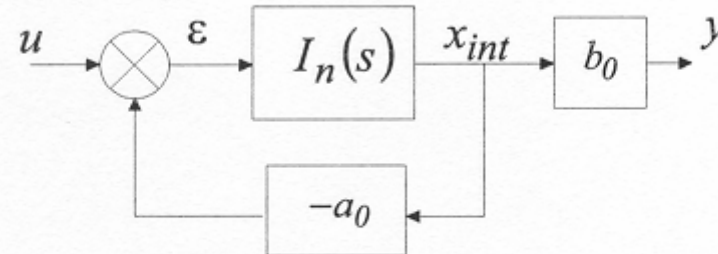
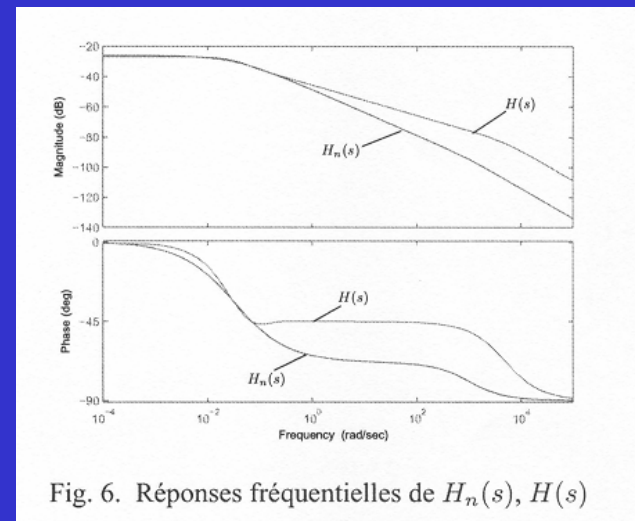
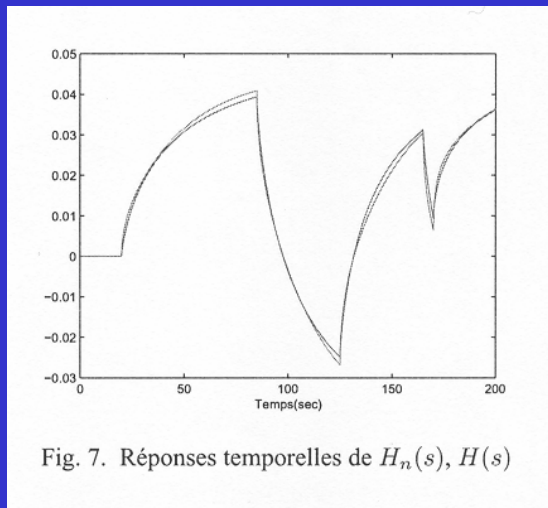


Fig. 5. Schéma bloc du modèle  $H_n(s)$

- Défaut :  $n \neq 0.5$  lorsque  $\omega \rightarrow \infty$

# Modèle linéaire à un intégrateur



# Modélisation dans le cas linéaire

- Modèle à deux intégrateurs :

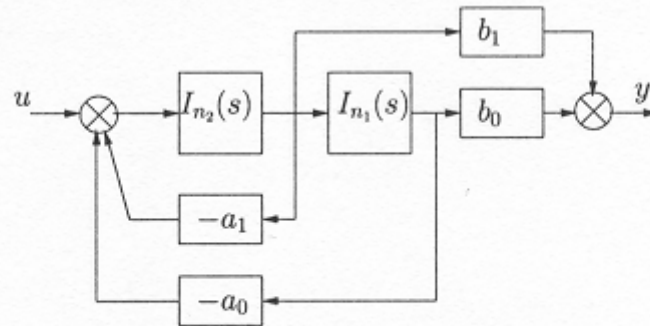
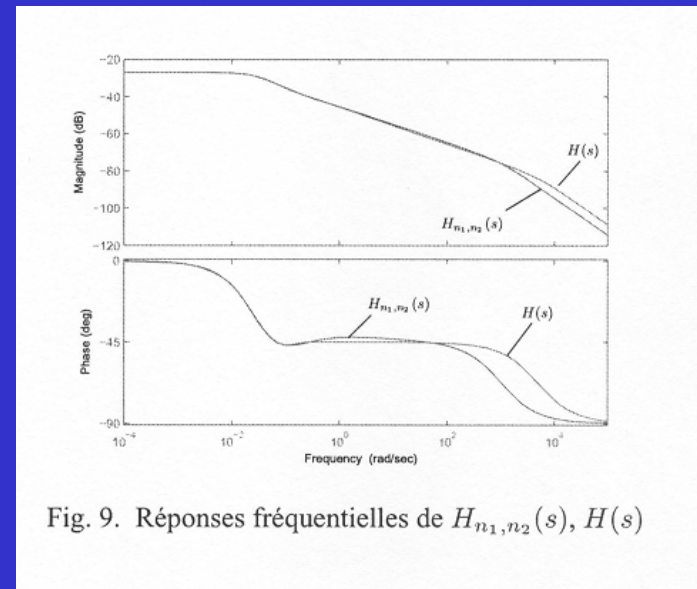
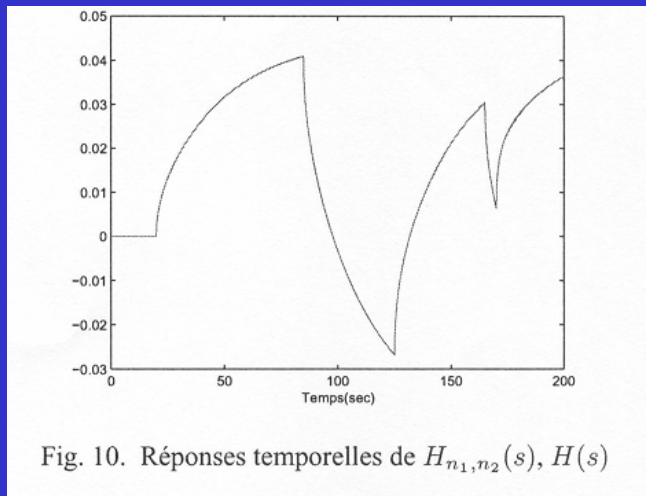


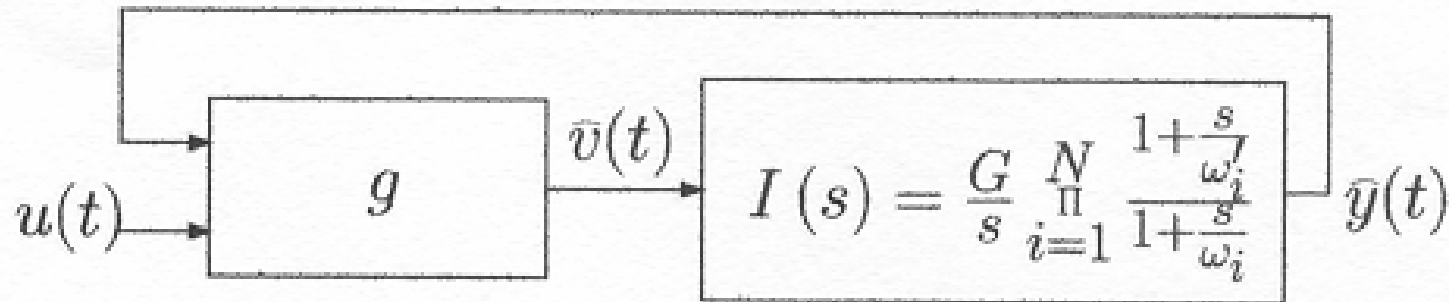
Fig. 8. Schéma bloc du modèle  $H_{n_1, n_2}(s)$

# Modèle linéaire à deux intégrateurs



- Intérêt :  $n = 0.5$  lorsque  $\omega \rightarrow \infty$

# Modélisation dans le cas non linéaire



$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\bar{y}(s)}{I_{\omega_b, N, \omega_h}(s)} \right) = \bar{v}(t)$$

$$\bar{v}(t) = g(u(t), \bar{y}(t), \underline{\Psi})$$

Fig. 6. NON LINEAR MODEL

# Modélisation dans le cas non linéaire

- RNC à un intégrateur : correct, mais  $n \neq 0.5$  lorsque  $\omega \rightarrow \infty$  en petits signaux
- RNC à deux intégrateurs : possible, mais apparemment trop complexe (surtout l'algorithme !)
- Conclusion : peut-on simplifier la technique à deux intégrateurs ?

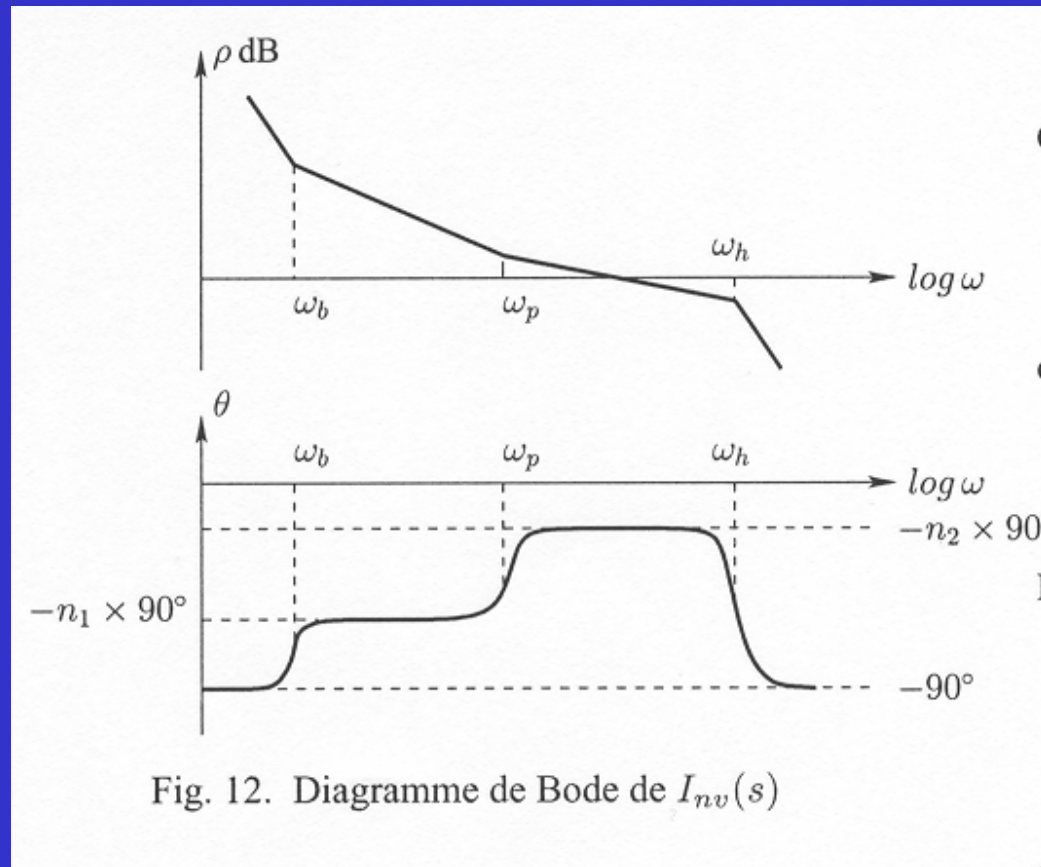
# Intégrateur à ordre variable avec la fréquence

Pourquoi deux intégrateurs ?

- un intégrateur à  $n = 0.5$  pour respecter la contrainte à fréquence infinie
- un intégrateur à ajuster pour s'adapter à la géométrie

**Solution** : intégrer ces 2 ordres (un ajustable, l'autre figé) dans un même intégrateur

# Intégrateur à ordre variable avec la fréquence



# Modèle linéaire à ordre variable avec la fréquence

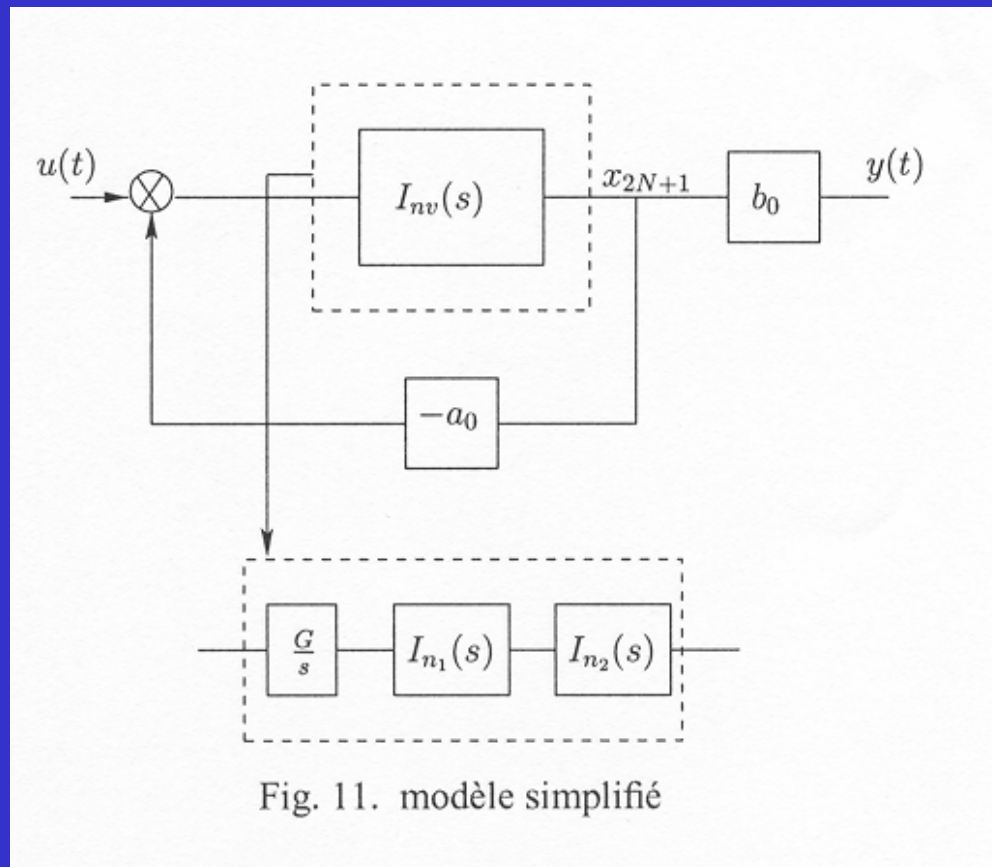
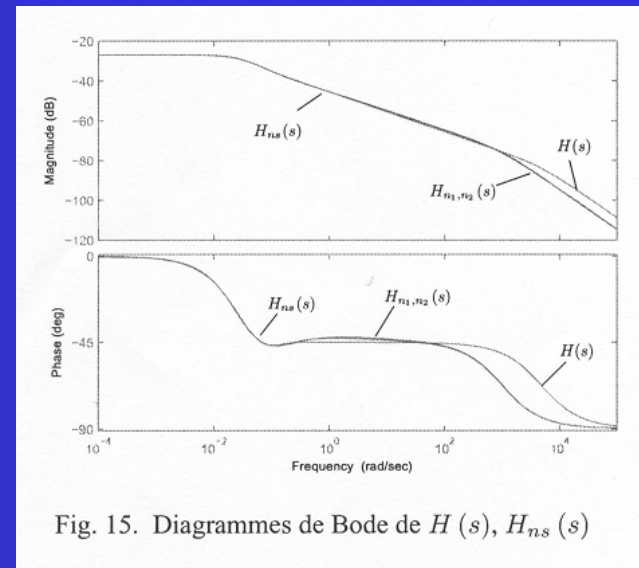
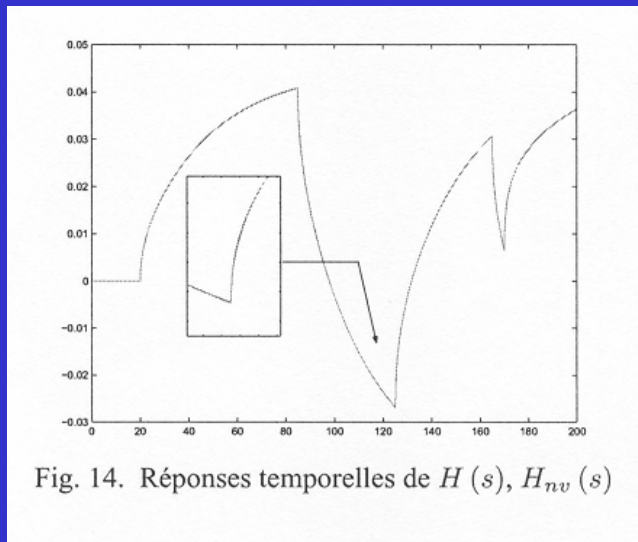


Fig. 11. modèle simplifié

# Modèle linéaire à ordre variable avec la fréquence



# Modélisation par intégrateur fractionnaire simplifié

- Intégrateur à ordre variable avec  $\omega$  : la modélisation est correcte, mais l'algorithme est complexe

surprise :  $n_1$  est très proche de 1 !

- **Simplification :**

on impose  $n_1 = 1$  et seul  $\omega_p$  est à estimer

# Modélisation par intégrateur simplifié : cas linéaire

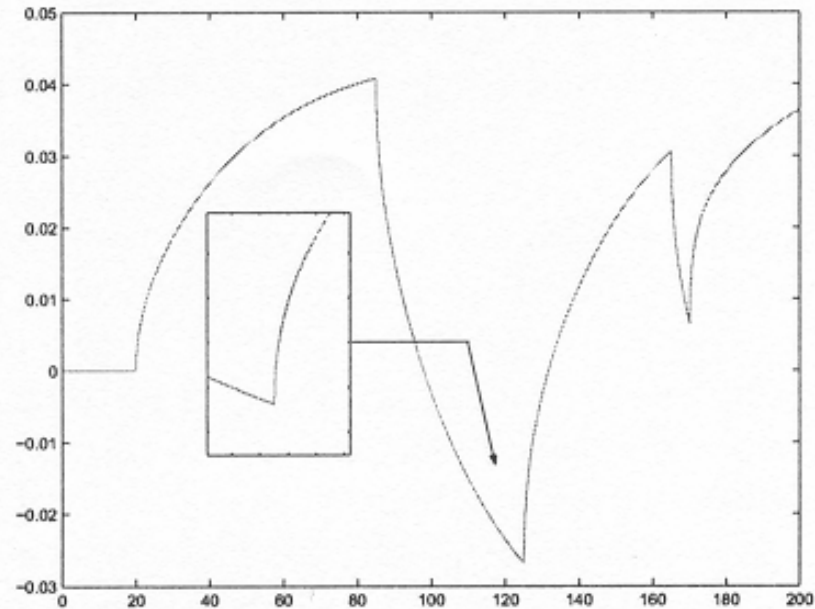
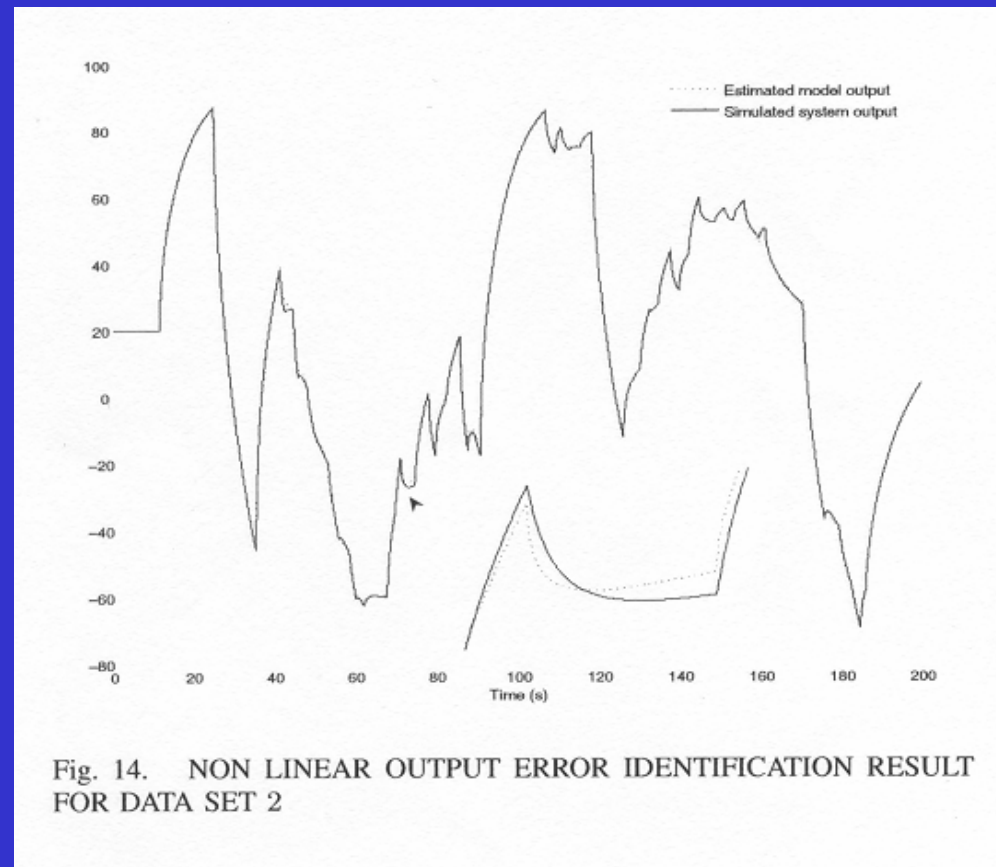


Fig. 16. Réponses temporelles des modèles  $H(s)$ ,  $H_{ns}(s)$ - données utilisées pour l'identification

# Modélisation par intégrateur simplifié : cas non linéaire



# Conclusions

- Les interfaces de diffusion peuvent être approchées par des modèles fractionnaires, linéaires et non linéaires
- La technique de modélisation basée sur l'intégration fractionnaire :
  - correspond à la simulation des équations différentielles d'ordre entier
  - n'utilise qu'un nombre réduit d'intégrateurs fractionnaires : évite l'explosion paramétrique
  - s'adapte sans difficulté au cas non linéaire : idéal si on connaît l'expression de la non linéarité

# Conclusions

- Les RNC fournissent une solution pour la modélisation fractionnaire non linéaire
- Introduction d'une nouvelle variété d'intégrateur fractionnaire à ordre variant avec la fréquence : un champ théorique à investiguer
- Possibilité de simplification de ce type d'intégrateur, sans dégradation des performances